ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXXII

1935 (XIII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1935 (XIII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1935 (Anno XIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Meccanica. — *La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente.* Nota [1] del Socio G. A. Crocco.

Il grado di robustezza dei velivoli nelle norme internazionali, è stato determinato in base ad ipotesi corrispondenti ad alcune manovre volontarie in volo od a terra. Era stato infatti riscontrato che le accelerazioni involontarie provocate da aria agitata risultavano in genere inferiori a quelle generate da particolari manovre di esercizio.

Recentemente è sorta e si accentua la tendenza di prendere altresì come ipotesi di calcolo l'incontro del velivolo con una raffica di vento verticale. Anzi è stata definita in America una *raffica tipo* nella quale la componente verticale del vento si suppone passare *bruscamente* da zero a circa *nove* metri a secondo.

Le accelerazioni calcolate secondo tale ipotesi risultano in certi casi superiori alle reali per aver supposto la raffica istantanea; mentre in altri casi restano di molto inferiori alla realtà per aver supposto la componente verticale limitata ad un valore che può invece raggiungere il triplo di quello scelto per la raffica tipo.

Vogliamo pertanto svolgere alcune considerazioni discriminatorie di questi casi che crediamo conducano ad un opportuno orientamento nell'ulteriore sviluppo dell'aviazione civile.

(1) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1934.

L'incontro di un velivolo con una raffica di vento è stato oggetto di studi teorici e sperimentali da parte del D. V. L. [1], del N. A. C. A. [2] e dell'A. R. C. [3], che hanno anche raccolto dati aerologici.

Il problema si presenta molto complesso non tanto per difficoltà aerodinamiche quanto per la scarsa conoscenza della struttura delle raffiche, ora soltanto delineata dai lavori di J. Bjerknes [4]. Nè si può darne carico alla scienza aerologica, giacchè le raffiche sono manifestazioni di moti irregolari dell'atmosfera e quindi, come quelle del mare, poco assoggettabili a calcolazioni generali. Si può tuttavia classificarle secondo stati tipici, come si è fatto per il mare; ed anche assegnare ad essi coefficienti numerici di natura informativa.

In attesa che sia precisata una tale *scala di raffiche*, da segnalare agli aviatori come quella dei venti o dello stato ondoso del mare, noi osserveremo che dal punto di vista aerodinamico si possono considerare due tipi di raffiche verticali: quelle nelle quali il passaggio alla massima componente verticale avviene in uno spazio dell'ordine di grandezza di un'ala di aeroplano: e che diremo *repentine*; e quelle dove il passaggio avviene in uno spazio di ordine di grandezza tale che la dimensione dell'ala del velivolo possa ritenersi comparativamente trascurabile: e che diremo in conseguenza *graduali*.

A questa classificazione aerodinamica, che potrebbe apparire dettata da comodità di calcolo, sembra faccia riscontro una netta distinzione meteorologica. Le raffiche repentine, che sono anche quelle ove è maggiore il salto di velocità, hanno tutte o quasi tutte una fronte *visibile*. Esse hanno infatti origine da superfici di discontinuità termiche createsi nell'atmosfera con l'incontro [5] di fronti di aria calda con fronti di aria fredda sia stazionario sia viaggiante con aree cicloniche, ma comunque causante, insieme alle forti correnti ascensionali che lo accompagnano, quel raffreddamento adiabatico cui si deve la condensazione locale del vapore acqueo. Esse sono perciò contraddistinte da cumuli, nembo–cumuli, linee di groppo e altre speciali configurazioni, temporalesche o meno, bene individuate agli occhi del pilota.

Le raffiche graduali sono invece quasi sempre associate ad una fronte *invisibile* perchè generate da moti convettivi dell'aria che prendono origine da accidentalità termiche od orografiche della superficie terrestre: e si elevano sino alle quote di volo anche in giornate serene trascinando altre masse d'aria e accrescendo in conseguenza lo spessore della loro fronte in ragione della distanza dall'origine. La loro invisibilità è dovuta alla graduale

(1) Küssner, *Beanspruchung von Flugzeugflügeln durch Böen*, Z. F. M., 24–28 Oct. 1931.

(2) N. A. C. A., *Load factor in bumpy air*. « T. N. », 347, aprile 1931.

(3) Bryant et Jones, *On the accel. of an aer. upon entering a vertical gust*. « A. R. C. Rep. and Mem. », n. 1496 (1932).

(4) J. Bjerknes, *Hydrodynamique physique*. Paris, 1933.

(5) Cfr. F. Eredia, *Meteorologia*, 1929; F. Vercelli, *L'aria*, 1934; J. Bjerknes, op. cit.

mescolanza con l'aria ambiente ed alla minore velocità ascensionale che impediscono il processo adiabatico e la condensazione di vapore. Caratteristica di questo tipo di raffica, per la sua stessa natura, è l'esistenza di un valore *limitato* della componente verticale, dapprima crescente con l'altezza finchè persiste l'influenza della causa: indi, raggiunto un massimo, decrescente sino ad annullarsi.

Lasciando che la indagine meteorologica confermi questa nostra tesi o ne indichi le eccezioni, vogliamo subito sottolinearne la importanza discriminatoria nel problema che ci interessa. Esso diviene suscettibile di due trattazioni separate e di conclusioni ben distinte. La raffica invisibile, da cui il volatore non può premunirsi, ha il benefizio della gradualità e della limitata intensità e può quindi formare oggetto di studio metodico, teorico e sperimentale, e condurre a prescrizioni di natura costruttiva; nel mentre la raffica repentina ed intensa che dà luogo ai massimi tormenti contro cui ogni predisposizione di robustezza potrebbe restare insufficiente, ha il beneficio della visibilità e può dar luogo a prescrizioni di sicurezza di altra natura. Accenneremo qui di seguito a tali due trattazioni, cominciando dalla raffica graduale.

Nella raffica graduale la componente verticale della velocità lungo un cammino orizzontale segue una legge non ancora formulabile, se si ha di mira il fenomeno naturale. Formulazioni sono possibili solo in casi semplici di correnti libere in aria tranquilla; come ha mostrato Tollmienn [1] e verificato Prandtl [2] e come è stato recentemeate confermato al Laboratorio aerodinamico di Torino [3].

In questi casi l'andamento della velocità lungo una sezione normale alla corrente risulta omotetico rispetto all'origine della corrente e ricavabile da una equazione differenziale lineare di terz'ordine.

Per le nostre valutazioni è tuttavia sufficiente la forma schematica esponenziale semplice, dove un opportuno coefficiente ε si adatti a rappresentare i risultati medii di ulteriori esperienze.

Indicando perciò con w_0 la velocità massima verticale della raffica e con d lo spessore della sua fronte orizzontalmente considerato ne rappresenteremo la velocità alla distanza orizzontale s dall'inizio con

$$w = w_0 \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{d} s}\right) \tag{1}$$

(1) « Berechn. turbul. Ausbreitungsvorgänge », Z. M. M. 6, 468.

(2) « Erg. der Aerod. Versuchs. zu Göttingen », II, 73.

(3) Panetti, *Distribuzione della velocità lungo il diametro di un getto d'aria libero.* (Inedito).

che, posto s in funzione della velocità v di avanzamento del velivolo, ci fornirà

$$w = w_0 (1 - e^{-\omega t}) ; \tag{2}$$

con $\omega = \frac{\varepsilon V}{d}$, come andamento nel tempo [1].

Sarà ora agevole introdurre l'effetto di una simile raffica nel comportamento del velivolo, perchè la supposta gradualità consente di non tener conto nè del tempo occorrente alla variazione della circolazione nè della elasticità dell'ala nè del lasso tra ala e coda.

Per tal modo la variazioni φ dell'angolo d'incidenza, comune all'ala ed alla coda, potrà esprimersi con

$$\varphi = w/V + \vartheta - \beta ; \tag{3}$$

dove ϑ è la variazione dell'angolo dell'asse longitudinale del velivolo con l'orizzonte, β la variazione dell'angolo della traiettoria con l'orizzonte; e la variazione di forza ascensionale dell'ala e quella del momento stabilizzatore della coda potranno assumersi proporzionali a questo angolo φ.

Se Γ e Σ sono perciò due coefficienti dipendenti dalla configurazione geometrica e dalla velocità del velivolo; e Λ un coefficiente contenente il momento resistente dovuto alla velocità angolare di rotazione, ϑ', del velivolo attorno al suo asse laterale; le due equazioni fondamentali del moto del velivolo potranno scriversi brevemente

$$\begin{cases} \vartheta'' + \Lambda\vartheta' + \Sigma\varphi = 0 \\ \beta' - \Gamma\varphi = 0 . \end{cases} \tag{4}$$

In queste equazioni abbiamo tralasciato i termini contenenti le variazioni di velocità orizzontale del velivolo, dato il breve tempo del fenomeno della raffica: e quindi ci siamo ridotti a considerare il periodo *corto* delle sue oscillazioni, senza tener conto del periodo lungo.

Le (4), tenendo presenti la (2) e la (3), si compongono nella:

$$\varphi'' + (\Lambda + \Gamma)\varphi' + (\Sigma + \Lambda\Gamma)\varphi = \frac{w_0 \omega}{V} (\Lambda - \omega) e^{-\omega t} \tag{5}$$

il cui integrale generale fornisce l'andamento delle variazioni dell'angolo d'incidenza e quindi le accelerazioni verticali del velivolo al suo incontro con la raffica graduale.

(1) Nella mia teoria, ancora inedita, sul comportamento del velivolo nel vento, di cui alla nota seguente, avevo invece posto $w = w_1 (e^{-at} - e^{-bt})$ per tener conto della graduale diminuzione di velocità della raffica dopo raggiunto il massimo.

Se indichiamo con φ_0 il valore di φ corrispondente al rapporto tra w_0 e V, cioè la totalità dell'angolo di cui varierebbe l'incidenza in una raffica istantanea, e introduciamo la variabile y per indicare il rapporto tra φ e φ_0, l'integrale generale della (5) espresso nella nuova variabile y, potrà scriversi nel caso di velivolo *periodico*

$$(6) \qquad y = \Phi e^{-\Psi z} \sin z + C\left[e^{-\Phi z} + e^{-\Psi z}((\Phi - \Psi)\sin z - \cos z)\right];$$

dove per brevità di scrittura abbiamo posto

$$(7) \qquad z = ft \quad ; \quad \Phi = \frac{\omega}{f} \quad ; \quad \Psi = \frac{\Lambda + \Gamma}{2f};$$

indicando con

$$(8) \qquad f = \sqrt{\Sigma - \frac{(\Lambda - \Gamma)^2}{4}}$$

la frequenza dell'oscillazione periodica del velivolo: e con C la costante di integrazione:

$$(9) \qquad C = \frac{\frac{2\Lambda}{\Gamma - \Lambda}\Psi - \Phi}{1 + (\Phi - \Psi)^2};$$

dipendente da Φ e Ψ e inoltre dal rapporto, che diremo λ, tra Λ e Γ.

La ricerca del massimo valore di y non è agevole dal punto di vista numerico. Vi si perviene più speditamente dal punto di vista numerico. Per ciò basta calcolarsi le quantità Λ, Γ, Σ del velivolo che definiscono la frequenza f, nonchè il valore di Ψ relativo al velivolo: e poi, assumendo per ω e quindi per Ψ attendibili valori, e calcolati i conseguenti valori di C, procedere al tracciamento delle curve y in funzione di z e rilevarne i massimi.

Si otterrà allora, per ogni valore di λ, l'andamento di y_{max} in corrispondenza di Ψ e di Φ.

L'esame di tale andamento rivela che y_{max}, per gli ordinari valori di Λ, Γ e Σ, è essenzialmente dipendente dal rapporto tra Ψ e Φ, cioè tra $\Lambda + \Gamma$ ed ω, il quale rapporto, espresso mediante i parametri costruttivi del velivolo, ed essendo $\Gamma = k_p \gamma V S/Q$, risulta:

$$(10) \qquad \frac{\Psi}{\Phi} = \frac{k_p(1+\lambda)}{2\varepsilon} \cdot \frac{\gamma \cdot d}{Q/S};$$

dove k_p è il gradiente della portanza col variare della incidenza espressa in radianti; γ il peso specifico dell'aria alla quota di navigazione; Q/S il carico alare del velivolo; ε, λ, d le quantità sopra definite.

La figura 1 fornisce a titolo di esempio i valori di y_{max} in funzione di Ψ/Φ per il caso di $\lambda = 2$ e $\Psi = 7$.

Le curve corrispondenti a diversi valori di Ψ per uno stesso valore di λ differiscono poco tra di loro e tendono a confondersi con la curva che si ottiene nel caso di $\Sigma = 0$ cioè di aeroplano *indifferente* dal punto di vista della stabilità statica.

In quest'ultimo caso basta partire dalla seconda delle (4); e il valore di y_{max} è suscettibile di semplice espressione analitica, ottenendosi

$$(11) \qquad (y_{max})_{\Sigma=0} = \left(\frac{\omega}{\Gamma}\right)^{\frac{\Gamma}{\Gamma-\omega}};$$

che può agevolmente confrontarsi coi valori dell'aeroplano stabile citato come esempio nella figura.

Ne consegue che il *fattore di contingenza* del velivolo nell'incontro colla raffica, cioè l'accelerazione sopportata dal velivolo a causa della raffica aggiunta a quella corrispondente al volo normale e rapportata a quella della gravità, potrà ritenersi, a meno del peso proprio delle ali,

$$(12) \qquad n = 1 + y_{max} \frac{k_p \rho w_o V}{Q/S};$$

essendo ρ la densità dell'aria alla quota di volo e y_{max} deducibile dalla curva della figura 1.

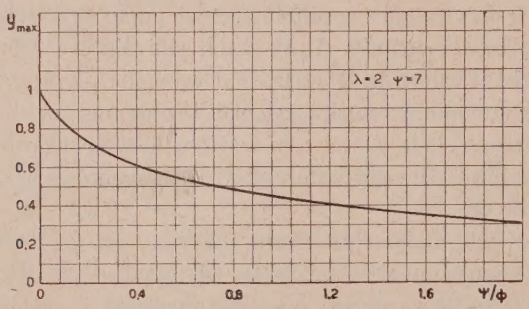


Fig. 1.

Tale curva mostra che y_{max}, a partire dal valore 1 teoricamente corrispondente a $d = 0$, decresce in modo notevole col crescere del rapporto Ψ/Φ, cioè essenzialmente collo spessore d del fronte della raffica; e che, a parità di ε e λ, esso varia in ragione *diretta* del rapporto $Q/k_p \gamma S$; mentre nella (12) tale rapporto opera in ragione *inversa*.

Non è quindi possibile prescindere dalla gradualità della raffica nell'esprimere il tormento del velivolo perchè essa ne modifica non solo il valore numerico ma anche la legge con cui lo esprime la formula americana

($y_{max} = 1$) per quanto riguarda il gradiente di portanza nonchè la influenza della quota e del carico alare.

Rimane inalterata la proporzionalità a w_o ed a V, che non sono contenute in y_{max}.

Riportiamo a titolo di esempio sulla Fig. 2 un fascio di curve rappresentanti n per alcuni valori di V e di Q/S; assumendo per altro $k_p = 2$; $\gamma = 1$; $\varepsilon = 1,5$; $\lambda = 2$ e riferendoci, come ascisse, allo spessore d della fronte di raffica a partire da un *minimo di dieci metri*; giacchè al disotto di tale valore i risultati numerici non sono più conformi alla ipotesi della gradualità.

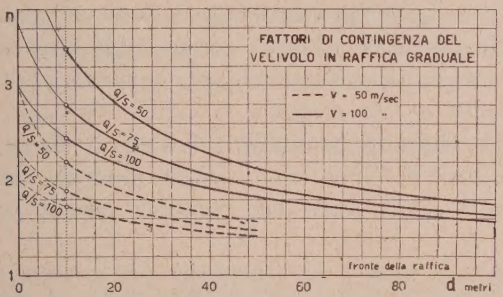


Fig. 2.

La trattazione matematica della raffica repentina presenta ben altre difficoltà, non essendo più possibile trascurare il tempo necessario al mutamento della circolazione alare, nè quello intercedente tra l'ingresso dell'ala e quello della coda nella raffica, nè infine l'elasticità dell'ala che all'urto quasi improvviso si carica come una molla e raggiunge per inerzia valori dinamici maggiori di quelli corrispondenti al calcolo statico.

Ne nascono sollecitazioni ben più gravi di quelle calcolabili con la raffica graduale, giacchè le due ultime cause predominano sulla prima; e diventano addirittura imponenti se si pensa ai forti valori che può assumere la velocità massima verticale delle raffiche repentine.

Non appare lontano dal vero il supporre che l'angolo d'incidenza in seguito alla raffica repentina superi quasi sempre il valore *critico* e che il fattore di contingenza possa in ogni caso indicarsi con

$$n = \frac{C_{p\,max}}{C_p};$$

essendo $C_{p\,max}$ il coefficiente massimo della portanza corrispondente all'incidenza critica, e C_p il coefficiente corrispondente al volo.

A tali contingenze è impossibile che un velivolo civile resista col solito margine di sicurezza a meno di non possedere la robustezza degli aeroplani da caccia ed anche più; onde la trattazione di questo caso deve prendere un indirizzo diverso da quello del caso precedente.

Nel fatto l'aria agitata può compararsi con le sue raffiche al mare ondoso: salvo la differenza che le onde marine sono quasi sempre graduali e vengono attraversate dalle navi con velocità assai minori. Forse è più vicino alla realtà il paragone con un terreno ondulato, o meglio rotto da fossi e da rialzi, ove si voglia far transitare una automobile. In tal caso, che l'automobilista cerca anzitutto di evitare, egli è costretto a rallentare la sua andatura e comunque a fornirsi di buone sospensioni elastiche, ammortizzate, fra le ruote e la macchina.

Analoghi metodi debbono a nostro avviso seguire i velivoli che si trovino innanzi a raffiche repentine.

Anzitutto evitarle. A ciò contribuisce la loro visibilità e la loro forma caratteristica. Un atlante di nubi può portare i tipi di correnti ascensionali e discensionali che vanno connessi con tutte le formazioni visibili, termiche o temporalesche [1].

Non si può abbastanza consigliare al pilota di astenersi dallo sfidare queste insidiose dune dell'atmosfera: e di ricordare che una gran parte di rotture di velivoli in aria sono state registrate appunto nell'incontro con una nube.

Se la notte o la rotta o altre necessità non consentono al pilota di mutar cammino, la seconda prescrizione da seguire è quella di rallentare l'andatura.

La proporzionalità del tormento alla velocità è infatti legge ineluttabile; e dimezzando la velocità si dimezza il tormento e nella maggior parte dei casi si salva il velivolo.

Infine quando le accresciute velocità di crociera e la intensità e la regolarità del traffico aereo lo richiedessero, la tecnica aviatoria ha a disposizione, come quella automobilistica, la possibilità della sospensione elastica.

Vogliamo anzi subito osservare che il velivolo si trova da questo lato in migliori condizioni dell'automobile. La ruota infatti non può sottrarsi all'ostacolo se non contornandolo: ed il pneumatico evita solo in parte questa necessità di principio.

Nell'ala invece si può eliminare l'influenza della raffica modificando l'angolo di incidenza e lasciando inalterata la sua traiettoria. Ciò fu pensato trentadue anni fa [2]; ma la pratica del volo ordinario non ne sentì allora la necessità, bastando la variazione di incidenza dell'intero velivolo, spontanea o comandata, ottenuta con lo stabilizzatore o con l'equilibratore.

Alle grandi velocità, sempre crescenti, questa pratica diviene ormai insufficiente. Già come abbiamo osservato, le ordinarie doti di stabilità statica poco influiscono sulla riduzione dell'incidenza nel caso della raffica graduale.

(1) Vedi Vercelli, *L'aria*, figg. 302 e 303.

(2) Crocco, Brevetto Italiano R. G. 45, N. 66864, del 3 marzo 1903. La *teoria dell'aeroplano elastico nel vento* (inedita) fu svolta nel 1909.

Tanto meno influirebbero in una raffica repentina. L'inerzia alla rotazione del velivolo si oppone in ogni caso alla pronta variazione dell'assetto di volo.

Appare quindi opportuno riprendere il concetto dell'ala incernierata attorno ad un asse anteriore all'asse focale, trattenuta in posizione da congegni elastici. In tal caso, essendo la inerzia dell'ala di gran lunga inferiore a quella di tutto il velivolo, *l'ala stessa può sottrarsi all'eccessivo tormento della raffica, modificando spontaneamente il suo angolo d'incidenza.*

Si può anzi pensare ad un servocomando azionato automaticamente da un equilibratore anteriore; allo scopo di anticipare il movimento angolare dell'ala e di renderlo quasi istantaneo.

Noi non possiamo prevedere se l'aviazione civile avrà bisogno di queste congegnazioni che complicano senza dubbio la bella semplicità costruttiva dell'ala solidale col velivolo; ma possiamo affermare che esse risolverebbero in pieno il problema della raffica e, sopratutto in aviazione militare, risparmierebbero ai velivoli l'eccessivo appesantimento cui si va incontro elevandone il coefficiente di robustezza.

Geologia. — *Sopra alcuni ciottoli dell'anagenite-verrucana del Monte Pisano.* Nota [1] del Corrisp. P. Aloisi.

Dopo la scoperta della flora fossile nella valle del Guappero, per molti anni, le anagenti e gli scisti, complessivamente indicati con il nome di verrucano, sono stati riferititi al Permiano; e quando rocce di quel tipo si son trovate comprese fra terreni secondari, o se ne è negata la corrispondenza con quelle permiane, e si sono indicate come pseudoverrucano, oppure si è ricorso a complicati fenomeni tectonici per ispiegarne la posizione ritenuta anomala.

Da tempo, peraltro, il Fucini, in una serie di numerosi lavori, ha sostenuto, con argomenti stratigrafici, paleontologici e litologici, che il verrucano tipico è molto più giovane di quello che era stato ritenuto, e precisamente del Giura superiore (Wealdiano). Questa formazione, insieme ad altre che l'accompagnano superiormente, si troverebbe, qualche volta, come a Rupecava nel Monte Pisano, al suo posto nella serie stratigrafica, più spesso invece sarebbe trasgressiva sopra terreni più antichi, dall'antracolitico al giurassico.

L'interpetrazione del Fucini non ha trovato, in generale, consensi fra i geologi italiani; alcuni, come il Lotti, il De Stefani e, più di recente, il Masini, il Vinassa, il Redini [2], l'hanno decisamente combattuta, altri invece si sono astenuti dall'esprimere pubblicamente un parere, pro o contro.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1935.

(2) Il Redini, in questi ultimi tempi, ha pubblicato un esteso lavoro sulla geologia del Monte Pisano *(Contribuzione allo studio geologico del Monte Pisano).* « Boll. R. Com.

Si tratta, secondo me, di uno dei problemi più importanti della geologia toscana, e non soltanto toscana, giacchè, se non sbaglio, l'ipotesi della età antica del verrucano, e la conseguente sua non rara posizione anomala, fornisce alcuni fra i più validi argomenti ai sostenitori dei grandiosi fenomeni di carreggiamento, che avrebbero avuto luogo nella parte peninsulare dell'Italia. Ho accolto perciò con molto piacere l'invito, fattomi dal Fucini, di studiare alcuni ciottoletti racchiusi nella tipica anageníte verrucana del Monte Pisano, allo scopo di vedere se era possibile stabilirne la provenienza.

Che le rocce verrucane contengano ciottoli di varia natura, è cosa nota da tempo; quelli di calcare sono rari: ne cita il De Stefani [1] per il Monte Pisano (Rupecava) ed il Cocchi [2] per l'Elba; un ciottolo di radiolarite identica, anche per i radiolari, a quella litoniana, è stato trovato dal Fucini [3] nella quarzite del M. Terminetto, ed altri, di scisti rossastri (forse degli scisti con aptici), di scisti permiani, di selce grigia e chiara, ne ha raccolti il Fucini [4] stesso ad Agnano; sono poi notissimi i ciottoli di tormalinolite. Il Redini [5] ricorda inoltre ciottoli di quarziti varie, e di una roccia costituita da quarzo microgranulare, che ricollega alla tormalinolite.

Il Fucini, per il presente lavoro, mi ha fornito un grande numero di campioni di anageníti e di scisti verrucani del Monte Pisano, includenti ciottoli svariati, talora minuti, talora invece assaigrossi: ricorderò, fra questi ultimi, una ghiaia appiattita ed arrotondata, del diametro di cm. 10, spessa un paio di centimetri, che, per l'aspetto macroscopico, si avvicina ad alcune quarziti dell'antracolitico del Monte Pisano stesso. Poichè uno studio di tutti i ciottoli avrebbe richiesto, per i necessari confronti, quello delle rocce presumibilmente simili, di età sicura, cosa in molti casi assai difficile, ne ho scelto pochi, tali che, per l'aspetto esterno, possono essere ravvicinati a rocce tipiche, mesozoiche, del Monte Pisano, scartando così, per esempio, quelli, assai frequenti, che rassomigliano a rocce antracolitiche, da tutti ritenute

geol. d'Italia», LX. Roma, 1935) al quale rimando per la bibliografia; per quello che qui ci interessa, si può dire che questo autore (p. 95) ritiene che esistano, oltre a quello antracolitico, un verrucano del Trias medio inferiore, se non addirittura del Neopermico, quello della Verruca, e poi due verrucani del Trias superiore-medio, quello del valico S. Giuliano–S. Maria, e quello di Rupecava; fra questi ultimi due starebbe una potente formazione di rocce varie, calcari, diaspri, scisti varicolori, per cui bisognerebbe ammettere un notevole intervallo di tempo fra le varie deposizioni di rocce verrucane. Dato che nessuno, neppure il Redini, contesta l'assoluta identità litologica fra il verrucano di Rupecava e quello della Verruca, l'ipotesi appare assai ardita.

(1) *Di alcuni carreggiamenti locali recentemente supposti in Italia.* «Rend. R. Acc. Lincei», XVII, Roma, 1908.

(2) *Descrizione geologica dell'Isola d'Elba.* Memorie per servire alla descrizione della Carta geologica d'Italia, I, Roma, 1871.

(3) *Studi geologici sul Monte Pisano.* «Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali», 62, ser. V, XIV, Catania, 1924–25.

(4) *Quisquiglie wealdiane.* «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», 8, XLIII, Pisa, 1933, XI.

(5) Op. cit., 19.

oggi anteriori al verrucano tipico, giacchè l'identificazione non avrebbe avuto altro che scarso significato geologico.

La mia scelta è caduta su sette ciottoli, quattro di scisti rosso–violacei, tre di selce. I primi, come vedremo, si potrebbero riportare, ad un esame sommario, ai cosiddetti scisti varicolori, gli altri alla selce dei calcari del Lias medio. Si deve notare qui, che, stando alla interpetrazione del Redini, i suddetti scisti e calcari con selce dovrebbero esser considerati del Trias superiore, e sarebbero anche sottoposti ad una parte del verrucano della zona nord-occidentale del Monte; siccome però i ciottoli sono nell'anagenite della parte meridionale del Monte stesso, una volta stabilita la loro corrispondenza con gli scisti varicolori e con la selce ricordata, bisognerebbe ammettere, anche entrando nell'ordine d'idee del Redini, che l'anagenite che li contiene fosse del Trias superiore, e non di quello medio–inferiore e, tanto meno, del Neopermico. Io non intendo impancarmi in una discussione sull'età dei calcari con selce e degli scisti varicolori; osserverò soltanto che l'argomento fondamentale per riferire tali rocce al Trias, sta nella presenza, nei calcari ceroidi, ad essi sottoposti, di una fanua che il Vinassa[1] ha ritenuto triassica, mentre il Fucini[2], molti anni fa, la determinava come liassica. Ora, i fossili medesimi sono stati di nuovo studiati dall'Arthaber[3], il quale, confermando in gran parte le determinazioni del Fucini, ha escluso l'età triassica dei calcari ceroidi, i quali « contengono una forma di età liassica inferiore ». I calcari con selce, soprastanti al ceroide, possono pertanto esser ritenuti del Lias medio.

I ciottoli scistosi hanno dimensioni varie, da quelle di una noce, a quelle di uno scudo o poco più: la forma loro è irregolare o rotondeggiante. All'aspetto macroscopico, la roccia che li costituisce è assolutamente identica a quella di numerosi campioni di scisti varicolori del Monte Pisano, che il Fucini mi ha fornito per confronto, ed anche di quelli da me raccolti e studiati molti anni fà. Chi si limitasse ad un esame sommario, concluderebbe senz'altro per la corrispondenza fra i ciottoli e gli scisti suddetti.

L'esame delle sezioni sottili degli uni e degli altri fa riconoscere invece che le cose stanno diversamente: i ciottoli, nonostante la corrispondenza macroscopica, non hanno tutti la stessa natura, e probabilmente son di provenienza in parte diversa.

Un primo esemplare, raccolto ad Agnano, è formato da un'arenaria quarzitica minuta, con cemento sericitico, e con abbondante pigmento pulverulento, rossastro. Oltre al quarzo, contiene, nella segione studiata, un ciottoetto di silice microcristallina, altri di una roccia in tutto simile a quella che

(1) *La fauna e l'età dei calcari bianchi marmorei del M. Pisano.* « Boll. Soc. geol. ital. », LII, Roma, 1933.

(2) *Fauna dei calcari bianchi ceroidi con Phylloceras cilindricum. Sow. del Monte Pisano.* « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat. », XIV, Pisa, 1894.

(3) *Revision der Fauna der hellen Kalke der Pisaner Berge,* « Cbl. f. Min. Geol. u. Pal. », B., 1935, Stutgart, 1935.

forma la massa, ma meno pigmentata, ed altri interamente sericitici. Si vedono, infine, pochi cristallini e frammenti di tormalina.

Il secondo ciottolo, proveniente da C. Serra, è costituito da uno scisto di tipo quasi filladico, con sericite piuttosto scarsa, e scarsi pure i frammenti allotigeni di quarzo: alcuni di questi hanno l'aspetto di interclusi di roccia eruttiva. Il pigmento rossastro, molto abbondante, maschera un po' tutta la roccia.

Il terzo, raccolto a Noce, ha carattere filladico ancor più manifesto, per la mancanza di granuli allotigeni; è presente anche della sostanza cloritica giallognola, isotropa o quasi.

Il quarto, finalmente, pure raccolto a Noce, è un ciottolo di porfiroide. Si ha una massa quarzoso–sericitica, con grana, per quel che si riferisce al quarzo, non troppo minuta, nella quale sono immersi dei quarzi tipicamente porfirici, in alcuni casi con contorno cristallino assai netto, in altri invece con evidentissime tracce di corrosione magmatica, ed anche di intrusioni della massa fondamentale. Delle aree sericitiche, in qualche caso con forma tabulare, potrebbero forse rappresentare originari interclusi feldispatici. Il pigmento, abbondante, è più grigiastro che rosso.

Alcuni scisti varicolori raccolti alla Polla, sotto Rupecava, sono stati descritti ed analizzati da me [1], oltre trent'anni fa: si tratta di rocce calcareo–argillose, le quali, nonostante che, come ho detto prima, siano talora identiche esternamente a quelle dei ciottoli, non hanno, in realtà, nulla a che fare con esse.

I molti altri campioni di scisti varicolori datimi dal Fucini, e provenienti da luoghi vari, sempre del Monte Pisano, si son mostrati, con una sola eccezione, in tutto corrispondenti con quelli della Polla. Un campione invece, proveniente dalle vicinanze della Villa Vaglini, sopra Corliano, differisce dagli altri; l'aspetto macroscopico è ancora lo stesso, ma, intanto, esso non fa effervescenza con gli acidi. Al microscopio si riconosce trattarsi di uno scisto quarzoso–sericitico, con sericite piuttosto scarsa, con granuli allotigeni di quarzo non abbondanti e piccoli. Esso si avvicina un po' allo scisto del primo ciottolo descritto, il quale però è assai più ricco di sericite.

Riassumendo, lo scisto del primo ciottolo potrebbe corrispondere a scisti varicolori del tipo di quello della Villa Vaglini, ma non si può affatto escludere anche una corrispondenza con scisti dell'antracolitico; lo stesso si può dire per il terzo ciottolo.

Le rocce del secondo e, specialmente, del quarto ciottolo si possono forse ravvicinare a quelle costituenti il nucleo antico delle Alpi Apuane, fra le quali, per quanto mi ha comunicato verbalmente il Bonatti, che attende al loro studio nell'Istituto mineralogico di Pisa, i porfiroidi sono molto abbondanti.

(1) *Su di alcune rocce di Ripafratta (Monte Pisano).* « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», XX, Pisa, 1904.

Si può notare che anche uno dei ciottoli trovati dal Redini [1] è probabilmente di questo tipo; il Redini ha escluso che si tratti di una roccia porfirica, per l'insieme dei caratteri macro– e microscopici, caratteri che sarebbe stato però interessante di conoscere.

Dei tre ciottoli di selce racchiusi nell'anagenite, due hanno dimensioni relativamente grandi, il terzo invece, piuttosto piccolo, è stato quasi interamente usato per preparare la sezione sottile. Provengono tutti e tre da Agnano.

Il primo ciottolo, della grossezza di una noce, un po' arrotondato, è costituito da selce bianca; con la lente si vedono delle piccole cavità, di forma romboedrica, tappezzate da limonite. Al microscopio la roccia risulta formata essenzialmente da quarzo microcristallino; con forte ingrandimento si osservano anche delle piccole fibre diritte, con rifrazione un po' superiore a quella del quarzo, e con birifrazione elevata, estinguenti a 0° con l'allungamento: dubbiosamente le riferisco a muscovite; esse sono, in complesso, piuttosto scarse. La massa è attraversata da qualche venuzza di quarzo a grana maggiore, e contiene dei vuoti di forma romba, con orlo limonitico (fig. 1) i

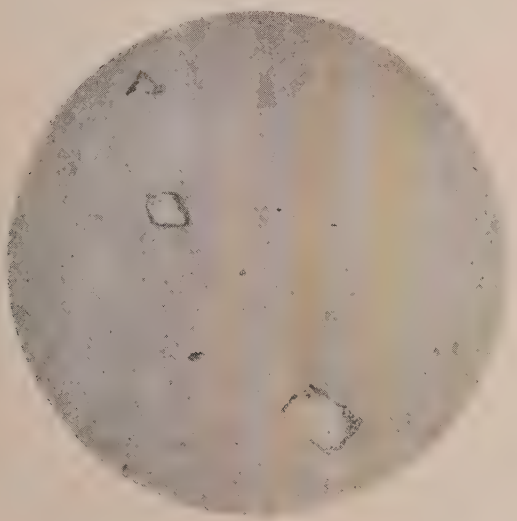


Fig. 1. – Ciottolo di vela nell'anagenite di Agnano; sezioni vuote, con orlo limonitico, lasciate da un carbonato romboidrico. Solo pol., ingr. 5.

quali, in origine, dovevano essere occupati da cristalletti sideritici; in alcuni casi l'orlo limonitico manca. Presenti pochissimi granuli di zircone.

Il secondo ciottolo ha forma allungata, un po' appiattita, con spigoli arrotondati, e misura oltre sei centimetri secondo l'allungamento; esternamente,

(1) Op. cit., 19, in nota.

come del resto avviene anche per il primo ciottolo selcioso, esso è ricoperto da una patina limonitica; sulla frattura fresca è identico al precedente. Al quale corrisponde anche all'esame microscopico; la sola differenza è data dalla presenza, in alcuni punti, di piccole aree rotondeggianti che, col solo polarizzatore, appaiono più limpide della massa quarzosa circostante, e che a nicol incrociati risultano formate, esse pure, da quarzo, ma a grana leggermente più grossa. Oltre alle aree di forma romba, vuote, con orlo limonitico, se ne trova qualcuna, più piccola, interamente ripiena di limonite. Sembra mancare lo zircone.

Il terzo ciottolo, come ho detto assai più piccolo, ha forma irregolare ed è di colore grigiognolo. Al microscopio corrisponde al primo, tranne nella grana un po' minore e nella maggiore scarsezza di fibre della supposta muscovite; è conservato qualche raro cristallino di carbonto romboedrico, e sono presenti, in piccola quantità, dei minuti pentagono dodecaedri di pirite [1].

Per confronto ho esaminato diversi campioni di selce di età nota, e precisamente: tre di quella associata con i calcari del Lias medio, provenienti da S. Giuliano, nel Monte Pisano; uno, pure dei calcari del Lias medio, di M. Arrenti, nella Montagnola Senese; uno di selce dei calcari picchiettati, giurassici secondo il Fucini, triassici per il Redini, proveniente da M. Cupola nel Monte Pisano; uno, finalmente, raccolto a M. Bastione, nei monti d'oltre Serchio, nei calcari del Neocomiano inferiore, secondo il Fucini, del Titoniano, per altri.

Le sole selci del Lias medio si possono confrontare con quelle dei ciottoli; le altre hanno caratteristiche, anche esterne, assai diverse. Le prime, invece, a prescindere dalla forma di ciottolo che presentano quelle incluse nell'anagenite, corrispondono loro in tutto, per quel che si può giudicare all'osservazione macroscopica, in particolare per la grana e per il colore, ora bianco, come nei primi due ciottoli, ora grigiognolo, come nel terzo.

In questo caso, poi, a differenza di quel che avveniva per gli scisti, l'esame microscopico conferma i risultati di quello macroscopico. Le selci del Lias medio hanno gli stessi caratteri di quelle dei ciottoli, a prescindere, forse, dalla piccole aree rotondeggianti descritte per il secondo ciottolo, le quali sembrano mancare di solito nelle selci del Lias medio, solo trovan-

(1) Oltre a quelli qui descritti, un altro ciottolo di selce nell'anagenite verrucana fu raccolto dal Fucini, ed esaminato sommariamente dal Franchi (v. Fucini, *Quisquiglie* ecc., 8) il quale, confrontandolo con campioni di selce del Lias medio, rilevò la corrispondenza macroscopica delle due rocce; la malattia, che poi condusse alla morte il distinto geologo, non gli permise di procedere all'esame microscopico. Un secondo ciottolo, pure raccolto dal Fucini, ad Agnano, è ricordato dal Redini (op. cit., 21); egli ha avuto l'«impressione» che «invece di essere un ciottolo allotigeno, possa essere una formazione, di tipo nodulare, a costituzione sincrona a quella della roccia includente». Sarebbe stato opportuno, visto che si tratta di un fatto molto importante, che il Redini avesse approfondita un po' più la questione o, per lo meno, avesse detto su quali elementi è fondata la sua «impressione», a fine di eliminare il dubbio che l'«impressione» medesima non sia interamente spassionata.

dosene un accenno in uno dei campioni di S. Giuliano. In esse i piccoli cristallini di carbonati romboedrici, ora più ora meno abbondanti, sono in generale conservati, ma non mancano casi nei quali essi sono scomparsi, lasciando dei vuoti a sezione romba (fig. 2), con o senza orlo limonitico, identici a quelli che si trovano nei ciottoli (cfr. fig. 1). Si può osservare

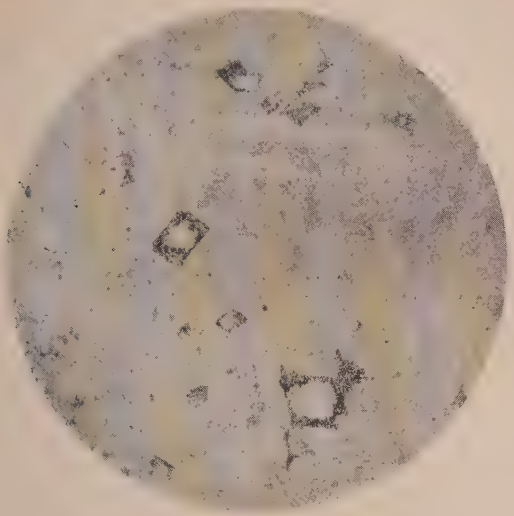


Fig. 2. – Selce dei calcari del Lias medio di Bagni di S. Giuliano; sezioni vuote, con orlo limonitico, lasciate da un carbonato romboidrico. Solo pol., ingr. 50.

anche che, sebbene talora nelle selci del Lias medio si abbiano delle venuzze quarzose, come nei ciottoli, più spesso invece esse son di calcite, o, contemporaneamente, di calcite e quarzo; è evidente che i ciottoli sono stati soggetti ad una decalcificazione.

La grana della massa corrisponde perfettamente a quella dei ciottoli; le fibrille di supposta sericite sono, come in questi, più o meno frequenti, ed in uno dei campioni di S. Giuliano si trovano anche i piccoli pentagonododecaedri di pirite che ho ricordato per uno dei ciottoli.

In conclusione, la selce rinvenuta in ciottoli (veri ciottoli e non concrezioni) nell'anagenite verrucana del Monte Pisano, si può identificare con quella dei calcari del trias medio del Monte Pisano stesso, e di altri luoghi: le deduzioni, ovvie del resto, che scaturiscono da questo fatto, le lascio ai geologi.

Lo studio approfondito dei ciottoli selciosi del verrucano permette di mettere in luce un altro fenomeno, non nuovo, ma non ancora sufficientemente noto, e, mi sembra, molto importante: i cristallini di carbonati romboedrici, come s'è visto, sono scomparsi, lasciando dei vuoti, molto ben

riconoscibili, e le venuzze di calcite non esistono più; in altre parole, la selce ha sofferto una decalcificazione (meglio, forse, una decarbonatazione) di solito completa. Questo fatto, per le rocce verrucane, era già stato osservato da A. D'Achiardi [1], secondo il quale la siderose, un tempo assai frequente in alcuni tipi di queste rocce, è quasi del tutto scomparsa, lasciando dei vuoti romboedrici, ed anche da me [2], per l'anagenite di Rupecava.

È molto probabile che le medesime azioni, evidentemente assai energiche, che hanno sciolto i carbonati delle rocce verrucane, anche nelle parti più interne dei ciottoli di selce, abbiano agito, e con maggior facilità, sui ciottoli di calcare (tanto facilmente erodibili anche per semplici azioni meccaniche), che si potevano trovare nel materiale ciottoloso – arenaceo, dalla cui cementazione ha avuto origine il verrucano. Questo spiega la scarsezza di ciottoli calcarei nel verrucano stesso, ed anche quella di frammenti di scisti varicolori, i quali, in fondo, sono dei veri calcescisti.

Il Redini [3] si meraviglia per l'« estrema povertà nel verrucano del M. Pisano dei supposti ciottoli di selce »; bisogna però osservare che tale povertà, anche allo stato attuale delle nostre conoscenze, non è poi eccessiva, giacchè oltre ai tre ciottoli da me descritti, sono da riportare, con grande probabilità, alla stessa roccia, anche quello sommariamente studiato dal Franchi, quello per il quale il Redini stesso ha avuto «l'impressione» che non fosse allotigeno, e poi, forse, quei ciottoli di roccia quarzosa microgranulare « che per il suo aspetto ricorda la selce » citati ancora dal Redini, e da lui ricollegati, come ho già detto, con la tormolinolite. Del resto sarebbe strano che i ciottoli di selce fossero molto abbondanti nel verrucano; si deve ricordare che la selce è, in certo modo, un accessorio, e piuttosto scarso in generale, nei calcari che la contengono.

Della mancanza di ciottoli calcarei e di scisti di varicolori, ho già parlato; riguardo a quella, non assoluta, di ciottoli di diaspro, si può ricordare come non sia detto affatto che le rocce clastiche debbano contener ciottoli di tutte le rocce preesistenti della medesima regione; per cagioni svariate, e non sempre sicuramente identificabili, quelli di alcuni tipi di roccia, talora anzi di molti, possono mancare del tutto. Per convincersene, basta pensare che il macigno eocenico, di indubbia origine clastica, non contiene davvero ciottoli di tutte le rocce preterziarie delle zone nelle quali si trova.

(1) *Le rocce del verrucano nelle valli d'Asciano e d'Agnano nei Monti Pisani.* «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», 9, XII, Pisa, 1892.

(2) Op. cit., 12.

(3) Op. cit., 21.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare.* Nota II di L. TOSCANO, presentata [1] dal Socio S. PINCHERLE.

1. In questa Nota, come in altra precedente dallo stesso titolo [2], si studiano degli operatori R in relazione con l'operatore Q, definito nello spazio lineare (S) di elementi base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, linearmente indipendenti, con le posizioni

$$Q(\varepsilon_0) = 0 \quad , \quad Q(\varepsilon_1) = k_1 \varepsilon_0, \cdots, Q(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_{n-1}, \cdots$$

Gli operatori R sono definiti nella [1] dalla posizione

$$QR - \alpha RQ = 0,$$

con α radice primitiva dell'unità di indice m, e qui si costruiscono elementi invarianti per questi operatori.

2. Dalla [2] si sa che

$$\varphi_h = \sum \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} \varepsilon_n$$

è invariante di P e che

(1) $$P(\varphi_h) = a(h)\, \varphi_h$$

con

$$a(h) = \sum \frac{a_n h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n}.$$

Si ponga

(2) $$b_i = \sum_n \frac{a_{nm+i} h^{nm+1}}{k_1 k_2 \cdots k_{nm+i}}$$

(3) $$\varphi_i = \sum_n \frac{h^{nm+i}}{k_1 k_2 \cdots k_{nm+i}} \varepsilon_{nm+i}, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(2) Questi «Rendiconti», ser. 6ª, vol. XXI, fasc. 12, p. 795.

Questa prima Nota sarà in seguito richiamata con [1]; mentre le Note del PINCHERLE, *Sopra uno speciale operatore lineare* («Rend. R. Acc. Lincei», ser. 6ª, voll. XIII e XIV, 1931) saranno richiamate con [1], [2], [3].

da cui segue

$$a = b_0 + b_1 + \cdots + b_{m-1}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{m-1},$$

e quindi la (1) diventa

$$(4) \qquad P(\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{m-1}) =$$

$$= (b_0 + b_1 + \cdots + b_{m-1})(\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{m-1}).$$

Sostituendo poi la h delle b_i e φ_i successivamente con $\alpha h, \alpha^2 h, \cdots, \alpha^{m-1} h$, si ha con la (4) il sistema di relazioni

$$(5) \qquad P(\varphi_0 + \alpha^t \varphi_1 + \alpha^{2t} \varphi_2 + \cdots + \alpha^{(m-1)t} \varphi_{m-1}) =$$

$$= (b_0 + \alpha^t b_1 + \alpha^{2t} b_2 + \cdots + \alpha^{(m-1)t} b_{m-1})(\varphi_0 + \alpha^t \varphi_1 +$$

$$+ \alpha^{2t} \varphi_2 + \cdots + \alpha^{(m-1)t} \varphi_{m-1}) \qquad (t = 0, 1, 2, \cdots, m-1).$$

Questo sistema si può risolvere rispetto a

$$P\varphi_0, P\varphi_1, \cdots, P\varphi_{m-1},$$

e per tal fine si moltiplichino le m relazioni rispettivamente per

$$1, \quad \alpha^{(m-1)i}, \quad \alpha^{(m-2)i}, \cdots, \alpha^{[m-(m-1)]i},$$

e si sommino.

Al primo membro il coefficiente di $P\varphi_i$ è

$$1 + \alpha^{(k-i)} + \alpha^{2(k-i)} + \cdots + \alpha^{(m-1)(k-i)},$$

ovvero

$$1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{m-1},$$

con $\beta = \alpha^{k-i}$; e poichè α è radice dell'unità di indice m, lo è anche β, e quindi la somma precedente è sempre nulla, eccetto il caso $\beta = 1$, cioè $k = i$, in cui è uguale ad m.

Al secondo membro il coefficiente di $b_r \varphi_s$ è

$$1 + \alpha^{(r+s-i)} + \alpha^{2(r+s-i)} + \cdots + \alpha^{(m-1)(r+s-i)},$$

e come prima risulta sempre nullo, eccetto il caso $r + s \equiv i \pmod{m}$ in cui è eguale ad m.

Si trova allora

$$(6) \qquad mP\varphi_i = m(b_i \varphi_0 + b_{i-1} \varphi_1 + \cdots + b_0 \varphi_i + b_{m-1} \varphi_{i+1} +$$

$$+ b_{m-2} \varphi_{i+2} + \cdots + b_{i+1} \varphi_{m-1}) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1).$$

Applicando l'operatore $\frac{1}{m} I$ a queste relazioni si ha [1]

$$(7) \qquad R\varphi_i = b_i \varphi_0 + \alpha b_{i-1} \varphi_1 + \cdots + \alpha^i b_0 \varphi_i +$$

$$+ \alpha^{i+1} b_{m-1} \varphi_{i+1} + \cdots + \alpha^{m-1} b_{i+1} \varphi_{m-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1),$$

e si veda ora se una combinazione lineare delle $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}$, può essere invariante per R.

Posto

$$R(q_0 \varphi_0 + q_1 \varphi_1 + \cdots + q_{m-1} \varphi_{m-1}) = k(q_0 \varphi_0 + q_1 \varphi_1 + \cdots + q_{m-1} \varphi_{m-1}),$$

si ha

$$q_0 R\varphi_0 + q_1 R\varphi_1 + \cdots + q_{m-1} R\varphi_{m-1} = k(q_0 \varphi_0 + q_1 \varphi_1 + \cdots + q_{m-1} \varphi_{m-1}),$$

e, sostituendo nel primo membro di questa le espressioni (7), risulta il sistema

$$(8) \qquad \begin{cases} q_0 b_0 + q_1 b_1 + \cdots + q_{m-1} b_{m-1} = q_0 k \\ \alpha(q_0 b_{m-1} + q_1 b_0 + \cdots + q_{m-1} b_{m-2}) = q_1 k \\ \alpha^2(q_0 b_{m-2} + q_1 b_{m-1} + \cdots + q_{m-1} b_{m-3}) = q_2 k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha^{m-1}(q_0 b_1 + q_1 b_2 + \cdots + q_{m-1} b_0) = q_{m-1} k, \end{cases}$$

da cui

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} b_0 - k & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} \\ \alpha b_{m-1} & \alpha b_0 - k & \alpha b_1 & \cdots & \alpha b_{m-2} \\ \alpha^2 b_{m-2} & \alpha^2 b_{m-1} & \alpha^2 b_0 - k & \cdots & \alpha^2 b_{m-3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha^{m-1} b_1 & \alpha^{m-1} b_2 & \alpha^{m-1} b_3 & \cdots & \alpha^{m-1} b_0 - k \end{vmatrix} = 0.$$

Si è intanto dimostrato altrove [1] che questa equazione in k si riduce alla binomia

$$k^m = \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\cdots\Phi(\alpha_m),$$

essendo

$$\Phi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-2} + a_0 x^{m-1}$$

e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, radici dell'unità di indice m.

(1) L. Toscano, *Una equazione a matrice circolante.* In corso di stampa nel «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana».

Inoltre, posto

$$\Psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1},$$

si ha

$$\Psi(\alpha_i) = \alpha_i \Phi(\alpha_i),$$

da cui

$$\Psi(\alpha_1)\Psi(\alpha_2)\cdots\Psi(\alpha_m) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\cdots\Phi(\alpha_m),$$

cioè

$$\Psi(\alpha_1)\Psi(\alpha_2)\cdots\Psi(\alpha_m) = \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\cdots\Phi(\alpha_m),$$

perchè $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m = 1$.

Si può quindi dire in definitiva che l'equazione (9) si riduce alla binomia

$$k^m = \Psi(\alpha_1)\Psi(\alpha_2)\cdots\Psi(\alpha_m),$$

essendo

$$\Psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}$$

e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, radici dell'unità di indice m; quindi

$$k_i = \alpha_i \sqrt[m]{\Psi(\alpha_1)\Psi(\alpha_2)\cdots\Psi(\alpha_m)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Ciò fissato, dal sistema (8) è possibile determinare i rapporti

$$\frac{q_0}{q_{m-1}}, \frac{q_1}{q_{m-1}}, \cdots, \frac{q_{m-2}}{q_{m-1}},$$

e quindi gli m invarianti relativi ad uno stesso valore di h, con gli autovalori

$$k_1, k_2, \cdots, k_m.$$

3. Presenta interesse il caso in cui $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$ e quindi $a = b_0$. In questo caso si ha

$$R\varphi_i = \alpha^i b_0 \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1);$$

le φ_i sono gli elementi invarianti e $\alpha^i b_0$ i rispettivi autovalori.

Questi elementi invarianti risultano formati da φ_h come le funzioni

$$\frac{e^x + \alpha^{(m-1)i} e^{\alpha x} + \alpha^{(m-2)i} e^{\alpha^2 x} + \cdots + \alpha^i e^{\alpha^{m-1} x}}{m} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

lo sono dalla funzione esponenziale.

Geometria. — *Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points homologues, ont une paire de droites conjuguées communes.* Nota di L. Ermolaef, presentata [1] dal Socio G. Fubini.

M. S. Finikoff a examinée dans sa Note [2] les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points correspondants, ont les mêmes directrices de Wilczynski. Il a employé la méthode du tétraèdre mobile en attachant à chaque surface de cette couple le tétraèdre normal de M. Cartan. Je vais faire une extension de ce problème en appliquant une méthode plus générale.

Si le point M est situé sur la surface (M), on dit que deux droites sont conjuguées à la surface (M) au point M, si elles sont conjuguées à la quadrique de Darboux et que l'une d'elles passe par le point M, l'autre se trouve dans le plan tangent. Cherchons les paires des surfaces (M) et (N) dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points correspondants M et N ont une paire de droites conjuguées communes. Autrement dit, la droite joignant les points correspondants M et N de ces surfaces et la droite d'intersection des plans tangents correspondants sont conjuguées à la surface (M) au point M et simultanément au point N à la surface (N).

Attachons à chaque point M de la surface (M) un tétraèdre $M M_1 M_2 M_3$, dont les arêtes MM_1 et MM_2 sont tangents aux lignes asymptotiques de la surface (M), le sommet M_3 coïncide avec le point correspondant N de la surface (N) et le plant $M_1 M_2 M_3$ est tangent à la surface (N). Les coordonnées des sommèts de ce tétraèdre sont des fonctions des deux paramètres u et v et nous supposons que leur déterminant est égal à 1. Nous prenons pour les lignes parametriques $v = \text{const.}$ est $u = \text{const.}$ les lignes asymptotiques de la surface (M).

Les points dont les coordonnées sont les dérivées partielles des coordonnées du point M, que nous désignons, pour abréger l'écriture, $\frac{\partial M}{\partial u}$ et $\frac{\partial M}{\partial v}$, se trouvent respectivement sur les arêtes MM_1 et MM_2; les points

(1) Nella seduta del 16 giugno 1935.

(2) *Sur les couples de surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points correspondants, ont les mêmes directrices de Wilczynski.* «C. R. des s. de l'Ac. de Sc.», t. 197, s. du 23 oct. 1933.

$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}$ se trouvent dans le plan MM_1M_2 et les points $\frac{\partial M_3}{\partial u}$ et $\frac{\partial M_3}{\partial v}$ dans le plan $M_1M_2M_3$. Par conséquent, les coordonnées des sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ étant normalisées verifient les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial u} = aM + M_1 & \frac{\partial M}{\partial v} = bM + M_2 \\ \frac{\partial M_1}{\partial u} = a_1^0 M - aM_1 + \beta M_2 & \frac{\partial M_1}{\partial v} = b_1^0 M + (b + a_2^1) M_1 + b_1^2 M_2 + M_3 \\ \frac{\partial M_2}{\partial u} = a_2^0 M + a_2^1 M_1 + (a + b_1^2) M_2 + M_3 & \frac{\partial M_2}{\partial v} = b_2^0 M + \gamma M_0 - bM_2 \\ \frac{\partial M_3}{\partial u} = a_3^1 M_1 + a_3^2 M_2 - (a + b_1^2) M_3 & \frac{\partial M_3}{\partial v} = b_3^1 M_1 + b_3^2 M_2 - (b + a_2^1) M_3 \end{cases}$$

où β et γ sont les coefficients de la forme cubique de M. Fubini.

L'équation de la quadrique de Lie rapportée au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ est

$$\chi_1\chi_2 - \chi\chi_3 - a_2^1\chi_2\chi_3 - b_1^2\chi_1\chi_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2^1}{\partial u} + a_3^1 - a_2^0 - a_2^1 b_1^2\right)\chi_3^2 = 0$$

où $\chi, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ sont les coordonnées courantes de la quadrique. Les arêtes MM_3 et M_1M_2 étant conjuguées au point M, les coefficients b_1^2 et a_2^1 se réduisent à zéro.

Chaque système de solutions linéairement indépendantes du système (1) peut être pris comme coordonnées des sommets du tétraèdre. Donc les coefficients de ce système a_i^k et b_i^k déterminent le tétraèdre mobile à la transformation projective prés, si ils satisfont aux relations suivantes:

$$(2_1)\quad 2\frac{\partial a}{\partial v} = \beta\gamma - b_3^2 - b_1^0 \qquad 2\frac{\partial b}{\partial u} = \beta\gamma - a_3^1 - a_2^0$$

$$(2_2)\quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = 2\beta b + a_3^2 - a_1^0 \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 2\gamma a + b_3^1 - b_2^0$$

$$(2_3)\quad \frac{\partial a_3^1}{\partial v} - \frac{\partial b_3^1}{\partial u} = -2a_3^1 b - a_3^2\gamma \qquad \frac{\partial a_3^2}{\partial v} - \frac{\partial b_3^2}{\partial u} = 2b_3^2 a + b_3^1\beta$$

$$(2_4)\quad \frac{\partial a_1^0}{\partial v} - \frac{\partial b_1^0}{\partial u} = 2b_1^0 a - \beta b_2^0 \qquad \frac{\partial a_2^0}{\partial v} - \frac{\partial b_2^0}{\partial u} = -2a_2^0 b + \gamma a_1^0$$

$$(2_5)\quad b_3^1 a_1^0 - a_3^1 b_1^0 + b_3^2 a_2^0 - a_3^2 b_2^0 = 0$$

$$(2_6)\quad a_3^1 - b_3^2 = a_2^0 - b_1^0 .$$

Supposons maintenant que les lignes paramétriques $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ de la surface (N) sont asymptotiques. Les points $\frac{\partial^2 M_3}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 M_3}{\partial v^2}$ doivent être situés dans le plan $M_1 M_2 M_3$, ce qui entraîne les équations

$$a_3^1 a_1^0 + a_3^2 a_2^0 = 0 \qquad b_3^1 b_1^0 + b_3^2 b_2^0 = 0 . \tag{3}$$

Introduisons une fonction auxiliaire ν par les rélations

$$b_3^1 a_1^0 + b_3^2 a_2^0 = a_3^1 b_1^0 + a_3^2 b_2^0 = \nu . \tag{4}$$

Le déterminant

$$\delta = a_3^1 b_3^2 - a_3^2 b_3^1$$

est différent du zéro, à moins que la surface (M_3) ne dégénère en courbe.

Par conséquent, on peut réduire les équations (3) et (4) à la forme suivante

$$a_1^0 = -\lambda a_3^2 \qquad a_2^0 = \lambda a_3^1 \qquad b_1^0 = \lambda b_3^2 \qquad b_2^0 = -\lambda b_3^1 \tag{5}$$

où

$$\lambda = \frac{\nu}{\delta} .$$

Ce coefficient est différent du zéro, dans le cas contraire la surface (M_3) serait un plan. En effet, les coordonnées tangentielles $(M_1 M_2 M_3)$ du plan $M_1 M_2 M_3$ vérifieraient les équations

$$\frac{\partial}{\partial u}(M_1 M_2 M_3) = -a\,(M_1 M_2 M_3) \qquad \frac{\partial}{\partial v}(M_1 M_2 M_3) = -b\,(M_1 M_2 M_3).$$

On peut construire un tétraèdre asymptotique $NN_1 N_2 N_3$ attaché à la surface (N). Le pont N_3 coïncidant avec le point M, la droite $N_1 N_2$ coïncidant avec la droite $M_1 M_2$, le tétraèdre est complétement déterminé, et ses invariants projectifs, que nous désignons A_i^k, B_i^k, peuvent être exprimés par les invariants projectifs de la surface (M) a_i^k et b_i^k. En particulier on a

$$\begin{cases} A_2^1 = \frac{1}{\delta}\left(b_3^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial u} - b_3^1 \frac{\partial a_3^2}{\partial v}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \lambda}{\partial v} \\ B_1^2 = \frac{1}{\delta}\left(a_3^1 \frac{\partial a_3^2}{\partial v} - a_3^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial u}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \lambda}{\partial v} . \end{cases} \tag{6}$$

Or, pour que les droites $M_1 M_2$ et MM_3 soient conjuguées au point N de la surface (N), il faut poser

$$\lambda = \text{const.} \tag{7}$$

En revenant au système (2), on voit qu'on peut, en tenant compte des expressions (5), réduire l'équation (2_6) à la forme

$$(a_3^1 - b_3^2)(1 - \lambda) = 0 .$$

Il y a deux cas à distinguer :

A) les surfaces déterminées par l'équation

$$\lambda = 1 ; \tag{8}$$

B) les surfaces déterminées par l'équation

$$a_3^1 = b_3^2 . \tag{9}$$

Pour les surfaces de la première espèce les équations (5), en tenant compte de la relation (8), donnent

$$a_2^0 = a_3^1 \qquad b_1^0 = b_3^2 .$$

Ce sont les conditions qui fixent le point M_3 sur la quadrique de Lie. Donc la surface (M_3) est l'enveloppe des quadriques de Lie et on a une solution évidente de la problème énoncée : Les surfaces de l'espece A) sont telles que les asymptotiques de l'enveloppe des quadriques de Lie correspondent aux asymptotiques de la surface même. Ce sont les surfaces minimales-projectives de Thomsen [1].

Si l'on passe à l'étude des surfaces de l'espece B), on peut poser

$$a_3^1 = b_3^2 = s \tag{10}$$

et déterminer la fonction Σ par équations

$$a = \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} \qquad b = \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} . \tag{11}$$

Pour chaque surface de cette classe il existe une infinité de surfaces, qui satisfont aux conditions (3).

Ajoutons maintenant les relations

$$\frac{\partial a_3^2}{\partial v} = \frac{\partial b_3^1}{\partial u} = 0 ,$$

qui expriment que les droites MM_3 et $M_1 M_2$ sont conjuguées au point N de la surface (N).

(1) G. Thomsen, *Ueber eine liniengeometriche Behadlungsweire der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung.* « Abh. Math. Sem. Hamburg », 1926, B. 4, p. 232.

Si a_3^2 est different de zéro, on peut le réduire à l'unité par la transformation du paramètre u. De même, si b_3^1 est different de zéro, on peut le réduire à l'unité par la transformation du paramètre v.

Par conséquent, il y a trois cas à distinguer :

I. $a_3^2 = b_3^1 = 1$ II. $a_3^2 = b_3^1 = 0$ III. $a_3^2 = 0$ $b_3^1 = 1$.

Examinons le premier cas. La condition d'intégrabilité des équations (2_3)

$$\beta \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} = \gamma \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u}$$

conduit, en tenant compte des équations (2_2), à la rélation

$$\frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \gamma}{\partial u}.$$

Donc les surfaces (M) sont le surfaces R.

Déterminons la fonction α par les équations suivantes

$$(12) \qquad \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} = \alpha\gamma \qquad \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} = \alpha\beta.$$

Nous avons les conditions d'intégrabilité des ces équations et des équations (2_1)

$$(13) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u}\gamma + \alpha(1 + \lambda + 2\alpha\beta\gamma) = \frac{\partial \alpha}{\partial v}\beta + \alpha(1 + \lambda + 2\alpha\beta\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}(s - \lambda s + \beta\gamma).$$

Si la surface (M) est réglée, par exemple

$$\gamma = 0 \quad , \quad \beta \neq 0,$$

on peut déduire des équations (2) et (11), que les fonctions α, β, Σ et s dépendent du paramètre u seul. Donc les coordonnées de cette surface ont la forme

$$M_i^k = \sum_{r=0}^{r=3} U_i^{kr} e^{u_r v}$$

où U_i^{kr} et u_r dépendent du paramètre u seul.

Or, si γ et β sont différents du zéro, la condition d'intégrabilité des équations (13) est la suivante :

$$\left(\frac{1}{2}s + \alpha\right)(1 + \lambda)\left(\frac{\partial \frac{1}{\gamma}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{\beta}}{\partial u}\right) = 0.$$

La rélation

$$\frac{1}{2}s + \alpha = 0$$

réduit à la contradiction.

La rélation $\lambda = -1$ étant donnée, les équations (5) prennent la forme suivante :

$$a_1^0 = a_3^2 \qquad b_2^0 = b_3^1 .$$

Dans ce cas les droites conjuguées communes sont les deux directrices de Wilczynski. Les équations (2) donnent

$$\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u \partial v} - \beta\gamma = \frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u \partial v} - \beta\gamma = 0 .$$

Donc les asymptotiques de la surface (M) appartiennent à certains complexes linéaires [1].

Prenons maintenant la rélation

$$\frac{\partial \frac{1}{\gamma}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{1}{\beta}}{\partial u} = -\psi .$$

Les surfaces en sont déterminées par le système d'équations complètement intégrable

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \beta - 2\alpha\beta\psi - \frac{1+\lambda}{\gamma}(s + 2\psi) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \gamma - 2\alpha\gamma\psi - \frac{1+\lambda}{\beta}(s + 2\psi)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{1}{2}\beta - \frac{1+\lambda}{2\gamma}(s + 2\alpha) - 2\alpha^2\beta \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1+\lambda}{2\beta}(s + 2\alpha) - 2\alpha^2\gamma$$

$$\frac{\partial s}{\partial u} = -2s\alpha\beta - \beta \qquad \frac{\partial s}{\partial v} = -2s\alpha\gamma - \gamma$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \beta^2\psi \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} = 2\alpha\beta\gamma + 1 + \lambda$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 2\alpha\beta\gamma + 1 + \lambda \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \gamma^2\psi$$

$$\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} = \alpha\beta \qquad \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} = \alpha\gamma .$$

La solution générale de ce sistème dépend de 6 constantes arbitraire.

Dans le II^me^ cas les conditions

$$a_3^2 = b_3^1 = 0$$

(1) S. Finikoff, loc. cit.

réduisent le couple des surfaces (M) et (M_3) à un couple de Demoulin–Godeaux avec les mêmes quadriques de Lie. Les droites conjuguées communes sont les directrices de Wilczynski [1].

Dans le III^me^ cas les conditions

$$a_3^2 = 0 \qquad b_3^1 = 1$$

réduisent le système (2) à la forme

$$2\frac{\partial^2 \ln \Sigma}{\partial u\, \partial v} = \beta\gamma - (1+\lambda)s \qquad \frac{\partial s}{\partial v} = -2s\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial v} = 2\beta\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} \qquad \frac{\partial s}{\partial u} = -2s\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} - \beta$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 2\gamma\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} + 1 - \lambda$$

Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\beta\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial v} = 0.$$

Si β est égale à zéro, les surfaces (M) et (M_3) sont reglées. Les génératrices rectilignes se correspondent et se coupent au point M_1. On peut prendre la fonction s arbitrairement, γ sera défini par la résolution d'une équation linéaire au dérivés partielles.

Si $\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial u} = 0$, nous avons une solution du problème dépendante de trois fonctions arbitraires d'un paramètre.

(1) S. Finikoff, loc. cit.

Matematica. — *Sull'integrazione del sistema differenziale di Dirac.* Nota[1] di A. Tonolo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Relativamente al sistema differenziale di Dirac

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + i\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + i\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + K\varphi_1 = 0 \\ \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi_4}{\partial t} + i\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi_4}{\partial z} + K\varphi_2 = 0 \\ \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - i\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + K\varphi_3 = 0 \\ \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - i\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + K\varphi_4 = 0, \end{cases} \qquad (K \text{ costante}, \; i = \sqrt{-1})$$

dal puro aspetto matematico, io mi sono proposto di risolvere i due seguenti problemi:

Problema A): Dare le formule di rappresentazione degli integrali φ_i in tutto lo spazio e per qualunque valore del tempo, supponendo di conoscere ivi le funzioni φ_i per $t = 0$.

Problema B): Dare le formule di rappresentazione degli integrali φ_i nei punti interni di uno spazio S racchiuso da una superficie chiusa σ e per qualunque valore del tempo, supponendo di conoscere le funzioni φ_i in tutto lo spazio S per $t = 0$ e le stesse funzioni sopra la superficie σ per qualunque istante di tempo.

Il problema *A*) si può risolvere nel seguente modo: Le funzioni φ_i soddisfano in tutto lo spazio e per qualunque t all'equazione

$$(2)\qquad \Delta_2\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - K^2\varphi = 0,$$

la cui integrazione, dal punto di vista richiesto, è presto effettuata con la formula di Weber adoperata con opportune condizioni iniziali. Si osservi che, in forza del sistema (1), la conoscenza per $t = 0$ delle φ_i determina anche le $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ per $t = 0$. Posto allora

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1935.

$$(\varphi_i)_{t=0} = \varphi_i^{(0)} \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{\varphi}_i^{(0)},$$

$$F_i(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \frac{\varphi_i^{(0)}(Q)}{r}\, d\Sigma \quad , \quad \Phi_i(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \frac{\dot{\varphi}_i^{(0)}(Q)}{r}\, d\Sigma,$$

ove Σ è la superficie sferica di centro $P(x,y,z)$ e di raggio $r = t$, io dimostro che il problema *A*) è risolto con le formule

$$(3) \qquad \varphi_i(P,t) = \Phi_i(P,t) + \frac{\partial F_i(P,t)}{\partial t} - \frac{K^2 t}{2} F_i(P,t) - \\ - \int_0 \left[F_i(P,r)\frac{\partial}{\partial t} + \Phi_i(P,r)\right] \frac{\partial}{\partial r} I_0\left(iK\sqrt{t^2 - r^2}\right) dr,$$

ove $I_0(\rho_0)$ è la funzione di Bessel non oscillante di ordine zero e di argomento $\rho_0 = iK\sqrt{t^2 - r^2}$.

Molto più complessa è la risoluzione del problema *B*), perchè le formule [1] che dànno gli integrali dell'equazione (2) non mi sembrano adatte ad una trasformazione atta a presentare gli integrali φ_i sotto quella forma che esige il problema in discorso. Ho pensato pertanto, per conseguire lo scopo, di ripigliare *ab initio* l'integrazione dell'equazione (2) col metodo di Volterra. Con un accorto maneggio di questo processo, sono riuscito a provare che gli integrali φ_i nel punto $P(x,y,z)$ e all'istante t sono dati dalle formule

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{4\pi}{i}\varphi_1 + \frac{1}{i}\frac{\partial \psi_3}{\partial t} + i\frac{\partial \psi_4}{\partial x} + \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + i\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + K\psi_1 = 0 \\ \frac{4\pi}{i}\varphi_2 + \frac{1}{i}\frac{\partial \psi_4}{\partial t} + i\frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - i\frac{\partial \psi_4}{\partial z} + K\psi_2 = 0 \\ \frac{4\pi}{i}\varphi_3 + \frac{1}{i}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - i\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - i\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + K\psi_3 = 0 \\ \frac{4\pi}{i}\varphi_4 + \frac{1}{i}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} - i\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + K\psi_4 = 0, \end{cases}$$

(1) Cfr. J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* [Paris, Hermann Ed. (1932), Livre IV, n. 154]; A. TONOLO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate.* [« Rend. del Sem. mat. dell'Univ. di Padova » (1933), n. 1, 2].

dove:

$$
(5)\quad
\begin{cases}
\psi_1 = -K^2 \int_S \varphi_3^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + K^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^t \{\varphi_4(i\beta - \alpha) - \varphi_3 \gamma\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau - \\
\qquad - \int_\sigma \frac{[\varphi_4](i\beta - \alpha) - [\varphi_3]\gamma}{r} d\sigma \\
\psi_2 = -K^2 \int_S \varphi_4^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - K^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^t \{\varphi_3(\alpha + i\beta) - \varphi_4 \gamma\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau + \\
\qquad + \int_\sigma \frac{[\varphi_3](\alpha + i\beta) - [\varphi_4]\gamma}{r} d\sigma \\
\psi_3 = K^2 \int \varphi_1^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - K^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^t \{\varphi_2(i\beta - \alpha) - \varphi_1 \gamma\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau + \\
\qquad + \int_\sigma \frac{[\varphi_2](i\beta - \alpha) - [\varphi_1]\gamma}{r} d\sigma \\
\psi_4 = K^2 \int_S \varphi_2^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + K^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^t \{\varphi_1(\alpha + i\beta) - \varphi_2 \gamma\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau - \\
\qquad - \int_\sigma \frac{[\varphi_1](\alpha + i\beta) - [\varphi_2]\gamma}{r} d\sigma ,
\end{cases}
$$

nelle quali: $I_1(\rho)$ è la funzione di Bessel non oscillante di ordine uno e di argomento $\rho = iK\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}$; $[\varphi_i]$ è la funzione che si ricava dalla $\varphi_i(Q, t)$ ponendo $t - r$ al posto di t, denotando con r la distanza fra il punto interno P qualsiasi di S, ove vogliamo determinare l'integrale φ_i al tempo t, e un punto Q variabile sopra σ; α, β, γ sono i coseni direttori della normale nei punti di σ vôlta verso lo spazio S; e gli altri simboli $\rho_0, \varphi_i^{(0)}$ hanno il significato che abbiamo loro attribuito.

2. Le formule relative al caso $K = 0$ si possono dedurre, naturalmente, da quelle generali $K \neq 0$, e, come si vede, esse si semplificano notevolmente. Ma poichè per $K = 0$ la risoluzione dei problemi *A*) e *B*) si può compiere in modo diretto che ha il vantaggio sul metodo generale di una grande agilità, almeno per ciò che riguarda il problema *B*) (nel quale i dati per $t = 0$ relativi allo spazio S sono allora superflui) così ho ritenuto opportuno trattare in due lavori separati i casi $K = 0$, $K \neq 0$.

Per $K = 0$ gli integrali φ_i soddisfano all'equazione

$$\Delta_2\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 . \tag{6}$$

Il problema *A*) si risolve allora ricorrendo alla formula di Poisson adoperata con opportune condizioni iniziali che sono quelle esplicitamente dichiarate nel n. 1.

La risoluzione del problema *B*) viene offerta dalla formula del Kirchhoff perchè la forma del sistema (1) [fatto ivi $K = 0$] permette di dare alla derivata normale $\frac{d\varphi_i}{dn}$ (che figura in questa formula) una tale espressione per cui l'applicazione del teorema del gradiente e una giudiziosa trasformazione d'integrali conducono ad ottenere le φ_i dal sistema (4) [fatto ivi $K = 0$] ove, naturalmente, le ψ_i sono date dalle formule (5) per $K = 0$.

Avverto che, recentemente [1], il Théodoresco ha dato un metodo generale per risolvere il problema di Cauchy per una classe di sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali del prim'ordine, abilmente estendendo a questa classe il noto metodo di Hadamard per la risoluzione del problema di Cauchy relativo alle equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine del tipo iperbolico, e fatta un'applicazione del suo metodo all'integrazione del sistema (1) di Dirac.

(1) N. Théodoresco, *Le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Applications aux équations de Dirac.* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. IV (1935)].

Matematica. — *La cinematique du corps solide dans un espace euclidien à n dimensions.* Nota [1] di R. Woinaroskÿ, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Dans ce que suit, j'exposerai quelques résultats obtenus en étudiant le mouvement résultant de la composition de deux mouvements rigides généraux dans un espace euclidien à n dimensions.

C'est connu [2] que dans un espace à un nombre pair de dimensions le mouvement rigide le plus général présente un caractère de rotation instantanée, avec un point, le centre instantané de rotation, dont la vitesse est nulle. De même on voit immédiatement que le mouvement résultant de la composition de deux mouvements rigides istantanés, est lui aussi un mouvement rigide.

Dans la Note suivante je m'occupe de la relation qui existe entre les deux centres instantanés de rotation des mouvements composants et le centre instantané du mouvement résultant. Il va de soi que dans tout ce que suivra le nombre des dimensions de l'espace est pair.

2. Désignons par $\overline{\overline{a}}$ et $\overline{\overline{\alpha}}$ les systèmes de bivecteurs correspondants aux mouvements composants [3]. Si l'on prend pour centre d'un système d'axes orthogonaux le point O, centre de rotation instantanée dans le mouvement $(\overline{\overline{a}})$, et si l'on désigne par ξ_j les coordonnées du point Ω, centre de rotation instantanée dans le mouvement $(\overline{\overline{\alpha}})$, les coordonnées x_j du point π, centre de rotation instantanée dans le mouvement résultant, seront les solutions du système d'équations:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \alpha_{ij})\, x_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \xi_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

avec a_{ij} et α_{ij} composantes des systèmes de bivecteurs $\overline{\overline{a}}$ et $\overline{\overline{\alpha}}$.

Pour établir la relation dont il est question, je considère le point π comme le transformé du point Ω par l'intermède des relations (1) et je cherche les directions invariantes de cette transformation. Elles sont données par les solutions du système homogène:

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1935.

(2) L. Teodoriu, *Sur la cinématique du corps solide dans l'espace euclidien à n dimensions.* « Bulletin Mathematique de la Société Roumaine des Sciences », t. XXXV, 1933. Voir aussi: O. Onicescu, *Sur le deplacement affine.* « Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences », t. XXXIV, 1932; E. Cartan, *Géométrie des espaces de Riemann*, p. 19, 1928.

(3) Ibidem.

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} [(a_{ij} + \alpha_{ij})\lambda - \alpha_{ij}] x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Pour qu'il admette des solutions non nulles il faut que λ soit une racine de l'équation qu'on obtient en égalant à zero le détérminant des coefficients.

3. Étudions cette équation. On peut montrer qu'elle admet seulement des racines multiples d'ordre pair de multiplicité. En effet, les expressions $(a_{ij} + \alpha_{ij})\lambda - \alpha_{ij} = A_{ij}$ peuvent être considérées comme les composantes d'un système de bivecteurs correspondant à un mouvement rigide (A). Les directions invariantes de la transformation (1) sont formées par les points dont la vitesse est nulle dans le mouvement (A). Soit λ_0 une racine réelle de l'équation que nous étudions. Il lui correspond une droite (δ_1) dont les points ont une vitesse nulle dans ce mouvement auxiliaire.

Mais dans une Note antérieure [1] j'ai démontré un théorème à l'aide duquel on voit immédiatement que pour la même valeur λ_0 on a aussi une seconde droite (δ_2) – orthogonale à (δ_1) – dont les points ont des vitesses nulles. Prenons (δ_1) et (δ_2) comme axes Ox_1 et Ox_2. Nous aurons pour l'équation en λ l'expression suivante:

$$(3) \qquad (1+k)^2 \left(\lambda - \frac{1}{1+k}\right)^2 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ -\alpha_{13}(1+k)\left(\lambda - \frac{1}{1+k}\right) & -\alpha_{23}(1+k)\left(\lambda - \frac{1}{1+k}\right) & 0 & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{1n}(1+k)\left(\lambda - \frac{1}{1+k}\right) & -\alpha_{2n}(1+k)\left(\lambda - \frac{1}{1+k}\right) & -A_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et c'est visible maintenant que $\lambda_0 = \frac{1}{1+k}$ est une racine double. Mais λ_0 ne peut être une racine multiple d'ordre impair. En effet, si λ_0 est une racine multiple d'ordre supérieur au second elle doit être racine de l'équation

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_{34} & \cdots & A_{3n} \\ -A_{34} & 0 & \cdots & A_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{3n} & -A_{4n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(1) L. Teodoriu, loc. cit.

qui est analogue à (3). Il s'en suit que λ_0 est au moins multiple du second ordre pour cette équation. En continuant le raisonnement de la manière envisagée, on arrive à se convaincre que λ_0 ne peut être qu'une racine multiple d'ordre pair de multiplicité.

Le raisonnement que nous venons de faire et le théorème que nous avons employé étant valables pour une racine λ_0, respectivement un mouvement (A), complexes, il s'en suit que le résultat obtenu à propos d'une racine réelle subsiste quand il s'agit d'une racine complexe.

4. Désignons par λ_0 une racine réelle, multiple d'ordre $2s$ de multiplicité. On peut voir immédiatement qu'à cette racine correspondent $2s$ directions invariantes orthogonales. En effet, nous venons de voir qu'à une racine réelle λ_0 correspondent au moins 2 directions invariantes orthogonales (δ_1) et (δ_2). Si nous prenons ces directions pour axes de coordonnées l'équation en λ prend la forme (3) et λ_0 doit être une racine multiple d'ordre $2s-2$ pour l'équation (4). Mais cette équation résout, pour un espace (S_{n-2}) à $(n-2)$ dimension normal à (δ_1) et (δ_2), le même problème que (3) résout pour l'espace initial. Il s'en suit que nous aurons deux autres directions invariantes (δ_3) et (δ_4) orthogonales, comprises dans (S_{n-2}), avec lesquelles nous pourrons procéder comme nous avons procédé avec (δ_1) et (δ_2). En répétant le raisonnement nous arriverons à définir $2s$ vecteurs unitairs $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \cdots, \bar{\omega}_{2s}$.

Il resulte que si nous prenons pour centre instantané de rotation dans le mouvement $(\bar{\bar{\alpha}})$ le point Ω dont l'expression est:

$$\Omega = O + \alpha_1 \bar{\omega}_1 + \alpha_2 \bar{\omega}_2 + \cdots + \alpha_{2s} \bar{\omega}_{2s} \tag{5}$$

avec α_i constantes, le centre instantané de rotation du mouvement résultant aura pour expression:

$$\pi = O + \lambda_0 (\Omega - O). \tag{6}$$

5. Voyons ce que nous pouvons dire à propos d'une racine $\lambda_1 = \mu + i\nu$ complexe, multiple d'ordre $2r$.

Un raisonnement tout à fait analogue au précédent nous montrera que nous avons $2r$ directions invariantes dont les points P^j ont pour coordonnées les expressions:

$$\alpha(\xi_s^j + i\zeta_s^j) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \cdots, n \\ j = 1, 2, \cdots, 2r \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \xi_s^j, \zeta_s^j$ réels.

Mais l'équation en λ admet aussi $\lambda_1 = \mu - i\nu$ comme racine multiple d'ordre $2r$. Les directions invariantes correspondantes seront caractérisées par des points Q^j dont les coordonnées auront l'expression:

$$\beta(\xi_s^j - i\zeta_s^j).$$

Avec ces $4r$ directions complexes nous pouvons déterminer $4r$ directions réelles à l'aide de $4r$ vecteurs $\bar{u}^j$ et $\bar{v}^j$ de composantes

$$\bar{u}^j \{\xi_s^j\} \quad ; \quad \bar{v}^j \{\zeta_s^j\} \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \cdots, 2r \\ s = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Ces directions ne sont pas invariantes mais la variété à deux dimensions déterminée par deux vecteurs $\bar{u}^j$ et $\bar{v}^j$ reste invariante, de sorte que si l'on prend pour Ω l'expression:

$$\Omega = O + \sum_{j=1}^{2r} (a^j \bar{u}^j + b^j \bar{v}^j) \tag{7}$$

le point π a l'expression

$$\pi = O + \sum_{j=1}^{2r} \{ a^j (\mu \bar{u}^j - \nu \bar{v}^j) + b^j (\mu \bar{v}^j + \nu \bar{u}^j) \}. \tag{8}$$

6. Les égalitées (5), (6), (7), (8) contiennent la relation cherchée. En les réunissant nous pouvons conclure: quand on compose deux mouvements rigids dans un espace euclidienne à $n = 2p$ dimensions, il existent toujours n vecteurs distincts $\bar{\omega}_i^r$; $\bar{u}_i^s$; $\bar{v}_i^s$; $\bar{\omega}_\rho$; $\bar{u}_\sigma$; $\bar{v}_\sigma$, tels que si l'on prend pour Ω l'expression:

$$\Omega = O + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i \bar{\omega}_1^i + \beta_i \bar{\omega}_2^i) + \sum_{i=1}^{s} (a_1^i \bar{u}_1^i + b_1^i \bar{v}_1^i + a_2^i \bar{u}_2^i + b_2^i \bar{v}_2^i) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\rho} \gamma_j \bar{\omega}_j + \sum_{j=1}^{2\sigma} (c_j \bar{u}_j + d_j \bar{v}_j)$$

on obtient pour π:

$$\pi = O + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\alpha_i \bar{\omega}_1^i + \beta_i \bar{\omega}_2^i) + \sum_{i=1}^{s} \{ a_1^i (\mu_i \bar{u}_1^i - \nu_i \bar{v}_1^i) + \tag{10}$$

$$+ b_1^i (\mu_i \bar{v}_1^i + \nu_i \bar{u}_1^i) + a_2^i (\mu_i \bar{u}_2^i - \nu_i \bar{v}_2^i) + b_2^i (\mu_i \bar{v}_2^i + \nu_i \bar{u}_2^i) \} +$$

$$+ \lambda_o \sum_{j=1}^{2\rho} \gamma_j \bar{\omega}_j + \sum_{j=1}^{2\sigma} \{ c_j (\mu_o \bar{u}_j - \nu_o \bar{v}_j) + d_j (\mu_o \bar{v}_j + \nu_o \bar{u}_j) \}$$

avec $r + s + \rho + 2\sigma = p$, les deux premières sommes correspondant aux racines réelles et complexes d'ordre 2, les autres deux aux racines λ_o et $\mu_o + i\nu_o$ multiples respectivement d'ordre 2ρ et 2σ.

Pour $n = 2$ les (9) et (10) se reduisent au primier terme, avec $r = 1$, et constituent le théorème bien connu de König.

Matematica (Analisi). — *Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse.* Nota I [1] di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Rappresentate le terne di numeri bicomplessi (x, y, z) in un S_6 complesso, le funzioni bicomplesse $z(x, y)$, totalmente derivabili [2], o olomorfe secondo Scorza Dragoni [3], rispetto alle due variabili indipendenti bicomplesse x e y, dànno luogo a varietà a 4 dimensioni che diremo V_4 *caratteristiche* dell'S_6 complesso, in analogia alle *superficie caratteristiche* dell'S_4 complesso, immagini delle funzioni bicomplesse $y(x)$ di una variabile, totalmente derivabili [4].

In questa Nota dimostro che per una superficie analitica dell'S_6 complesso passa una V_4 caratteristica, e questa è unica, salvo casi eccezionali ben determinati. Un'analoga proprietà si ha per una *tela* analitica dell'S_6 complesso. Ne segue che fissata in un S_4 complesso una tela analitica T′ e una funzione bicomplessa $z^*(x, y) = z_1 v_1 + z_2 v_2$, con z_1 e z_2 funzioni complesse olomorfe del punto variabile su T′, esiste, nel caso generico, una ed una sola funzione bicomplessa $z(x, y)$, olomorfa secondo Scorza Dragoni, e definita in un intorno quadridimensionale di T′, che si riduca su T′ alla funzione $z^*(x, y)$ assegnata.

Se la tela T′ appartiene all'S_4' reale contenuto nell'S_4 complesso, essa è un'ordinaria superficie di questo S_4' reale. Se la $z^*(x, y)$ si assume, in particolare, complessa, anzichè bicomplessa, il teorema dà luogo ad un teorema di Levi-Civita, fondamentale per la teoria delle funzioni olomorfe di due variabili complesse [5].

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1935.

(2) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo* [« Rendic. della R. Accademia dei Lincei, vol. XXI (1935)].

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplessa.* [« Memorie R. Accademia d'Italia », vol. V, 1934, pp. 597-665].

(4) Queste superficie, che generalizzano le superficie caratteristiche dell'S_4' reale, sono studiate, da punti di vista differenti, nella Memoria di B. SEGRE, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse.* [« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Roma », 1930-31, parte II, « Memorie », pp. 59-107], e in un mio lavoro di prossima pubblicazione: *Sulla rappresentazione geometrica nell'S_4 complesso delle funzioni bicomplesse totalmente derivabili.* « Annali di Matematica ».

(5) T. LEVI-CIVITA, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse.* [« Atti della R. Accademia dei Lincei », ser. V, vol. XIV (1905), pp. 492-499].

Determinò pure in questa Nota la condizione necessaria e sufficiente a cui deve soddisfare una trivarietà W_3 dell'S_6 complesso perchè appartenga ad una V_4 caratteristica, ovvero perchè una funzione bicomplessa $z^*(x, y)$ di un punto variabile in un'assegnata trivarietà W_3' analitica dell'S_4 complesso sia traccia di una funzione bicomplessa $z(x, y)$ olomorfa secondo Scorza Dragoni, definita in un intorno quadridimensionale di W_3'. Si trova che la funzione assegnata $z^*(x, y)$ deve soddisfare ad una equazione differenziale che si ottiene eguagliando a zero un determinante jacobiano.

Se la W_3' appartiene all'S_4' reale essa è un'ordinaria varietà reale a tre dimensioni. Se inoltre la funzione $z^*(x, y)$ si assume, in particolare, complessa, anzichè bicomplessa, il teorema dà luogo ad un altro teorema fondamentale per la teoria delle funzioni olomorfe di due variabili complesse, dovuto al Severi. Si tratta precisamente del teorema per mezzo del quale il Severi ha risolto in modo completo e definitivo il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche [1].

Si osservi che anche in questa Nota, come in quella citata in [3] p. 1, uso le due unità bicomplesse v_1 e v_2 che mettono in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicomplessi.

1. Rappresentazione nell'S_6 complesso delle funzioni di due variabili bicomplesse. Le V_4 caratteristiche. – Sia (x, y, z) una terna di numeri bicomplessi dati da

$$(1) \qquad x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad , \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \quad , \quad z = z_1 v_1 + z_2 v_2 ,$$

essendo $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ numeri complessi e v_1, v_2 due unità dell'algebra dei numeri bicomplessi con la tabella di moltiplicazione

$$[1] \qquad v_1^2 = v_1 \quad , \quad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0 \quad , \quad v_2^2 = v_2 .$$

In corrispondenza alla terna (x, y, z) di numeri bicomplessi, consideriamo il punto $P(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ di un S_6 complesso in cui è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$. Il punto P si dirà immagine della terna (x, y, z).

Ciò posto consideriamo una funzione bicomplessa $z(x, y)$ delle due variabili bicomplesse indipendenti x e y, definita in un campo C dell'S_4 complesso, dove sono rappresentate, in modo complesso, le coppie di variabili bicomplesse (x, y). Una tale funzione è della forma

$$(2) \qquad z = z_1(x_1, x_2, y_1, y_2) v_1 + z_2(x_1, x_2, y_1, y_2) v_2 ,$$

essendo z_1 e z_2 funzioni complesse delle quattro variabili complesse x_1, x_2, y_1, y_2 definite nel suddetto campo C.

(1) F. Severi, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche.* [«Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», ser. VI, vol. XIII, 1931, pp. 795–804].

La funzione $\zeta(x, y)$ ammette in ogni punto di C la derivata caratteristica rispetto ad x (ad y) se in ogni punto di C ζ_1 e ζ_2 sono derivabili rispetto ad x_1, x_2 (y_1, y_2). Tale derivata è indipendente dal piano caratteristico in cui si deriva se ζ_1 è funzione della x_1 (y_1) e non di x_2 (y_2) e ζ_2 è funzione della x_2 (y_2) e non della x_1 (y_1). Cioè la ζ è totalmente derivabile rispetto ad x e rispetto ad y quando e solo quando è del tipo

$$\zeta = \zeta_1(x_1, y_1)\, v_1 + \zeta_2(x_2, y_2)\, v_2 \tag{3}$$

con ζ_1 (ζ_2) funzione olomorfa delle variabili complesse x_1, y_1 (x_2, y_2), nei loro campi di variabilità C_1 (C_2) in corrispondenza al campo C dell'S_4 complesso, descritto dal punto immagine della coppia (x, y). Se ζ è il valore bicomplesso assunto dalla funzione (3) nel *punto* (x, y) di C, e P è l'immagine della terna (x, y, ζ) dell'S_6 complesso, mentre (x, y) descrive C il punto P descriverà la V_4 dell'S_6 complesso di equazioni

$$\zeta_1 = \zeta_1(x_1, y_1) \quad , \quad \zeta_2 = \zeta_2(x_2, y_2), \tag{4}$$

che si dirà la V_4 *caratteristica* dell'S_6 complesso immagine della funzione totalmente derivabile, o olomorfa secondo Scorza Dragoni, $\zeta(x, y)$ delle due variabili bicomplesse indipendenti x e y.

Indichiamo con σ_1 e σ_2 i due spazi, a tre dimensioni, coordinati (x_1, y_1, ζ_1) e (x_2, y_2, ζ_2) dell'S_6 complesso e con σ' e σ'' i rispettivi piani impropri. Si osservi che proiettando il punto P $(x_1, x_2, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2)$ da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) si ottiene il punto $P_1(x_1, 0, y_1, 0, \zeta_1, 0)$ [$P_2(0, x_2, 0, y_2, 0, \zeta_2)$], sicchè le equazioni (4), che nell'S_6 complesso rappresentano la V_4 caratteristica immagine della funzione (3), separatamente rappresentano: la prima (la seconda) la proiezione della V_4 da σ'' (σ') sullo spazio coordinato σ_1 (σ_2). Queste proiezioni sono, pertanto, superficie.

Viceversa se una V_4 analitica dell'S_6 complesso è proiettata da σ'' e da σ', rispettivamente su σ_1 e σ_2, in una superficie, essa ha l'equazione del tipo (4) e quindi è immagine di una funzione totalmente derivabile, cioè è una V_4 caratteristica. Dunque:

I) *Le* V_4 *caratteristiche dell'*S_6 *complesso son tutte e sole le* V_4 *che son proiettate da* σ'' (σ') *su* σ_1 (σ_2) *in superficie analitiche.*

2. I DUE SISTEMI DI S_3 SEMINULLI. – È evidente che i punti di σ_1 (σ_2) rappresentano le terne di numeri bicomplessi (x, y, ζ) divisori dello zero del 2° (1°) sistema, perchè le equazioni di σ_1 (σ_2) sono $x_2 = y_2 = \zeta_2 = 0$ ($x_1 = y_1 = \zeta_1 = 0$). Per tal fatto gli S_3 paralleli ai due S_3 σ_1 e σ_2 si diranno *seminulli*; sichè gli S_3 seminulli sono quelli passanti per il piano σ' o per il piano σ''.

Una varietà dell'S_6 complesso si dirà seminulla se appartiene ad un S_3 seminullo.

Proiettando una V_4 caratteristica da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) si deve ottenere una superficie e quindi ogni S_3 proiettante (seminullo) un punto generico P di V_4 dovrà contenere una superficie di V_4 (superficie che sarà, pertanto, seminulla). Per un punto P di V_4 passano, quindi, due superficie seminulle e la V_4 caratteristica contiene due sistemi ∞^2 di superficie seminulle. Viceversa se una V_4 analitica dell'S_6 complesso contiene due sistemi ∞^2 di superficie seminulle sarà proiettata da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) in una superficie e quindi è caratteristica. Dunque:

I') *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una* V_4 *analitica dell'* S_6 *complesso sia caratteristica è che contenga due sistemi* ∞^2 *di superficie seminulle.*

3. Teorema fondamentale. – Consideriamo nell'S_6 complesso una superficie (o pezzo di superficie) analitica F e proiettiamola da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2). Otterremo una varietà che indicheremo con F_1 (F_2). Se F_1 (F_2) si riduce ad un punto P_1 (P_2) la superficie F apparterrà all'S_3 seminullo $P_1\,\sigma''$ ($P_2\,\sigma'$) e perciò sarà *seminulla*. Se F non è seminulla, F_1 (F_2) non può ridursi ad un punto. In questo caso, se F_1 (F_2) si riduce ad una curva f_1 (f_2), ogni S_3 seminullo $P_1\,\sigma''$ ($P_2\,\sigma'$), con P_1 (P_2) in f_1 (f_2), dovrà contenere una curva (seminulla) di F e quindi F contiene un sistema ∞^1 di curve seminulle. In tal caso la F si dirà *semicaratteristica*. Se in particolare F_1 e F_2 sono entrambe curve, la F conterrà due sistemi di curve seminulle e si dirà *caratteristica*.

Se F non è seminulla, nè semicaratteristica, F_1 e F_2 sono due superficie. In questo caso esiste una sola V_4 caratteristica che contiene la F, perchè esiste una sola V_4 analitica che è proiettata da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) nella superficie F_1 (F_2): essa è la V_4 costituita dai punti P dell'S_6 complesso le cui proiezioni P_1 e P_2 da σ'' e σ' su σ_1 e σ_2 cadono rispettivamente su F_1 e F_2. Se invece la F è seminulla o semicaratteristica, una, almeno, delle varietà F_1 e F_2 si ridurrà ad un punto o ad una curva; supponiamo, per es., che ciò si verifichi per F_1. In tal caso si conduca per F_1 una superficie analitica G_1 dello spazio σ_1. La V_4 caratteristica che è proiettata da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) nella superficie G_1 (F_2) contiene la superficie F. In questo caso, dunque, la F appartiene ad infinite V_4 caratteristiche. Si ha pertanto il teorema fondamentale:

II) *Per una superficie analitica dell'* S_6 *complesso, non seminulla nè semicaratteristica, passa una ed una sola* V_4 *caratteristica.*

Per una superficie analitica seminulla o semicaratteristica passano infinite V_4 *caratteristiche.*

4. Il teorema fondamentale per le tele dell'S_6 complesso. – Consideriamo nell'S_6 complesso una tela analitica T cioè una varietà complessa, a due dimensioni reali, definita parametricamente dalle funzioni

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(t,p) \quad , \quad y_1 = y_1(t,p) \quad , \quad z_1 = z_1(t,p) \\ x_2 = x_2(t,p) \quad , \quad y_2 = y_2(t,p) \quad , \quad z_2 = z_2(t,p) \end{cases}$$

olomorfe delle due variabili indipendenti *reali* t e p, definite nel rettangolo

$$(R) \qquad t' \leq t \leq t'' \quad , \quad p' \leq p \leq p'' .$$

Prolungando le funzioni (5) nel corpo complesso si ottengono le equazioni di una curva f o di una superficie F, secondo che la tela T è curvilinea o superficiale. Nel primo caso per la f, e quindi per la T, passano infinite V_4 caratteristiche. Nel secondo caso, se F è seminulla o semicaratteristica, per F, e quindi per T, passano infinite V_4 caratteristiche; in questo caso anche la tela superficiale T si dirà seminulla o semicaratteristica, rispettivamente. Se T non è seminulla nè semicaratteristica, per F, e quindi per T, passa una sola V_4 caratteristica. Dunque:

II') *Per una tela analitica dell'* S_6 *complesso non curvilinea, nè seminulla, nè semicaratteristica, passa una ed una sola* V_4 *caratteristica.*

Per una tela analitica curvilinea, o seminulla, o semicaratteristica, passano infinite V_4 *caratteristiche.*

5. Interpretazione del teorema fondamentale nell'S_4 complesso. – Consideriamo nell'S_4 complesso, dove sono rappresentate le coppie di variabili bicomplesse (x, y), una tela T' rappresentata parametricamente dalle funzioni

$$(5') \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(t,p) \quad , \quad y_1 = y_1(t,p) \\ x_2 = x_2(t,p) \quad , \quad y_2 = y_2(t,p) \end{cases}$$

olomorfe, delle variabili reali t e p definite nel rettangolo (R).

Sia inoltre $z^*(x, y)$ una funzione bicomplessa del punto variabile su T', che nel punto di T' rispondente ai valori t, p dei parametri, assuma il valore bicomplesso

$$(6) \qquad z^*(x,y) = z_1(t,p)\, v_1 + z_2(t,p)\, v_2 ,$$

essendo $z_1(t,p)$ e $z_2(t,p)$ funzioni complesse olomorfe delle variabili reali t e p, definite nello stesso rettangolo (R) in cui sono definite le funzioni complesse x_1, y_1, x_2, y_2.

In corrispondenza alle funzioni (5') e alle funzioni

$$(5'') \qquad z_1 = z_1(t,p) \quad , \quad z_2 = z_2(t,p)$$

resta determinata nell'S_6 complesso la tela T di equazioni (5), sicchè fissare nell'S_4 complesso una tela T' e una funzione bicomplessa $z^*(x, y)$ del punto variabile su T', equivale a fissare nell'S_6 complesso una tela T.

Ne segue che l'esistenza di una funzione bicomplessa, totalmente derivabile, definita in un intorno quadridimensionale di T' (dimensione complessa) che su T' si riduca alla funzione assegnata $z^*(x, y)$, equivale all'esistenza, nell'S_6 complesso, di una V_4 caratteristica passante per la tela T. Si ha pertanto il teorema:

III) *Fissata nell'S_4 complesso, dove sono rappresentate le coppie di variabili bicomplesse (x, y), una tela T' di equazioni (5') e una funzione bicomplessa*

$$z^*(x, y) = z_1(t, p)\, v_1 + z_2(t, p)\, v_2$$

con $z_1(t, p)$ e $z_2(t, p)$ funzioni complesse, olomorfe, delle variabili reali t, p, definite nel rettangolo (R), cioè una funzione bicomplessa del punto variabile su T', esiste sempre una funzione bicomplessa $z(x, y)$, totalmente derivabile, o olomorfa secondo Scorza Dragoni, *rispetto alle due variabili indipendenti x e y, definita in un intorno quadridimensionale (dimensione complessa) di T', che su T' si riduca alla funzione $z^*(x, y)$.*

La funzione $z(x, y)$ nel caso generico è unica: precisamente è unica se la tela dell'S_6 complesso determinata da T' e dalla funzione $z^*(x, y)$ non è curvilinea, nè seminulla, nè semicaratteristica. Se si presenta una di queste circostanze esistono infinite funzioni $z(x, y)$ che soddisfano alle condizioni imposte.

Si osservi che, nel caso generico, la superficie F, dell'S_6 complesso, determinata dalla tela T di equazioni (5), è rappresentata parametricamente dalle funzioni

$$[5] \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(r, q) \quad , \quad y_1 = y_1(r, q) \quad , \quad z_1 = z_1(r, q) \\ x_2 = x_2(r, q) \quad , \quad y_2 = y_2(r, q) \quad , \quad z_2 = z_2(r, q) \end{cases}$$

olomorfe, delle variabili complesse indipendenti r, q, ottenute prolungando nel corpo complesso le funzioni (5) determinanti la tela T. La proiezione F_1 (F_2) di F da σ'' (σ') su σ_1 (σ_2) è rappresentata in σ_1 (σ_2) dalle prime (seconde) tre funzioni [5], ovvero F_1 e F_2 (eliminando i parametri complessi r e q da dette equazioni) sono rappresentate da

$$(6') \qquad , \quad z_1 = z_1(x_1, y_1) \quad , \quad z_2 = z_2(x_2, y_2) .$$

Ne segue che la V_4 caratteristica passante per la superficie F, e quindi per la tela T, è l'immagine della funzione, totalmente derivabile,

$$(7) \qquad z(x, y) = z_1(x_1, y_1)\, v_1 + z_2(x_2, y_2)\, v_2 .$$

Si ha pertanto, a complemento del teorema III):

III') *Nell'ipotesi del teorema* III), *e nel caso generico, la funzione bicomplessa $z(x, y)$ totalmente derivabile, che soddisfa alle condizioni richieste, è data da*

$$z(x, y) = z_1(x_2, y_1)\, v_1 + z_2(x_2, y_2)\, v_2$$

essendo $z_1(x_1, y_1)\cdot(z_2(x_2, y_2))$ la funzione che si ottiene dalle prime (seconde) tre equazioni [5] *eliminando i parametri complessi r e q.*

Matematica. — *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine.* Nota [1] di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio F. Severi.

Nello stabilire, come applicazione di un suo criterio circa l'esistenza di un unico elemento unito in una trasformazione funzionale, un criterio di esistenza ed unicità per il problema dei valori ai limiti per l'equazione differenziale

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

Caccioppoli ha incidentalmente osservato che:

L'unicità dell'integrale, $y(x)$, della (1), verificante le condizioni

$$y(x_0) = y_0 , \; y(x_1) = y_1 , \tag{2}$$

è assicurata, se $f(x, y, y')$ è continua, insieme con le sue derivate $f'_y(x, y, y')$ ed $f'_{y'}(x, y, y')$, ed è non decrescente rispetto alla y [2];

mentre, senza fare alcuna ipotesi circa la derivabilità della f, io avevo già dimostrato che:

Lo stesso accade, se $f(x, y, y')$ è continua, non decrescente rispetto a y e monotona rispetto a y' [3].

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1935.

(2) R. Caccioppoli, *Problemi non lineari in analisi funzionale.* [« Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », ser. III, vol. I (1933), parte I, pp. 13–22], p. 20.

L'unicità in discorso si stabilisce, come mi ha comunicato Caccioppoli, osservando che la differenza, $v = y_2 - y_1$, di due integrali, y_1 e y_2, della (1) è soluzione di

$$v'' + p(x)\, v' + q(x)\, v = 0,$$

dove

$$p(x) = -f'_{y'}(x, y_1 + \vartheta v, y'_1 + \vartheta v') , \; q(x) = -f'_y(x, y_1 + \vartheta v, y'_1 + \vartheta v') \leq 0 \quad (0 < \vartheta < 1),$$

e quindi è identicamente nulla, se si annulla in due punti distinti.

(3) G. Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine.* [« Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 69 (1931)], n. 14.

Nelle ipotesi in discorso l'unicità di $y(x)$ è certa solo nell'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$.

Ora è facile riconoscere come la semplice non decrescenza rispetto alla y non sia affatto sufficiente a garentire l'unicità dell'integrale della (1) verificante le (2) [1].

Mette quindi forse conto far rilevare che:

La crescenza della $f(x, y, y')$ *rispetto ad* y *è, da sola, sufficiente perchè nell'intervallo* $x_0 \leq x \leq x_1$ *esista al più un integrale della* (1), *verificante le* (2).

Il criterio enunciato permette, come vedremo, di stabilire che:

Se

$$\varphi(x, y, y')$$

è continua e limitata nel cilindro

$$C: a \leq x \leq b \ , \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \ , \ -\infty < y' < +\infty \quad (y_1(x) \leq y_2(x))$$

e se l'equazione

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{3}$$

ha $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *come integrali in tutto* $a \leq x \leq b$, *essa ammette sempre una soluzione,* $y_0(x)$, *per la quale sia*

$$y_0(x_0) = y_0 \quad , \quad y_0(x_1) = y_1 \ , \tag{4}$$

se

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b \quad , \quad y_0(x_0) \leq y_0 \leq y_1(x_0) \quad , \quad y_0(x_1) \leq y_1 \leq y_1(x_1); \tag{5}$$

il quale risultato estende un altro mio teorema [2].

1. Dimostriamo dunque che:

Se

$$f(x, y, y')$$

(1) Infatti basta porre

$$f(x, y, 0) = 0 \ ; \ f(0, y, y') = 0;$$

$$f(x, y, y') = 0 \quad , \quad \text{se} \quad x < 0 \ , \ y' \leq 0;$$

$$f(x, y, y') = \frac{3y'}{x} \quad , \quad \text{se} \quad x < 0 \ , \ 0 < y' \leq -4x^3;$$

$$f(x, y, y') = -3x^2 \quad , \quad \text{se} \quad x < 0 \ , \ y' > -4x^3;$$

$$f(x, y, y') = f(-x, y, -y') \quad , \quad \text{se} \quad x > 0,$$

perchè la (1) abbia due integrali nulli per $y = \pm c$ (c = cost.), e precisamente

$$y = 0 \quad , \quad y = c^4 - x^4 .$$

Si noti che $f'_{y'}(x, y, y')$ è discontinua nei punti $(0, y, 0)$.

(2) G. Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine.* [«Mathematische Annalen», vol. 105 (1931), pp. 133-143], n. 6.

è continua e crescente rispetto a y *nello strato*

$$a \leqq x \leqq b \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < y' < +\infty$$

e se

$$y_0(x) \, , \, y_1(x)$$

sono due integrali della

$$y'' = f(x \, , \, y \, , \, y'),$$

definiti nell'intervallo

(I) $$x_0 \leqq x \leqq x_1 \qquad (a \leqq x_0 < x_1 \leqq b)$$

e verificanti le

$$y_0(x_0) = y_1(x_0) \quad , \quad y_0(x_1) = y_1(x_1),$$

allora è identicamente, in tutto (I),

(6) $$y_0(x) = y_1(x) \, .$$

Supponiamo infatti che così non sia.

E diciamo x' un punto (interno) di (I) tale che

$$y_0(x') \neq y_1(x')$$

anzi che

$$y_0(x') < y_1(x')$$

– cosa non essenzialmente restrittiva – e indichiamo con x'' il massimo fra i punti dell'intervallo $x_0 \leqq x \leqq x'$ in cui sia verificata la (6).

Allora nel segmento $x'' \leqq x \leqq x'$ esiste, evidentemente, un punto ξ tale che

$$y_1(\xi) > y_0(\xi) \quad , \quad y_1'(\xi) > y_0'(\xi);$$

e il teorema sarà dimostrato non appena avremo visto che a destra di ξ è

(7) $$y_1(x) - y_0(x) > y_1(\xi) - y_0(\xi) \, .$$

Per stabilire la (7) poi basta dimostrare che a destra di ξ è

$$y_1'(x) - y_0'(x) > 0 \, .$$

Indichiamo infatti con ξ_1 il primo (eventuale) punto dell'intervallo $\xi < x \leqq x_1$ tale che

(8) $$y_1'(\xi_1) - y_0'(\xi_1) = 0 \, .$$

Sarà allora

(9) $$y_1'(x) - y_0'(x) > 0 \, ,$$

se $\xi \leq x < \xi_1$; e quindi

$$y_1(\xi_1) - y_0(\xi_1) > y_1(\xi) - y_0(\xi) > 0;$$

cioè, per la (8) e la crescenza di $f(x, y, y')$ rispetto alla y,

$$y_1''(\xi_1) - y_0''(\xi_1) > 0,$$

relazione evidentemente incompatibile con la (8) e la (9).

2. Passiamo a dimostrare il secondo dei teoremi enunciati nell'introduzione.

A questo scopo, nello strato

$$a \leq x \leq b \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < y' < +\infty$$

poniamo

$$\varphi_1(x, y, y') = [1 + \operatorname{tgh}(y - y_1(x))] \cdot \varphi(x, y_1(x), y'),$$

$$\varphi_2(x, y, y') = [1 + \operatorname{tgh}(y - y_2(x))] \cdot \varphi(x, y_2(x), y')$$

e

$$\varphi_0(x, y, y') = \varphi(x, y, y')$$

in C,

$$\varphi_0(x, y, y') = \varphi_1(x, y, y'),$$

se $y < y_1(x)$,

$$\varphi_0(x, y, y') = \varphi_2(x, y, y'),$$

se $y > y_2(x)$.

Allora φ_1 e φ_2 sono continue e crescenti rispetto a y, di guisa che per le equazioni

$$y'' = \varphi_1(x, y, y') \quad , \quad y'' = \varphi_2(x, y, y')$$

vale il criterio di unicità del n. 1; mentre φ_0 è continua e limitata, di guisa che esiste un integrale,

$$y_0(x),$$

della

$$y'' = \varphi_0(x, y, y')$$

che verifichi le (4) [1].

Per dimostrare il teorema in discorso basta quindi far vedere che

$$y_1(x) \leq y_0(x) \leq y_2(x) \qquad (x_0 \leq x \leq x_1).$$

(1) Cfr. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* [« Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 6ª, vol. XI (1930), pp. 794-799], n. 2.

Supponiamo infatti che in $x'\,(x_0 < x' < x_1)$ sia

$$y_1(x') > y_0(x').$$

Allora – per le (5) – esistono anche due punti ξ_1 e ξ_2 dell'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$ tali che sia

$$y_1(x) > y_0(x)$$

se $\xi_1 < x < \xi_2$, e

$$y_1(\xi_1) = y_0(\xi_1) \quad , \quad y_1(\xi_2) = y_0(\xi_2);$$

di guisa che $y_1(x)$ e $y_0(x)$ sono, nell'intervallo $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, due integrali della $y'' = \varphi_1$ che assumono valori uguali agli estremi di questo intervallo, pur non coincidendo in tutto l'intervallo.

L'assurdo a cui siamo pervenuti mostra che

$$y_1(x) \leq y_0(x) \qquad (x_0 \leq x \leq x_1).$$

Allo stesso modo si ha anche che

$$y_0(x) \leq y_2(x);$$

e quindi $y_0(x)$ è un integrale delle (3) verificante le (4)[1].

(1) Per il ragionamento svolto, si confronti con quanto è detto nei nn. 24–27 della prima delle due mie Memorie citate.

Meccanica. — *Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza.* Nota di G. MATTIOLI, presentata[1] dal Socio C. SOMIGLIANA.

Nei precedenti lavori sul problema della turbolenza mi sono limitato a trattare questioni particolari, a una e a due dimensioni, per l'ovvia ragione che, prima di formulare l'espressione generale della teoria, era necessario di riconoscere direttamente in un sufficiente numero di casi semplici se il criterio adottato fosse, o no, sostenibile fisicamente. La conferma sperimentale sembra acquisita; perciò è il momento di passare alla considerazione del caso più generale: tredimensionale e non necessariamente stazionario.

Mi serviranno di base le idee espresse in una Nota recente[2]; anzi basterà formulare dinamicamente l'immagine ivi espressa del continuo turbolento (il continuo classico nel quale sono disseminati dei vortici elementari) per ottenere le equazioni generali dei mezzi turbolenti.

In questa Nota dò lo sviluppo formale della teoria nell'ipotesi *isotropa*, ammettendo cioè che tutte le direzioni per un punto siano equivalenti nei riguardi del trasporto turbolento. In una successiva Nota indicherò come le equazioni siano da modificare nel caso in cui certe direzioni si considerino privilegiate. L'applicazione della teoria nei suoi diversi aspetti formali agli stessi esempi elementari, convenientemente scelti, deciderà in seguito sulla sua formulazione definitiva; ciò che non è possibile fare attualmente rimanendo sul terreno puramente logico.

1. – Definizione del continuo turbolento.

Il meccanismo cinematico della turbolenza è essenzialmente discontinuo; in quanto consiste nel caotico mescolamento di masse fluide per elementi le cui dimensioni sono evidentemente *finite*. Per poter scrivere delle equazioni differenziali è anzitutto necessario sostituire uno schema continuo alla realtà fisica discontinua. L'osservazione che gli elementi materiali, che si separano continuamente dalla massa continua nell'agitazione turbolenta, sono bensì di dimensioni finite ma pur sempre piccole in relazione al campo del moto, ci fornisce immediatamente il criterio statistico da adottare: ogni

(1) Nella seduta del 31 maggio 1935.

(2) *Sulla dissipazione vorticosa nei regimi turbolenti.* Questi «Rendiconti», vol. XXI, 1935, p. 87.

grandezza meccanica Φ' che ha un valore determinato in ognuno di siffatti elementi – di cui supponiamo esista un numero abbastanza grande in ogni elemento di volume ΔS –, viene sostituita dalla grandezza Φ di eguali dimensioni, ma *continua* nella massa fluida, e che rappresenta, approssimativamente, la media di Φ' in ΔS.

Veniamo ora a definire il mezzo continuo turbolento. Per le ragioni che ho indicate nella Nota citata, e che appariranno più chiaramente necessarie nel seguito, un mezzo siffatto è da considerare *generalmente coerente* al modo del continuo classico; più precisamente: *un mezzo fluido turbolento è un sistema continuo, nel quale sono disseminati degli elementi fluidi da considerare individualizzati dalla massa, e come tali caratterizzati dalla loro quantità di moto e dal loro momento di quantità di moto* (esattamente definito nel seguito).

Questi elementi che, tanto per intenderci, chiameremo *vortici* o *girostati elementari*, sono le particelle fluide che, continuamente nel corso del tempo, si staccano dalla massa fluida per esserne riassorbite immediatamente dopo in una posizione leggermente spostata. Le modalità di questa disgregazione – statisticamente continua nei riguardi temporali e spaziali – e del conseguente mescolamento materiale, non occorre siano note; basterà ritenere che, globalmente, un processo siffatto richiama un trasporto di una qualunque grandezza meccanica attraverso ad ogni superficie condotta nel mezzo turbolento.

Le grandezze che definiscono un mezzo turbolento sono allora: *la densità della quantità di moto* $\rho \boldsymbol{v}$, dove ρ è la densità materiale e $\boldsymbol{v}$ la velocità locale da intendersi secondo il criterio statistico menzionato prima come velocità media in un intorno del punto considerato; e *la densità del momento di quantità di moto del sistema girostatico* $\rho\lambda^2\boldsymbol{\omega}$.

Definiamo quest'ultima quantità. Siano m_i, $\boldsymbol{\omega}_i$ la massa e la rotazione di un girostato elementare, e λ_i una lunghezza (analoga al raggio d'inerzia) tale che il corrispondente momento di quantità di moto nello spazio (istantaneamente mobile di moto traslatorio), in cui è nulla la quantità di moto del girostato, sia $m_i\lambda_i^2\boldsymbol{\omega}_i$. In virtù del criterio posto ammettiamo che la media

$$\frac{\Sigma m_i\lambda_i^2\boldsymbol{\omega}_i}{\Delta S}$$

estesa ad un elemento di volume ΔS sia sostituibile con una funzione continua che scriviamo $\rho\lambda^2\boldsymbol{\omega}$; la quale è appunto la grandezza che completa la definizione dinamica del continuo turbolento.

Nel caso di m_i, λ_i costanti, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ può [1] essere fatto uguale alla

(1) Si osservi che λ^2 e $\boldsymbol{\omega}$ sono definiti a meno di un fattore adimensionale, c e $\frac{1}{c}$ rispettivamente.

media dei vettori ω_i; e perciò rappresenterebbe la rotazione media dei girostati. Siccome questi nascono per disgregazione del fluido turbolento, è necessario assumere ogni ω_i uguale al valor medio, calcolato nella massa del girostato, della rotazione della velocità v del fluido continuo; cosicchè anche ω è a sua volta una media di tale rotazione. È perciò ovvio porre

$$\omega = \operatorname{rot} v, \tag{1}$$

e di ammettere vera tale relazione anche nel caso in cui m_i e λ_i variassero comunque, quale caratterizzazione sufficientemente esatta del legame tra i due vettori. Un eventuale fattore di proporzionalità è inessenziale per la presenza di λ.

2. – Sforzi interni equivalenti al trasporto turbolento.

È ben noto che il trasferimento nei due sensi attraverso una superficie di quantità di moto è formalmente sostituibile con una distribuzione di sforzi interni su quella superficie. Nei mezzi turbolenti interviene anche un'altra causa di sforzi siffatti: cioè il riassorbimento nella massa dei girostati elementari. Infatti, quando l'incremento per trasporto turbolento della quantità $\rho\lambda^2\,\omega$ differisce dall'incremento sostanziale $\rho\,\frac{d}{dt}\,\lambda^2\,\omega$, i girostati, nell'istante in cui si saldano nella massa continua, esercitano su questa un momento in media non nullo che, per unità di volume, indichiamo con $\mathbf{M}$. Sulla superficie di ogni elemento materiale ΔS del continuo si destano allora degli sforzi reattivi, conseguenti alla coerenza del mezzo, i quali, in quanto si considerano agire sul ΔS, sono solamente condizionati dall'avere un momento uguale a $-\mathbf{M}\Delta S$.

Ora è del tutto naturale ammettere che su tutti gli elementi superficiali per un punto P paralleli ad $\mathbf{M}$ lo sforzo reattivo sia puramente tangenziale, ortogonale ad $\mathbf{M}$ e costante in grandezza. Si riconosce immediatamente (basta assumere un asse coordinato parallelo alla determinazione locale di $\mathbf{M}$) che ciò equivale ad affermare l'*emisimmetria* del corrispondente tensore degli sforzi. Indichiamolo con $\sigma_{ij}\,(i,j = x,y,z)$ coordinate cartesiane ortogonali, e σ_{ij} denoti componente sull'asse j dello sforzo agente sulla faccia positiva ortogonale all'asse i; avremo

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0\,; \\ \sigma_{zy} = -\sigma_{yz} = \dfrac{M_x}{2} \quad ; \quad \sigma_{xz} = -\sigma_{zx} = \dfrac{M_y}{2} \quad ; \quad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \dfrac{M_z}{2}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Il tensore degli sforzi τ_{ij} equivalente al trasporto di quantità di moto è invece da assumersi *simmetrico*, in quanto il processo di mescolamento nei soli riguardi della quantità di moto non produce dei momenti di massa.

Aggiungendo alle espressioni degli sforzi direttamente provocati dal trasporto di quantità di moto [1] attraverso ogni superficie gli sforzi reattivi conseguenti alla coerenza del mezzo, ed osservando che, volendo considerare a parte la pressione p, si deve esigere

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0, \tag{3}$$

gli sforzi τ_{ij} sono univocamente determinati, anche per la condizione di covarianza, *nell'ipotesi dell'isotropia dell'agitazione turbolenta* (loc. cit.), dalle

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \rho(\varepsilon + \nu)\left[2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = \rho(\varepsilon + \nu)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \text{ ed analoghe.} \end{cases} \tag{4}$$

In queste espressioni definitive della componente simmetrica delle tensioni interne ho posto $\varepsilon + \nu$ invece di ε (coefficiente di trasporto turbolento), per tener conto dell'effetto di viscosità nella forma, additiva con quello di turbolenza, che ho già riconosciuto conforme alla realtà nel caso dell'efflusso nei tubi [2].

Il tensore degli sforzi complessivi è dunque $t_{ij} = \tau_{ij} + \sigma_{ij}$, ed è determinato dalle (2) e (4).

Introduciamo i tre vettori $\boldsymbol{t}_i$ $(i = x, y, z)$ che rappresentano, ciascuno, lo sforzo relativo all'elemento superficiale normale all'asse i (quindi le componenti di $\boldsymbol{t}_x$ sono: t_{xx}, t_{xy}, t_{xz} ecc.): si riconosce, sia in virtù delle formule di trasformazione delle t_{ij}, oppure al modo noto della dinamica del continuo, che sull'elemento superficiale di normale $\boldsymbol{n}$ (di coseni direttori α, β, γ) lo sforzo è rappresentato dal vettore

$$\boldsymbol{t} = \alpha \boldsymbol{t}_x + \beta \boldsymbol{t}_y + \gamma \boldsymbol{t}_z. \tag{5}$$

3. - Equazioni generali della turbolenza.

Applichiamo i teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto al continuo turbolento contenuto in una regione S limitata dalla superficie Σ sulla quale $\boldsymbol{n}$ denoti la normale esterna. Sia $\rho \mathbf{F}$ un'eventuale forza di massa applicata: avremo

$$\frac{d}{dt}\iiint_S \rho \boldsymbol{v} dS = \iiint_S \rho \mathbf{F} dS + \iint_\Sigma \boldsymbol{t} d\sigma - \iint_\Sigma p\boldsymbol{n} d\sigma, \tag{6}$$

(1) *Ricerche sulla meccanica dei moti turbolenti.* « Rend. Seminario Mat. di Padova », vol. IV, 1933, p. 67.

(3) Cfr. *Sopra l'influenza della viscosità* ecc. « Atti Acc. Torino », vol. 70, 1935, nonchè, per i dettagli numerici, un lavoro di prossima pubblicazione di F. Liceni in « L'Energia Elettrica ».

$$(7)\quad \frac{d}{dt}\iiint_S (P-O)\wedge \rho \boldsymbol{v}\,dS + \frac{d}{dt}\iiint_S \rho\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}\,dS = \iiint_S (P-O)\wedge \rho\mathbf{F}\,dS +$$

$$+\iint_\Sigma (P-O)\wedge \boldsymbol{t}\,d\sigma - \iint_\Sigma (P-O)\wedge p\boldsymbol{n}\,d\sigma + \iiint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{\partial x}\right)+\cdots\right] dS.$$

L'integrando dell'ultimo termine della (7) rappresenta l'incremento della quantità $\rho\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}$ nel parallelopipedo elementare in seguito all'agitazione turbolenta. Per il calcolo vedasi il lavoro precedentemente citato.

Trasformando gli integrali superficiali in integrali di volume tenuto conto della (5), ed osservando che per la conservazione della massa $\frac{d}{dt}\rho\,dS = 0$, dall'equazione (6) si ottiene

$$(8)\quad \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_z}{\partial z} - \operatorname{grad} p,$$

mentre in virtù anche di questa e per la simmetria di τ_{ij} la (7) diventa

$$(9)\quad \rho\frac{d\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{\partial z}\right) - \mathbf{M}.$$

Occorre ora definire il vettore $\mathbf{M}$ e la quantità λ.

Plausibili circostanze di additività del contributo ad $\mathbf{M}$ dei girostati elementari di dimensioni diverse, consigliano di porre $\lambda = \textit{costante}$ – per ogni particolare problema – (cfr. *Ricerche* ecc.). Resta perciò da considerare $\mathbf{M}$.

Come ho indicato in un lavoro precedente (*Sulla dissipazione* ecc., l. c.), si devono ammettere due regimi turbolenti diversi, secondo che l'agitazione turbolenta è determinata da pareti rigide (*turbolenza d'attrito o di parete*), oppure avviene in ambiente indefinito (*turbolenza libera*); e che in questo secondo caso è da porre $\mathbf{M} = 0$. Nel caso di turbolenza d'attrito $-\mathbf{M}$ è il momento di massa che dissipa il vortice (o parte) prodotto alla parete (Nota citata). Plausibilmente $-\mathbf{M}$ è legato alla variabilità spaziale del vortice $\boldsymbol{\omega}$; e secondo questo criterio nei casi particolari finora trattati (tubi, canali, deflusso su parete piana) ho fatto una posizione che si è dimostrata assai bene conforme alla realtà. Per passare al caso generale potrà, forse, bastare di generalizzarla opportunamente.

La direzione ortogonale alla parete è, sensibilmente, quella di massima rapidità di variazione di $\boldsymbol{\omega}$; e siccome l'accennato criterio di dipendenza di M da $\boldsymbol{\omega}$ conduce a porre $\mathbf{M}$ uguale ad un'espressione lineare delle derivate spaziali di $\boldsymbol{\omega}$, *è plausibile che la derivata normale alla parete di* $\boldsymbol{\omega}$ *sia, in questi riguardi, privilegiata.* Poniamo pertanto

$$(10)\quad -\mathbf{M} = \lambda^2\left[\psi_x\frac{\partial\rho\boldsymbol{\omega}}{\partial x} + \psi_y\frac{\partial\rho\boldsymbol{\omega}}{\partial y} + \psi_z\frac{\partial\rho\boldsymbol{\omega}}{\partial z}\right]$$

dove $\boldsymbol{\psi}(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ è un vettore (il *vettore di turbolenza d'attrito* già introdotto in *Ricerche* ecc., allora senza ulteriori specificazioni) ortogonale alla parete diretto verso il campo del moto e, su ogni normale alla parete, di modulo costante. Quest'ultima condizione è suggerita da un criterio di equivalenza alla parete delle superficie ad essa parallele (secondo la congruenza delle normali).

Sia t_0 il modulo dello sforzo tangenziale alla parete, e definiamo la *velocità d'attrito* $v^* = \sqrt{\frac{t_0}{\rho}}$.

Indicando con ψ il modulo di $\boldsymbol{\psi}$, sui punti della parete è da porre inoltre

$$\psi = \chi v^*$$

con χ (le cui determinazioni oscillano tra 0.4 e 0.44 circa) *costante universale di turbolenza d'attrito*. Questa determinazione, per quanto sopra, si conserva sulle normali alla parete in tutta la regione dove il regime turbolento è d'attrito.

In conclusione le equazioni generali della turbolenza sono:

$$(11)\quad \rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x},$$

e due analoghe;

$$(12)\qquad \rho \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) - \frac{M_x}{\lambda^2},$$

e due altre per le rimanenti componenti η, ζ del vortice $\boldsymbol{\omega}$; dove M_x, M_y, M_z sono date dalle posizioni (10) e le τ_{ij} dalle (4). Sono naturalmente da aggiungere le equazioni di continuità e di stato

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0 \quad , \quad f(\rho, p, T) = 0;$$

e, ripeto, è da porre invece $M = 0$ nel caso di turbolenza libera.

Resterebbero ora da precisare le condizioni sotto le quali questo sistema differenziale deve integrarsi. Ciò formerà oggetto di un prossimo lavoro.

Voglio infine menzionare come la considerazione di sforzi interni asimmetrici nella meccanica del continuo sia già stata proposta in relazione ad altri problemi. Vedasi, in particolare, una Nota di Somigliana [1] dove sono posti i fondamenti di questa generalizzazione del criterio classico nell'àmbito della teoria dell'elasticità. Circostanze analoghe si presentano pure nella teoria dell'elettricità in riguardo alla definizione delle tensioni maxwelliane [2].

(1) *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Questi «Rendiconti», vol. XIX, 1910, p. 43.

(2) Cfr. LIVENS, *The Theory of Electricity*, p. 593.

Meccanica. — *Ancora sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria.* Nota [1] di D. Graffi, presentata dal Corrisp. P. Burgatti.

1. In una Nota precedente [2] abbiamo visto come una caduta di corpuscoli su un pianeta (o su una cometa periodica) intorno al suo perielio possa dar luogo a sensibili variazioni di eccentricità nell'orbita del pianeta stesso. Avevamo però supposto costante la massa del sole, la massa del pianeta [3] variabile solo per caduta dei corpuscoli, e ammesso nulla la somma delle quantità di moto (riferite al sole) dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul nostro pianeta.

Ci proponiamo in questa Nota, conservando ancora l'ipotesi della costanza della massa del sole, di togliere le due ultime ipotesi sovraccennate sostituendole con altre meno restrittive. Ammetteremo anzitutto che la massa del pianeta possa bensì aumentare per caduta di corpuscoli, ma possa anche diminuire per emissione di materia da parte del pianeta stesso, il che probabilmente si verifica nel caso delle comete. Supporremo però una specie di simmetria dell'emissione di materia, o, più precisamente, supporremo nulla la somma delle quantità di moto riferita al pianeta dei corpuscoli emessi dal pianeta stesso nel tempo dt. Questa ipotesi fatta del resto anche dal Levi-Civita [4] nelle sue ricerche sul problema delle masse variabili permette di ridurre facilmente in equazione il nostro problema.

Quanto alla somma delle quantità di moto dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul pianeta noi la supporremo non nulla, però ammetteremo, seguendo anche qui in sostanza il Levi-Civita, i corpuscoli in una regione abbastanza grande rispetto alle dimensioni del pianeta distribuiti in modo uniforme, e il numero di essi che in un certo volume e in un certo istante hanno massa e velocità compresa fra μ e $\mu + d\mu$ e fra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$ dipenda solo da μ e mod $\boldsymbol{u}$. Però siccome i nostri corpuscoli li supporremo appartenenti al sistema solare ammetteremo queste velocità riferite al sole e non

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1935.

(2) « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XXI, fasc. 6°, p. 438, 1935.

(3) In seguito indicheremo per brevità, col nome pianeta anche una cometa periodica.

(4) Levi-Civita, *Sul moto di un corpo di massa variabile.* « Rendiconti Accademia dei Lincei », 2° sem., 1928, pp. 329 e 621; 1° sem., 1930, p. 626. Vedi anche la Nota dello stesso Autore: *Pulviscolo cosmico e distribuzione maxwelliana.* « Atti della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei », anno LXXXIII, 1930.

al sistema assoluto della meccanica classica come le considera il Levi-Civita. Del resto con questa intesa i risultati da Lui conseguiti valgono anche nel nostro caso e segue subito che detta somma di quantità di moto è nulla per i corpuscoli che eventualmente cadono sul sole (come ci si convince facilmente per ragioni di simmetria) mentre per quelli che cadono sul pianeta essa è uguale a un vettore parallelo e diretto in senso opposto alla velocità del pianeta stesso [1].

Noi vedremo dunque in questo lavoro come, sia con l'ipotesi dell'emissione di materia da parte del pianeta sia con il tener conto della somma delle quantità di moto dei corpuscoli, s'intende nelle condizioni sopra precisate, si vengono ad (almeno entro certi limiti [2]) ottenere valori più elevati per le variazioni di eccentricità constatate nella Nota precedente; perciò le semplici formule ottenute in detta Nota costituiscono un limite inferiore per le variazioni di eccentricità dovute a caduta di corpuscoli su un pianeta quando passa al perielio, e possono così avere qualche interesse per verifiche di carattere cosmogonico.

Noteremo prima di sviluppare i calcoli, che può sembrare paradossale il fatto di una diminuzione di massa per emissione di materia, che aumenta, sia pure entro certi limiti, gli effetti di una caduta di corpuscoli sul pianeta. Il paradosso si può però togliere pensando che l'effetto di una caduta di corpuscoli è, come ha mostrato fin dal 1891 [3] il Seelinger, entro certi limiti equivalente ad applicare ad esso una forza di tipo resistente ed allora si capisce che l'effetto di questa forza sarà tanto più grande quanto più piccola è la massa del corpo a cui la si applica, e sarà perciò favorito da una emissione di materia.

Consideriamo al solito un sistema di due corpi di cui uno sia il sole e l'altro un pianeta. Indichiamo con P, S, m, M, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ rispettivamente i baricentri, le masse e le velocità dei pianeti e del sole, intendendo ora

(1) Questi risultati sono conseguiti particolarmente nel paragrafo 7 della Nota alla Accademia Pontificia già citata. La trattazione è basata su considerazioni dovute al FERMI e esposte nella Nota: *Sul moto di un corpo di massa variabile.* « Rendiconti Accademia dei Lincei », 1929, p. 984. Si osservi che nei suoi lavori il Levi-Civita ha mostrato che la somma delle quantità di moto dei corpuscoli si può trascurare (nella ipotesi di una distribuzione maxwelliana delle masse e delle velocità dei corpuscoli) quando è trascurabile rispetto all'unità il quadrato del rapporto fra la velocità media dei corpuscoli e la velocità del pianeta. È difficile però dire se questa condizione è verificata nel nostro caso perciò l'opportunità della nostra ricerca. Si noti infine che qui per velocità del pianeta si intende velocità del pianeta riferita al sole.

(2) Cioè come si vedrà in seguito fino a che la massa del pianeta resta trascurabile rispetto a quella del sole.

(3) SEELINGER, « Abhundlungen zu Münchener Akademie », *17*, 1891. Recentemente il prof. BURGATTI (« Atti Accademia », Bologna, 1935) ha mostrato il teorema inverso e cioè che gli effetti di una forza di tipo resistente nel problema dei due corpi si possono ricondurre a quelli di una variazione di massa.

velocità riferite al solito sistema assoluto della meccanica classica [1] Siano poi $\Sigma\mu_1 \boldsymbol{w}_1$, $\Sigma\mu_2 \boldsymbol{w}_2$, $\Sigma\mu_1' \boldsymbol{w}_1'$, $\Sigma\mu_2' \boldsymbol{w}_2'$ le somme delle quantità di moto dei corpuscoli che cadono o che sono emessi nel tempo dt rispettivamente dal sole e dal pianeta [2], quantità di moto riferite esse pure al sistema assoluto. Avremo subito in base ai resultati del Levi-Civita:

$$(1) \qquad \frac{d(m\mathbf{V}_1)}{dt} - \frac{\Sigma\mu_1 \boldsymbol{w}_1}{dt} + \frac{\Sigma\mu_1' \boldsymbol{w}_1'}{dt} = -k\frac{\mathrm{M}m}{r^3}(\mathrm{P}-\mathrm{S})$$

$$(2) \qquad \frac{d(\mathrm{M}\mathbf{V}_2)}{dt} - \frac{\Sigma\mu_2 \boldsymbol{w}_2}{dt} + \frac{\Sigma\mu_2' \boldsymbol{w}_2'}{dt} = k\frac{\mathrm{M}m}{r^3}(\mathrm{P}-\mathrm{S})$$

dove k è la costante di gravitazione e r la distanza fra P e S.

Osserviamo però che avendo supposto nulla la quantità di moto riferita al pianeta dei corpuscoli da esso emessi nel tempo dt (e analoga ipotesi potremo fare per il sole), abbiamo subito:

$$(3) \qquad \Sigma\mu_1' \boldsymbol{w}_1' = \Sigma\mu_1' \mathbf{V}_1 \qquad \Sigma\mu_2' \boldsymbol{w}_2' = \Sigma\mu_2' \mathbf{V}_2$$

dove evidentemente $\Sigma\mu_1'$ e $\Sigma\mu_2'$ sono le quantità di materia emesse nel tempo dt dal pianeta e dal sole.

Di più essendo per quanto si disse nulla la somma delle quantità di moto riferite al sole dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul sole stesso, e l'analoga somma per il pianeta parallela alla velocità $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ (che d'ora innanzi indicheremo con $\mathbf{V}$) avremo le relazioni:

$$(4) \qquad \Sigma\mu_1 (\boldsymbol{w}_1 - \mathbf{V}_2) = -\lambda\mathbf{V} \qquad \Sigma\mu_2 (\boldsymbol{w}_2 - \mathbf{V}_2) = 0$$

dove λ è un opportuno coefficiente positivo. Allora dividendo la (1) per m la (2) per M, sottraendo membro a membro, tenendo presente le (3) e (4) e ricordando che $dm = \Sigma\mu_1 - \Sigma\mu_1'$, $d\mathrm{M} = \Sigma\mu_2 - \Sigma\mu_2'$ abbiamo (si è indicato con $\Sigma\mu_1$, $\Sigma\mu_2$ rispettivamente la somma delle masse dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul pianeta e sul sole):

$$(5) \qquad \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nu\mathbf{V} = -k\frac{\mathrm{M}+m}{r^3}(\mathrm{P}-\mathrm{S})$$

dove

$$(6) \qquad \nu = \frac{\Sigma\mu_1 + \lambda}{m\,dt}.$$

(1) Notiamo che nello stabilire equazioni del moto supponiamo anche variabile la massa del sole. Ciò è fatto per generalità in vista di ricerche future. Però quando studieremo le variazioni di eccentricità supporremo M costante.

(2) S'intende sempre la quantità di moto immediatamente prima della caduta per i corpuscoli che cadono sul pianeta, immediatamente dopo l'emissione per i corpuscoli emessi.

Ora la (5) si può anche scrivere:

$$(7) \qquad e^{-\int_0^t \nu\,dt}\,\frac{d\left(e^{\int_0^t \nu\,dt}\,\mathrm{V}\right)}{dt} = -k\,\frac{(\mathrm{M}+m)}{r^3}\,(\mathrm{P}-\mathrm{S}).$$

Ricordando che $\mathrm{V} = \frac{d\,(\mathrm{P}-\mathrm{S})}{dt}$ e facendo la sostituzione che abbiamo già indicato in altro lavoro [1]:

$$(8) \qquad \tau = \int_0^t e^{-\int_0^t \nu\,dt}\,dt$$

si ha:

$$(9) \qquad \frac{d^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{S})}{d\tau^2} = -k\,\frac{(\mathrm{M}+m)}{r^3}\,e^{2\int_0^t \nu\,dt}\,(\mathrm{P}-\mathrm{S}).$$

Ora pensando il coefficiente di $\frac{\mathrm{P}-\mathrm{S}}{r^3}$ a secondo membro di questa equazione funzione di τ, essa diventa identica alla equazione ordinaria del problema dei due corpi di massa variabile. Allora procedendo come nella Nota già citata si trova:

$$(10) \qquad \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = (1+\varepsilon_0)\left(1 - e^{-2\int_0^{t_1} \nu\,dt}\,\frac{\mathrm{M}+m_0}{\mathrm{M}+m_1}\right),$$

essendo ε_0, ε_1, m_0, m_1 rispettivamente le eccentricità e le masse del pianeta agli istanti t_0 e t_1. Naturalmente si suppone come nella Nota precedente che le masse varino solo al perielio [2].

(1) « Atti Accademia di Torino », 1933. In esso è mostrato che anche t è funzione univoca di τ.

(2) Si noterà che, pure ammettendo i corpuscoli cadano sul nostro pianeta al perielio, non è detto che la emissione di materia avvenga solo al perielio. Ma è facile mostrare che ammettendo una emissione di materia anche negli altri punti dell'orbita i resultati sovra ottenuti non vengono sensibilmente alterati. Ciò si dimostra osservando che negli istanti in cui non cadono corpuscoli $\nu = 0$ e perciò come scende facilmente da resultati della Nota precedente la legge con cui varia l'eccentricità è data da:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\frac{d\,(\mathrm{M}+m)}{dt}}{\mathrm{M}+m}\,\frac{(1-\varepsilon^2)\cos u}{1-\varepsilon\cos u}$$

e questa espressione integrata da 0 a t_1 esclusi gli istanti in cui cadono corpuscoli è il termine da aggiungersi a secondo membro (10). Ora si vede subito ricordando che $\frac{d\,(\mathrm{M}+m)}{dt}$ è per le nostre ipotesi negativa o al più nulla, che questo integrale il cui va-

Ora poichè m e m_0 sono sempre molto piccole rispetto a M la (10) si riduce subito con ottima approssimazione a

$$(10) \qquad \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_0)\left(1 - e^{-2\int_0^t \nu\, dt}\right),$$

il che dimostra che $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$ cresce a parità di ε_0 al crescere di ν. Ma allora per la (6) le variazioni di eccentricità sono (a parità di $\Sigma\mu_1$) tanto più gravi quanto più grande è λ e quanto più piccola è m, cioè esse aumentano tenendo conto delle quantità di moto dei corpuscoli che nel tempo dt cadono sul pianeta e dall'emissione di materia da parte del pianeta stesso. Ciò dimostra senz'altro quanto abbiamo asserito.

Notiamo infine che abbiamo supposto una caduta di corpuscoli sul pianeta intorno al suo perielio. Sarebbe però molto facile dimostrare che analoghi resultati si sarebbero ottenuti se intorno all'afelio si avesse una caduta di corpuscoli sul nostro pianeta.

lore assoluto indicheremo con I vale al massimo (si noti che ora si suppone m variabile in $(0, t_1)$ solo per emissione di materia):

$$\mathrm{I} = -\int_0^{t_1} (1 + \varepsilon)\,\frac{\frac{d(\mathrm{M} + m)}{dt}}{\mathrm{M} + m}\, dt \leq 2 \log \frac{\mathrm{M} + m_0}{\mathrm{M} + m_1'}$$

dove con m_1' si è indicata la massa del pianeta all'istante t_1 se essa fosse variata solo per emissione di materia. Ora essendo in pratica m_0 e m_1' molto piccole rispetto a M ne resulta I trascurabile. c. d. d.

Meccanica. — *Sul paradosso di Dubuat.* Nota[1] di N. W. Akimoff, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sia R la resistenza che incontra una piastra, rimorchiata ad una certa velocità in acqua tranquilla; sia, dall'altra parte, R_1 la resistenza che oppone la stessa piastra, mantenuta immobile, ad una corrente di acqua, animata (a sufficiente distanza dalla piastra) dalla velocità con cui prima veniva rimorchiata la piastra. Si ha la relazione $R_1/R = 1,3$, circa.

Questo è il paradosso di Dubuat-Duchemin. Proponiamoci di esaminare se o meno il fenomeno è veramente paradossale, nonchè di passare in rassegna le spiegazioni finora proposte.

Nel suo libro *Résistance des Fluides* H. Bouasse dice (p. 31):

« I due problemi: il movimento uniforme di traslazione di un corpo in un fluido di estensione illimitata, supposto in riposo iniziale; ed il movimento uniforme di traslazione di un fluido, servendo il corpo da ostacolo fisso e modificante il movimento del fluido nella vicinanza di esso, non sono che uno solo. Perchè se le resistenze dipendessero dai movimenti assoluti del fluido e del corpo, i risultati sarebbero diversi a seconda che la direzione è quella dal Nord al Sud, oppure dall'Est all'Ovest, oppure dall'alto in basso, il che non venne mai osservato ».

Però, siccome la corrente non è mai uniforme, nè quella dell'aria nè quella dell'acqua, « il paradosso di Dubuat non contiene nulla di sorprendente ».

Nel libro del compianto prof. Joukowsky (1916, p. 42) si trova il passaggio seguente: « Dal punto di vista della meccanica razionale tutti e due i fenomeni sono assolutamente reversibili, e R_1 dovrebbe essere uguale a R. Però nella realtà non sono reversibili, in quanto la corrente in un canale non corrisponde rigorosamente alla *corrente stazionaria non turbolenta* che investe la piastra mobile. La corrente nel canale è turbolenta; la turbolenza si forma continuamente alle pareti a cagione dell'attrito del fluido in contatto con esse, la quale turbolenza si propaga poi nella massa intera movente ».

Un po' più avanti il prof. Joukowsky propone il suo apparecchietto dimostrativo, ingegnosissimo e assai conosciuto: una bilancia speciale dimostra senza la possibilità di dubbio, che esiste una differenza fra i due casi: disco mosso uniformemente in acqua calma, oppure corrente di acqua che colpisce un identico disco fisso.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1935.

Malgrado la più fervida venerazione per la memoria dell'Illustre scienziato, noi non possiamo senz'altro ammettere che questo punto di vista sia l'unico che si possa avere sull'argomento.

Riteniamo invece che nella corrente *puramente laminare* il risultato sarebbe stato lo stesso.

Fra parentesi, possiamo accennare alle celebri esperienze di Prandtl sulle sfere, nelle quali l'aumento di turbolenza dava luogo ad una diminuzione della resistenza.

Teniamo pure presente il fatto che proprio il disco (del Joukowsky) si presta poco alla turbolenza, siccome la resistenza unitaria (o specifica) di un disco è costante, quindi nè la viscosità nè il numero di Reynolds non hanno qui nulla da vedere.

Il nostro ragionamento lo possiamo avviare come segue: le parole profetiche dello stesso colonnello Dubuat *on risque souvent de se tromper quand on applique aux fluides les lois du mouvement qui conviennent aux solides* si applicano pure alla reversibilità.

Quando il prof. Joukowsky parla del lago, il quale, trasportato *integralmente* sotto la piastra fissa, non condurrebbe al paradosso di Dubuat, è evidente che in questo esempio si tratta di reversibilità assoluta. Qualora poi si tratti della corrente prodotta da cause potenziali, come per esempio la differenza di livelli oppure delle pressioni, non è chiaro perchè anche qui siamo nel campo della reversibilità.

Una catena sospesa in un ascensore non dà luogo a nessun fenomeno di interesse, qualunque sia la velocità di salita (oppure di discesa). La stessa catena animata da una velocità propria, anche bassissima, dimostra certe proprietà di massimo interesse, delle quali finora non esiste una spiegazione ben netta: una individualità, un certo senso direttivo; l'effetto di un urto oppure di un cambiamento di direzione è specialmente strano. Qui non si può più parlare della reversibilità.

Ora, qualora la corrente (di aria oppure di acqua) provenga da cause potenziali, non potrebbe darsi che la diversità di comportamento dal regime dei fluidi perfetti (attribuita dal Joukowsky a turbolenza) fosse spiegabile in modo più diretto ed espressivo con un comportamento dei filetti fluidi simile a quello delle catene? Allora non si potrebbe più invocare l'ordinaria reversibilità.

Comunque si dovrebbero istituire due distinti gruppi di esperienze:

1° Il velivolo animato da una certa velocità, nell'aria calma, come anche il modello rimorchiato in una vasca comune, rappresenterebbero un'aspetto.

2° Invece le gallerie aerodinamiche rappresentano l'aspetto opposto, ed i risultati di esperienze eseguite in esse potrebbero offrire un divario non trascurabile da quello che ci servirebbe nelle applicazioni all'aviazione ecc.

Ciò nonostante, di solito non si parla mai del paradosso di Dubuat nei

trattati di aerodinamica, benchè nell'aria il suo effetto dovrebbe essere di un'importanza assai maggiore: tutte le gallerie aerodinamiche sono basate appunto sul principio di non esistenza di un tale divario. Sarebbe perciò di massimo interesse eseguire una prova montata per esempio come segue: il sollevamento di un dato corpo (disco, sfera ecc.) potrebbe esser eseguito mediante un motore a velocità *costante* (pare che se ne trovino in commercio fino a due cavalli). L'attacco del filo al corpo sarebbe costruito in maniera di un dinamometro, di modo che la resistenza, tenendo pure conto del peso, potrebbe essere osservata dopo ogni prova. Lo stesso corpo sarebbe poi sottoposto alla corrente della medesima velocità, nella galleria aerodinamica, ed il confronto delle resistenze darebbe un'idea almeno globale, dell'esistenza del paradosso di Dubuat per l'aria. La torre di Pisa potrebbe servire ammirabilmente per tali esperienze.

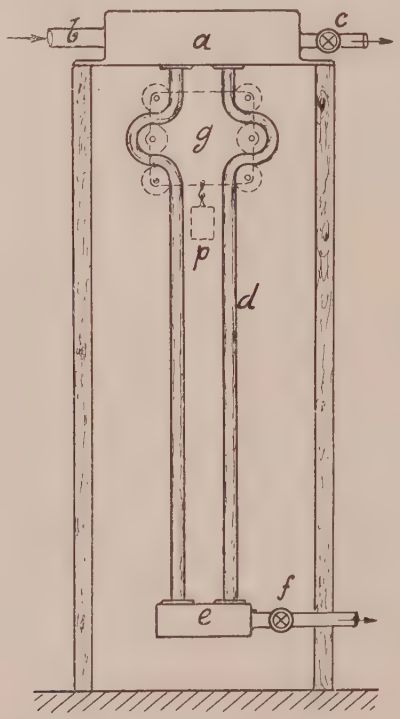


Fig. 1.

Per l'acqua le prove potrebbero essere montate diversamente (fig. 1): su due cavalletti è montato il serbatoio chiuso *a*, alimentato dalla tubazione *b*, e avendo uno sfogo regolabile *c*; su due tubi di gomma, *d*, è sospeso un altro serbatoio *e*, con rubinetto *f*. Il telaio o carrello *g*, è di-

sposto come indicato, ed è di peso sufficiente per poter scendere ad una certa velocità, dalla sua posizione iniziale, in alto, fino al contatto col serbatoio *e*; il peso *p*, serve per regolare la velocità di discesa. Supponiamo in primo luogo che i tubi *d* siano flessibili ma inestensibili. Regolando la pressione dell'acqua nei tubi mediante il rubinetto *c* e mantenendo chiuso il rubinetto *f*, si fa scendere il carrello *g*, osservando il tempo di percorso. Nella seconda esperienza si apre il rubinetto *f*, però, mediante il rubinetto *c* la pressione nei tubi si mantiene la stessa come prima. Lasciando scendere il carrello *g* si osserva la differenza di tempo necessario per il percorso. Se il tempo è maggiore, questa sarà una prova assoluta del fatto che il paradosso di Dubuat non ha nulla da vedere con la turbolenza, e che la differenza è dovuta alle condizioni del deflusso.

È evidente che in questo caso si dovrebbero improvvisare dinamometri su velivoli per misurare le resistenze al volo, per poterle poi confrontare con quelle misurate nelle gallerie. Tutto ciò sarebbe di massima attualità ed importanza.

Qualora i tubi *d* siano elastici, si dovrebbe tener conto dell'estensione che dovrebbe essere uguale nelle due esperienze. Anche qui il rubinetto *c* servirebbe per la regolazione, e altrimenti non vi sarebbe nessuna differenza nelle modalità delle prove.

Quanto sopra vale soltanto per le basse velocità, e non sapremo adesso proporre nulla di analogo per le velocità uguali o superiori a quella del suono. Qui l'unico modo sarebbe di fare una analisi sperimentale, mediante il confronto di fotografie « Schlieren » del deflusso, in ambedue i casi: corpo investito dalla corrente ad una data velocità; e lo stesso corpo proiettato alla stessa velocità in aria calma, come ha fatto anni addietro l'illustre prof. Cranz: la scia sarà certamente assai diversa.

È da sperare che un laboratorio rinomato e attrezzato per condurre queste esperienze voglia eseguirle quanto prima, data l'importanza tanto pratica come pure teorica dell'argomento.

Chimica (Chimica talassografica). — *Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia* [1]. Nota I [2] di C. M. Maldura, presentata dal Corrisp. G. Bargellini.

In una mia precedente ricerca sulle variazioni stagionali dei caratteri chimici e fisici delle acque della laguna di Orbetello [3], vennero considerati solamente quei fattori sufficienti per avere una nozione generale sulle condizioni di quell'ambiente lagunare. Le osservazioni furono perciò limitate alle determinazioni della temperatura e del pH, al contenuto in cloro e in ossigeno, e, per un controllo sulla eventuale incostanza dei rapporti dei vari ioni del complesso salino, alle misure della conducibilità elettrica.

Escludendo quest'ultime che allora non potevano avere altro che uno scopo orientativo, le medesime determinazioni sono state ripetute presentemente, integrate da ricerche su l'alcalinità, sul rapporto solfati : cloruri, sulle variazioni del contenuto dell'azoto ammoniacale, nitroso e nitrico, della silice e del fosforo.

La conoscenza di questi fattori ambientali è assai importante per l'interpretazione di molti fenomeni biologici che si verificano nelle lagune, come ad esempio il catadromismo e l'anadromismo dei pesci, dovuto principalmente alle rilevanti oscillazioni della temperatura e della salinità, e causa anche tanto del fenomeno della tanatocenosi quanto della scarsa presenza di plancton, come ha già fatto rilevare Brunelli [4] nei suoi lavori. Però mentre già si cominciano a possedere parecchi dati relativi all'andamento della salinità, della temperatura, del pH e dell'ossigeno, poco o nulla si sa sul contenuto nelle lagune in sali nutritivi (fosfati, nitrati, ecc.) largamente conosciuti nel mare, e sull'alcalinità specialmente in rapporto al pH, contenuto in Ca, ecc.

A differenza di quanto avviene nel mare la presenza e la quantità dei sali nutritivi nelle lagune è in rapporto non già alla ricchezza di plancton, ma alla natura del fondo, e ciò è facilmente intuibile se si tiene presente la scarsa profondità dei fondali lagunari in confronto a quelli marini, e alla

(1) Lavoro eseguito presso il R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1935.

(3) C. Maldura, *Le variazioni stagionali dei caratteri chimici e fisici delle acque della laguna di Orbetello.* « Boll. di Pesca, Pisc. e Idrob. », *5*, 962, 1929.

(4) G. Brunelli, *Ricerche sugli stagni litoranei.* « Boll. di Pesca, Pisc. e Idrob. », *9*, 202, 1933; Id., *Le caratteristiche biologiche dell'ambiente lagunare e degli stagni salmastri.* « Ibid. », *10*, 18, 1934.

presenza, per l'accennato fenomeno della tanatocenosi, di notevoli quantità di detriti sia animali che vegetali, i cui prodotti di decomposizione vengono ad arricchire l'ambiente dei suddetti composti.

Ritengo anche che particolare interesse debba attribuirsi all'alcalinità, di cui è ben nota la relazione con gli equilibri dei carbonati, a loro volta dipendenti in gran parte dallo sviluppo della vita vegetale, i quali equilibri, invero assai complessi in un ambiente così soggetto a continue variazioni come la laguna, è assai probabile che debbano stabilire delle peculiari condizioni chimico fisiche per lo sviluppo degli organismi animali.

Come ho fatto precedentemente, le osservazioni sono state eseguite ogni mese sempre alla medesima ora e nelle medesime stazioni, e cioè presso le bocche a mare nel canale di Nassa (Stazione I) e nel centro della laguna di ponente (Stazione II).

Il regime termico osservato presentemente, pur mantenendo in generale l'andamento del 1928–29, si discosta leggermente da questo tanto nei valori massimi e minimi quanto nei mesi in cui questi vengono a cadere. E cioè mentre nella corrente annata i massimi e i minimi per ambedue le stazioni si notano rispettivamente nei mesi di luglio e gennaio, nel 1928–1929 questi subirono un ritardo di un mese a causa delle eccezionali condizioni meteorologiche di quell'anno. Per conseguenza anche l'escursione annuale, come si può vedere dall'unito specchietto, presenta delle sensibili divergenze, malgrado che la media del 1934-35 sia solo leggermente superiore alla precedente.

		Massimo	Minimo	Media annuale	Escursione annuale
		—	—	—	—
Staz. I	1928–29	29.5	1.0	17.0	28.5
	1934–35	25.6	8.1	17.4	17.5
Staz. II	1928–29	28.8	0.0	16.0	28.8
	1934-35	25.9	2.3	16.7	23.6

L'anormalità dell'annata 1928–29 è stata notata anche da Picotti [1] nella laguna veneta, dove ha potuto constatare che i valori termici massimi cadono nei mesi di giugno-luglio ed i minimi in dicembre-gennaio, a differenza dell'alto Adriatico dove ambedue i valori subiscono un ritardo costante di un mese.

La rilevante escursione annuale che si nota specialmente nella stazione II, dove minore si fa sentire l'influenza regolatrice del mare, è indubbiamente una delle cause della forte tanatocenosi della laguna di Orbetello già osservata da Brunelli e Apolloni [2].

(1) M. Picotti, *Le condizioni geografiche e fisiche dell'ambiente nei riguardi biologici*, in: «La laguna Veneta» (Monografia), to. IX, cap. 42 (in corso di stampa).

(2) G. Brunelli, loc. cit.; G. Brunelli e N. Apolloni, *Su alcune caratteristiche*

Il regime alino, a differenza della temperatura, non presenta notevoli anomalie nelle due annate, però mentre nel 1928–29 i massimi e i minimi coincidevano negli stessi mesi osservati per le temperature, presentemente nella stazione I si ha il massimo in settembre e il minimo in aprile, e per la stazione II rispettivamente in agosto e dicembre. Ciò vuol dire che se la temperatura, in via di massima, esercita la sua influenza sull'andamento stagionale della salinità, è assai probabile che altri fattori contribuiscono a turbarne il regolare andamento, come ad esempio la marea, oltre alle precipitazioni atmosferiche e agli apporti d'acqua dolce dell'Albegna.

		Massimo	Minimo	Media annuale	Escursione annuale
Staz. I	1928-29	39.56	21.37	30.92	18.19
	1934-35	38.22	27.29	34.17	10.93
Staz. II	1928-29	44.18	23.62	31.98	20.56
	1934-35	45.57	25.35	32.48	20.22

Anche qui, per le stesse ragioni notate per la temperatura, si osserva una maggiore escursione annuale nella stazione II che nella I, la cui imponenza porta alle medesime conseguenze biologiche causate dal regime termico.

È interessante notare che la media annuale della salinità, malgrado l'entità dei valori massimi che a volte si raggiungono, è sempre nettamente inferiore alla media del Tirreno che si aggira sui 37-38 °/₀₀ di S.

Riferendoci poi ai massimi di salinità bisogna considerare l'ambiente lagunare di Orbetello come iperalino, attenendosi alla classificazione di Brunelli, il quale, giustamente, ha spostato i termini fissati da Redeke per le lagune del Mare del Nord, ben diverso per molte ragioni dal nostro Mediterraneo.

Nelle mie precedenti ricerche feci notare l'incostanza dei rapporti dei singoli ioni presenti nell'acqua di Orbetello dalle deviazioni della conducibilità elettrica rispetto a quella presentata dall'acqua di mare a diverse diluizioni. Presentemente ho creduto opportuno estendere le osservazioni alla determinazione del rapporto solfati: cloruri.

In generale i valori ottenuti si discostano sensibilmente dal valore medio riscontrato nell'acqua di mare, che oscilla secondoi vari autori (Thoulet, Sabrou, Natterer, Dittmar, Manuelli, Giral, Thompson, ecc.) tra 13.90 e 14.

La causa di tali divergenze va indubbiamente attribuita all'influenza degli apporti di acqua dolce (sopratutto dell'Albegna), i cui rapporti di

delle associazioni lagunari mediterranee. «Rend. R. Acc. dei Lincei», XI, 6°, 607, 1930; N. Apolloni, *Studio sull'almirobiocenosi della laguna di Orbetello.* «Rend. R. Acc. dei Lincei», XIII, 6°, 931, 1931: Id., *Ricerche faunistiche nella laguna di Orbetello.* «Boll. Pesca, Pisc. e Idrob.», 7, 369, 1931.

composizione sono ben diversi dall'acqua di mare; ma questo non è sufficiente a spiegare le variazioni assai forti spesso riscontrate. Manuelli [1], ad esempio, nelle sue analisi eseguite nell'Adriatico in prossimità della foce del fiume Sile, ha riscontrato che tale rapporto tende ad aumentare coll'abbassarsi della salinità, ma entro limiti piuttosto ristretti (il massimo osservato e calcolato come $100 \cdot SO_3/Cl$ è di 13.347 corrispondente ad un valore in Cl di 1.479 °/₀₀), quindi nel caso di Orbetello bisogna volgere l'attenzione ad altre cause determinanti tali alterazioni.

Effettivamente Thompson e collaboratori [2], nel loro lavoro sul rapporto solfati: cloruri nelle acque del Nord Pacifico, hanno già supposto che le piccolissime variazioni da loro notate in mare aperto potrebbero essere attribuite al fenomeno di diverso grado di adsorbimento degli ioni SO_4'' e Cl' da parte dei colloidi e delle sostanze in sospensione nell'acqua.

Stowell [3] ha studiato sperimentalmente tale fenomeno ed ha tra l'altro ottenuto che il rapporto solfati: cloruri può passare da 13.687 e 13.686 rispettivamente a 14.223 e 14.197 dopo percolazione dell'acqua di mare attraverso della sabbia per un tempo variabile nelle due esperienze.

Attenendoci a queste prove ed a ciò che è stato notato anche da altri autori, tra cui Rona e Michaelis [4], sul fenomeno dell'adsorbimento in generale, già si potrebbero spiegare a sufficienza le discordanze di Orbetello, dove varie volte ho potuto notare che, in caso di forte agitazione, le acque presentavano una discreta quantità di materiale in sospensione proveniente dal fondo della laguna che veniva rimosso.

Non si può d'altra parte escludere che le sostanze colloidali, la cui presenza si deve necessariamente ammettere nei fanghi di Orbetello, debbono analogamente intervenire ad aumentare il valore del rapporto solfati: cloruri, mentre restano sempre da spiegare gli abbassamenti al disotto della media del mare che fanno supporre una sottrazione dello ione SO_4'' all'acqua, escludendo però qualsiasi fenomeno di separazione allo stato solido come $CaSO_4$, dopo quanto ha osservato Manuelli [5] su la solubilità di questo nell'acqua di mare.

Nei riguardi dell'ossigeno è interessante rilevare l'apparente anomalia tra il suo contenuto, in relazione s'intende alla temperatura e gli imponenti fenomeni di putrefazione del materiale di fondo. Infatti il fango, spe-

(1) A. Manuelli, *Sul rapporto solfati-cloruri nell'acqua di mare.* « Mem. R. Com. Talass. Ital. », n. XV, 1912.

(2) T. G. Thompson, I. W. Lang and L. Anderson, *The Sulphate-Chloride Ratio of the Waters of the North Pacific.* « Publ. Puget Sound Biol. Stat. », *5*, 277, 1927.

(3) F. P. Stowell, *The Adsorption of Ions from Sea-water by Sand.* « Jour. Mar. Biol. Ass. », *14*, 955, 1927.

(4) P. Rona u. L. Michaelis, *Ueber die Adsorption von Elektrolyten durch Kohle.* « Biochem. Zeit. », *94*, 240, 1919.

(5) A. Manuelli, *Sulla solubilità del gesso nell'acqua di mare.* « Mem. R. Com. Talass. Ital. », n. L, 1915.

cialmente nella zona centrale della laguna, si presenta fortemente colorato in nero, ricchissimo di detriti organici (gyttia), e svolgente il caratteristico odore di idrogeno solforato, mentre la fauna di fondo, studiata da Brunelli e Apolloni, è caratteristica dei fanghi luridi.

In queste condizioni, e data la scarsa profondità della laguna, era prevedibile una povertà di ossigeno specialmente in prossimità del fondo, però la ricca vegetazione, essenzialmente costituita da *Cymnodea maior*, *Ruppia marittima* e *Chaetomorpha aerea*, che in alcune zone forma estese e fitte praterie, è evidente che debba influire per la rigenerazione dell'ossigeno consumato nei processi ossidativi della putrefazione. Ciò viene confermato da alcune osservazioni che ho compiuto in parecchi punti della laguna, consistenti nella determinazione verticale dell'ossigeno, tanto in superficie che nelle immediate vicinanze del fondo.

			O_2
20/6/1934	Stazione I	Sup.	4.96
		Prof.	4.80
19/9/1934	Stazione I	Sup.	3.81
		Prof.	3.62
» » »	Presso canale navigabile	Sup.	4.23
		Prof.	4.30
19/4/1935	Stazione I	Sup.	5.59
		Prof.	5.47
» » »	A 100 metri dalla riva	Sup.	5.88
		Prof.	5.91

Come si vede dai valori qui riportati, sensibili variazioni non si notano, malgrado che l'osservazione dell'aprile 1935 a 100 metri dall'abitato di Orbetello sia stata eseguita in una zona dove, pur essendo abbondante la vegetazione, era anche abbastanza evidente la putrefazione del fondo dovuta in parte a sostanze organiche provenienti dalle acque di rifiuto della città.

In via generale anche per l'ossigeno l'andamento stagionale non presenta notevoli discordanze rispetto alle precedenti osservazioni del 1928–29.

L'andamento dei sali nutritivi e l'alcalinità formeranno l'argomento di una seconda Nota, nella quale saranno anche riportati tutti i risultati e i metodi analitici usati.

Biologia. — *Prime ricerche sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali* [1]. Nota [2] di ALDO SPIRITO, presentata dal Corrisp. E. CARANO.

È mio intendimento, in questa Nota preliminare, esporre brevemente i primi risultati di alcune esperienze impostate ed eseguite allo scopo di studiare l'influenza della corrente elettrica continua sul comportamento dei meristemi radicali.

Premetto che in questa prima Nota non mi è possibile, per ovvie ragioni di spazio, trattare, neppure sommariamente, di tutto ciò che la letteratura riferisce, sia a proposito di esperienze fatte con l'elettricità nei riguardi del fenomeno della divisione della cellula animale o vegetale, sia di altre che comunque abbiano con esse relazione. Molti Autori si sono occupati di tali questioni dai più diversi punti di vista (Roux, Hertwig, Rossi, Elfving: Ingvar, Hardy, Lillie, Hartog, Gallardo, Galeotti, Pentimalli, Meier, Lund, Barth, ecc.), ma di essi tratterò in futuri lavori. Essi saranno da me pubblicati quando, nel susseguirsi delle mie ricerche, avrò raccolto nuovi risultati, i quali possano, correlati con gli altri, contribuire allo studio di alcune peculiari proprietà del protoplasma vivente.

Nell'impostare le prime esperienze si partì da taluni presupposti teorici a proposito della possibilità che la corrente elettrica continua potesse agire sulle cellule dei meristemi in maniera diversa, a seconda delle sue diverse direzioni, relativamente all'asse dei loro fusi di divisione.

Si comprenderà facilmente come in tali ricerche, che investono problemi di Biologia generale, la scelta del materiale fosse di grande importanza inquantochè bisognava trovarne uno avente particolari requisiti adatti allo scopo prefisso. Così occorreva avere un tessuto in cui normalmente vi fossero cellule in continua divisione; che l'orientamento dei fusi nucleari delle stesse cellule fosse disposto secondo un asse o più assi facilmente individuabili, in modo da far agire la corrente elettrica continua nello stesso senso o in senso opposto ad essi, o addirittura trasversalmente. Simili disposizioni, insieme ad altre pure importanti, sono tutte proprie di molti apici radicali: ed è perciò che le mie prime esperienze, descritte in questa Nota, sono state condotte su tale materiale.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1935.

Tuttavia con ciò non intendo affermare che esso sia l'unico adoperabile in questo genere di ricerche; ed infatti sarà mia cura in seguito saggiare altri materiali, da scegliersi anche tra gli animali. Quanto ho sopra detto sta a significare semplicemente come a volte sia preferibile usare, a inizio di nuove esperienze, materiali i quali, presentando alcune utili disposizioni, possano facilitare notevolmente il còmpito del ricercatore, fornendo chiari risultati. A loro volta questi risultati possono servire a spiegarne altri successivi, che altrimenti potrebbero apparire, ottenuti per primi, oscuri e controversi.

Fino ad ora le mie esperienze sono state eseguite su radici in sviluppo di *Vicia faba* e *Lupinus albus*.

Le radici sono state sottoposte all'azione della corrente elettrica continua nell'apparato riprodotto nella fig. 1.

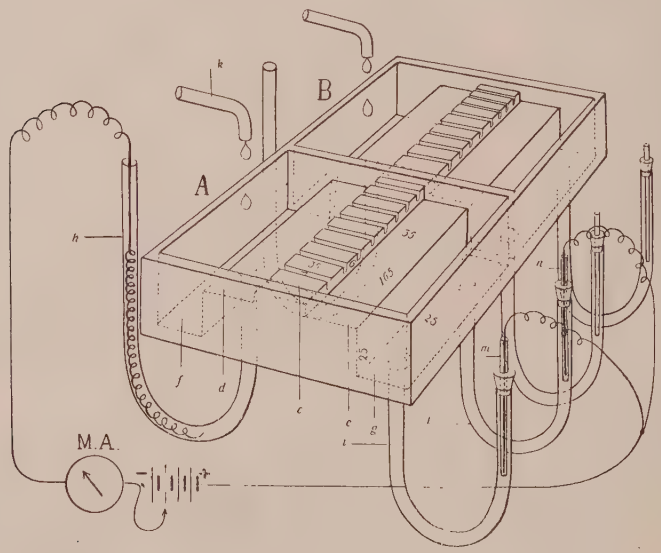


Fig. 1.

Esso è stato costruito in paraffina ad alto punto di fusione ed è stato diviso in due parti, tra loro eguali, A e B: nella parte B le radici non sono state sottoposte ad alcuna corrente e sono servite per controllo, poichè viventi in condizioni del tutto identiche – corrente elettrica esclusa – a quelle esistenti nella parte A, a cui mi riferisco nella seguente breve descrizione.

La sporgenza *c*, che divide trasversalmente la parte A, presenta nove scanalature uguali ed equidistanti a sezione di semicerchio ed è fiancheg-

giata da due gradini *d* ed *e*. Nel fondo *f* trova il suo sbocco un'estremità del tubo ad U, *h*; nel fondo *g* le estremità dei tubi *i* ed *l*.

L'acqua di fonte è stata fatta arrivare a goccie all'apparecchio per mezzo del tubo *k* ed è stata mantenuta all'altezza voluta (cioè $^1/_2$ mm. sotto il piano della sporgenza *c*, in modo che il passaggio del liquido, tra le due parti divise di questa, avvenisse esclusivamente attraverso i nove canali) facendo defluire il soprappiù dai tubi *i* ed *l*, muniti di tubicini di livello *m* e *n*.

Gli elettrodi, costituiti da filo di nichel–cromo, sono stati posti nei tubi *h* (polo negativo) ed *i* ed *l* (polo positivo), così come è rappresentato nella figura. A volte, come altro controllo, ferme restanti tutte le altre disposizioni, è stata invertita la polarità degli elettrodi. Completava il circuito un milliamperometro graduato a centesimi di milliampère.

L'intensità della corrente, passante per l'apparato, si poteva modificare a volontà, entro certi limiti, spostando il filo spirale nel tubo *h*. La sorgente elettrica è stata sempre rappresentata da pile a secco, formate da uno o più elementi.

Nella fig. 1, rappresentante l'apparecchio usato nelle mie esperienze, sono indicate con cifre le grandezze in millimetri delle sue varie parti. Ho creduto opportuno dare queste misure affinchè chiunque voglia controllare l'esperimento possa mettersi nelle identiche condizioni da me osservate e che mi hanno sempre fornito gli stessi risultati.

Le esperienze sono state condotte nella maniera seguente: posti a germinare i semi di *Vicia faba* o di *Lupinus albus* in capsule Petri su carta bibula bagnata, si è atteso fino a quando le radici avessero raggiunto una certa lunghezza (2–3 cm.). Sull'apice di tali radici sono stati tracciati con inchiostro di Cina due sottili trattini (*Vicia faba*) distanti il primo 3 mm. dall'estremità, e il secondo 3 mm. dal primo; su *Lupinus* invece è stata tracciata solo la prima lineetta distante pure 3 mm. dall'estremità. Così marcate le radici sono state adagiate nei canaletti della sporgenza *c*: alcune con l'apice rivolto da una parte, altre con l'apice rivolto verso la parte opposta, in modo che i semi venissero a poggiare rispettivamente sui gradini *d* ed *e*, e quindi lambiti solo inferiormente dall'acqua. Per mantenere ai semi l'umidità necessaria al normale sviluppo, essi sono stati ricoperti da sottilissimi strati di cotone idrofilo bagnato. Nei vari canaletti della sporgenza *c*, come ho detto più sopra, le radici sono state poste alternativamente una con l'apice rivolto da una parte, ed una con l'apice rivolto dall'altra; a volte però nello stesso canale sono state collocate due radici, i cui apici, messi l'uno di fronte all'altro, fossero distanti tra loro circa 3 mm. Le stesse disposizioni sono state osservate per quel che riguarda le radici poste nella parte B dell'apparecchio (radici di controllo).

Si è tenuto conto anche di tutti quei fattori (luce, temperatura, ecc.) che potessero eventualmente influire sullo sviluppo delle radici, facendo sì

che tutte fossero nei loro riguardi a parità di condizioni, in modo da togliere ogni possibile dubbio nella valutazione dei risultati ottenuti per l'azione della corrente elettrica continua.

Riferisco innanzi tutto le osservazioni eseguite sulle radici durante l'esperimento, trascrivendo due protocolli tra i tanti da me raccolti.

Vicia faba. – Intensità della corrente = 0,08 ma [1]. Temperatura dell'acqua 12°. Durata dell'azione ore 46.

Già dopo le prime ore si può notare chiaramente che, mentre le radici con l'apice rivolto verso l'elettrodo negativo e le radici di controllo poste nella parte B dell'apparecchio si sono allungate, quelle con l'apice rivolto verso l'elettrodo positivo si sono arrestate nel loro sviluppo. Tale arresto è dimostrato dalla distanza delle lineette tracciate sulla punta prima dell'esperimento, distanza che, in questo caso, è rimasta inalterata. Dopo 46 ore dall'inizio non vi è nessun accenno di accrescimento di esse (fig. 2 *a*), mentre quelle rivolte verso l'elettrodo negativo (fig. 2 *b*) e quelle di controllo (fig. 2 *c*) sono notevolmente allungate.

Ogni volta che ho ripetuto l'esperienza nelle condizioni sopradette, ho ottenuto sempre gli stessi risultati: solo raramente nelle prime ore si è avuto un piccolissimo allungamento degli apici rivolti verso l'elettrodo positivo, specie nella zona intercorrente tra il primo e secondo trattino, ma in breve esso si è arrestato.

Lupinus albus. – Intensità della corrente = 0,1 ma. Temperatura dell'acqua 13°. Durata dell'azione ore 46.

Anche con questo materiale si sono avuti gli stessi risultati ottenuti in *Vicia faba.* Gli apici radicali di *Lupinus albus* rivolti verso l'elettrodo positivo (fig. 3 *a*) sono stati arrestati nel loro sviluppo, mentre quelli rivolti verso l'elettrodo negativo (fig. 3 *b*) e i controlli (fig. 3 *c*) si sono allungati. La fig. 3 mostra appunto tali effetti su *Lupinus* 46 ore dopo l'inizio dell'esperimento.

Riassumendo quindi si può concludere che con la corrente elettrica continua, nelle dosi e nel tempo da me indicati, si vede sugli apici delle radici di *Vicia faba* e di *Lupinus albus* un arresto di sviluppo quando essi siano rivolti verso l'elettrodo positivo, ma non quando essi siano rivolti verso l'elettrodo negativo.

In seguito a questi risultati si è intrapreso quindi lo studio citologico degli apici radicali trattati con la corrente, col confronto di quelli normali;

(1) Questa cifra ha valore solo quando le esperienze vengano ripetute con acqua Marcia (Roma). È chiaro che usando altra acqua con diversa conducibilità elettrica occorrerà cambiare l'intensità della corrente che passa per l'apparecchio per ottenere gli stessi risultati.

poichè proprio con questo studio si sarebbero potuti conoscere quali fossero le modificazioni avvenute a carico delle cellule meristematiche delle radici, per le quali l'azione della corrente elettrica continua si era manifestata in un arresto del loro sviluppo.

Perciò gli apici sottoposti all'azione della corrente sono stati prelevati e fissati alla fine dell'esperimento, insieme a quelli dei controlli. Sulle sezioni longitudinali di essi sono stati eseguiti i comuni metodi di colorazione, ma si è ritenuto opportuno introdurre in questo studio citologigo anche la reazione di Feulgen inquantochè essa, specifica dell'acido timonucleinico, e quindi nucleare, avrebbe nettamente messo in luce, se vi fossero state, modificazioni nella struttura dei nuclei delle cellule delle radici trattate con la corrente elettrica continua. Con la reazione di Feulgen si è fatto uso, a volte, del verde luce per colorazione plasmatica di contrasto.

Nel descrivere brevemente i risultati dell'indagine citologica mi riferisco alle osservazioni eseguite sulle sezioni degli apici delle radici di *Vicia faba*, riprodotte nella fig. 2, avvertendo però che i risultati sono stati eguali anche per quel che riguarda le radici di *Lupinus albus*.

Le microfotografie riprodotte in questa Nota rappresentano rispettivamente all'incirca la stessa zona della regione apicale di una radice sottoposta a corrente con l'apice rivolto verso l'elettrodo positivo (fig. 4), di una radice sottoposta a corrente con l'apice rivolto verso l'elettrodo negativo (fig. 5) e di una radice di controllo (fig. 6).

Le microfotografie mostrano innanzi tutto un fatto che del resto poteva logicamente attendersi per il risultato dell'arresto di sviluppo delle radici il cui apice era rivolto verso l'elettrodo positivo. Nelle sezioni di esse (fig. 4) mancano infatti cellule in stadi di divisione, mentre in quelle di apici rivolti verso l'elettrodo negativo (fig. 5) e nei controlli (fig. 6) se ne trovano in numero notevole.

Grandi effetti quindi si hanno solo quando l'apice della radice è disposto verso l'elettrodo positivo, e questi effetti non sono unicamente limitati al semplice arresto delle divisioni cellulari, poichè l'indagine citologica ha dimostrato notevoli cambiamenti nella struttura delle cellule dell'apice (fig. 4): la membrana cellulare è ispessita; si nota impoverimento del citoplasma e formazione di vacuoli; caratteri, questi, che ci indicano che tali cellule hanno perduto il carattere embrionale proprio dei meristemi, per acquistare l'apparenza di cellule adulte. Anche il nucleo di tali cellule si mostra modificato, inquantochè la cromatina appare più compatta dell'ordinario.

L'esame citologico di queste radici, sottoposte alla corrente con l'apice rivolto verso l'elettrodo positivo, ha mostrato ancora alcune interessanti particolarità. Infatti in esse si è potuto notare che – contrariamente a quanto è osservabile nelle radici di controllo e in quelle con l'apice rivolte verso l'elettrodo negativo – vi è una precoce differenziazione di elementi cellulari che daranno origine alle trachee.

Ma ciò che è ancora più interessante è il fatto che di fronte a queste ultime, in mezzo a tutte le cellule le quali per azione della corrente hanno acquistato l'aspetto di cellule adulte, ve ne sono alcune in perfetta attività mitotica; si tratta di cellule del periciclo che daranno luogo alle radici secondarie e che quindi dividendosi formeranno sempre nuove cellule disposte secondo un asse perpendicolare a quello principale della radice stessa.

Questi sono, brevemente esposti, i risultati principali finora raggiunti. Vediamo ora di riassumerli e di fissare in che cosa consista la loro reale portata.

Innanzi tutto è risultato dalle mie esperienze che, a parità di tutte le altre condizioni sperimentali, una stessa corrente elettrica continua, mentre non ha alcuna influenza sugli apici radicali di *Vicia faba* e di *Lupinus albus* rivolti verso l'elettrodo negativo, produce grandi effetti sugli apici rivolti verso l'elettrodo positivo. In quest'ultimo caso infatti si ha un arresto di di sviluppo e la trasformazione delle cellule embrionali dell'apice in cellule con apparenze di adulte. Se poi la cessazione dell'attività mitotica di queste e la loro trasformazione in cellule con caratteri adulti sia semplicemente dovuta al fatto che l'azione della corrente si traduce per esse in condizioni sfavorevoli di vita, le quali potrebbero condurle alla morte, è un'ipotesi che è pure necessaria prospettarsi e che nel futuro svolgersi di queste ricerche potrà essere meglio valutata.

Alle trasformazioni suddette fanno eccezione, presentandosi in stadi di divisione, alcune cellule poste di fronte alle trachee, che in queste radici si formano precocemente in vicinanza dell'estremità apicale.

Non è còmpito di questa Nota preliminare fare delle considerazioni sopra quanto ho descritto. Solo desidero fare osservare che i diversi risultati ottenuti sui meristemi delle radici con apice rivolto verso l'elettrodo positivo, e su quelli delle radici con apice rivolto verso l'elettrodo negativo, e ancora più i risultati diversi osservati tra cellule della stessa radice (cellule dell'apice e cellule produttrici delle radici secondarie degli esemplari rivolti verso l'elettrodo positivo) di per se stessi ci permettono di inquadrarli con taluni fatti noti, dei quali si è tenuto conto nell'impostare le presenti ricerche e che bisognerà tener presente in una qualsiasi futura spiegazione del fenomeno descritto. Voglio alludere al fatto che normalmente, mentre le cellule dell'apice dividendosi dànno luogo ad altre secondo l'asse longitudinale della radice, le cellule produttrici delle radici secondarie dànno luogo ad altre secondo un asse perpendicolare al primo. Poichè la corrente elettrica, disposta nelle mie esperienze secondo l'asse longitudinale della radice (apice rivolto verso l'elettrodo positivo), non ha esercitato alcun effetto su quest'ultime, mentre ne ha esercitato uno notevolissimo su quelle dell'apice, ne risulta che, presentandó un diverso orientamento polare, si sono comportate diversamente al passaggio della corrente. Tale orientamento viene

influenzato quindi, con conseguente perdita dei caratteri meristematici, dalla corrente elettrica continua, nelle dosi e nel tempo da me indicati, solo quando essa sia disposta nella stessa direzione, ma in senso opposto al suddetto orientamento.

Ma a prescindere da queste brevi considerazioni, tengo a mettere in risalto che sulla base di questi risultati si potrà procederè nelle indagini a proposito di altri quesiti che già si presentano nel nostro studio; primo dei quali è quello di sapere se le cellule degli apici radicali, arrestati nel loro sviluppo, possano - tolte all'azione della corrente, o magari sottoposte alla stessa corrente ma invertendone il senso – ricuperare le loro proprietà meristematiche. Questo quesito presenta già da solo molte possibili estensioni, inquantochè si dovrà ricercare eventualmente quali siano le dosi e i tempi di azione della corrente, perchè il processo di arresto sia o no reversibile; e ci potrà far meglio valutare, nei vari casi possibili, lo stato vitale o meno delle cellule che, perduto il loro carattere embrionale, hanno acquistato l'apparenza di cellule adulte differenziate.

Zoologia. — *Rigenerazione atipica degli arti del "Proteus anguineus Laur."* [1]. Nota [2] di G. Schreiber, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Nella presente Nota descriverò due casi di rigenerazione atipica nel Proteo, che mi sembrano interessanti sia perchè in generale sono pochi i casi noti di rigenerazione in questo Urodelo, sia perchè fatti di rigenerazione atipica che rientrino nella categoria della omeosi sostitutiva come questi, non mi consta sieno mai stati descritti negli Anfibi, nei quali tuttavia si conoscono altre forme di rigenerazione atipica più o meno spiccata.

Come è noto non sempre nella rigenerazione animale la parte rigenerata corrisponde esattamente alla parte asportata. Talora il rigenerato differisce dalla parte asportata in varia maniera e la differenza può colpire sia la polarità dell'organo sia la sua integrità o anche la natura stessa dell'organo rigenerato. Si distinguono perciò vari casi di rigenerazione atipica che, secondo l'Abeloos [3] si possono classificare in quattro categorie: *eteromorfosi* o rigenerazione polare, quando la parte rigenerata non ha la polarità che aveva la parte asportata; *subrigenerazione* o rigenerazione ipotipica, quando la parte rigenerata non è equivalente a quella amputata, ma ha lo stesso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1935.

(3) M. Abeloos, *La régénération et les problèmes de la morphogenèse.* Gauthier-Villars, 1932.

tipo strutturale; *omeosi* quando in sede dell'organo asportato si rigenera un organo che normalmente è situato in altra regione del corpo; *iperrigenerazione* quando in sede dell'organo asportato si rigenerano non uno, ma più organi corrispondenti.

I casi di omeosi più notevoli sono stati descritti negli Invertebrati ed in particolare negli Artropodi. Così nei Decapodi, l'asportazione di un occhio che comprenda anche il ganglio ottico corrispondente è seguìta da rigenerazione di una antenna (Herbst, Steele, Giesbrecht). Anche in certi Insetti l'asportazione dell'occhio è seguìta dalla rigenerazione di una antenna più o meno completa (Ianda, Kryzenecki).

In altri casi, al posto di una antenna asportata si rigenera una zampa (*Dixippus*, *Sphodromantis*.) (Schmidt–Jansen, Cuènot, Brecher, Burchard, Przibram). Nel *Dixippus* è caratteristico il fatto che se la amputazione della antenna ha luogo nella regione più distale si rigenera la corrispondente regione antennare, se invece l'amputazione colpisce gli articoli basali dell'antenna si può rigenerare una zampa più o meno completa in quel punto.

A questi interessantissimi fenomeni sembrano presiedere proprietà individuali variabili caso per caso e talvolta, come nella *Drosophila* anche fattori ereditari.

Fenomeni di omeosi nei Vertebrati sono stati descritti tra i Rettili; così le Lucertole amputate di un arto posteriore rigenerano al suo posto un moncone conico somigliante alla coda. (Guyenot e Mathey, Egger, Marcucci) Abeloos [1], Korschelt [2].

Fenomeni di rigenerazione nel Proteo furono descritti da pochissimi Autori. Sono interessanti specialmente le ricerche di Kammerer [3] [4] sia sulla rigenerazione degli arti che su quella dell'occhio. Questo A. vide rigenerare arti a 4 o 5 dita al posto dell'arto anteriore tridattilo normale; mentre l'arto posteriore bidattilo rigenerava sempre normalmente. Kammerer fa notare però che l'iperdattilia di questi casi può essere dovuta alle fessurazioni che si hanno nei monconi in rigenerazione che appoggiano al suolo. Le dita soprannumerarie rigenerate non sono in posizione normale tra di loro, ma sono inserite in tutte le direzioni. Per quanto riguarda l'occhio, Kammerer asportando parte del bulbo oculare di Proteo vide che esso rigenerava completamente circa un anno dopo.

Gadeau de Kerville [5] nel 1914 descrisse alcuni casi di rigenerazione di arti nel Proteo però molto incompleta. Al posto dell'arto e della estre-

(1) M. Abeloos, loc. cit.

(2) E. Korschelt, *Regeneration und Transplantation.* Borntraeger, 1927.

(3) P. Kammerer, *Versuche an Amphibien und Reptilien.* «Centralbl. f. Physiol.», XXII, 1908.

(4) P. Kammerer, *Experimente über Fortpflantzung, Farbe, Augen und Körperreduktion bei Proteus anguineus Laur.* «Arch. f. Entwicklungsmech.», *33*, 1912.

(5) H. Gadeau de Kerville *Note sur la régénération des pattes et de la queue chez*

mità di questo, non si rigenerano che dei monconi senza traccia di dita, ed al posto della coda amputata non si rigenerò che un corto tratto terminale. Gli animali amputati da questo A. nel 1911 rimasero fino al 1914 all'oscuro ed alla temperatura di 6–9°. Egli fa notare la estrema lentezza di questa rigenerazione ed è propenso a ricondurre la causa di ciò alla bassa temperatura alla quale fu eseguito l'esperimento.

All'infuori di questi dati, non mi è stato possibile rinvenire segnalati altri casi di rigenerazione in questa specie, mentre pochi altri casi sono stati descritti in specie vicine (*Amphiuma*, *Siren* da Morgan, Goette ecc.). Ritengo perciò di qualche interesse riferire su i casi che ho potuto ottenere nel Proteo, che portano se non altro un contributo ulteriore alla conoscenza di tali processi in questo Urodelo. I miei casi si sono verificati in condizioni di temperatura diversa da quelli di Gadeau de Kerville ed in certo modo confermano le previsioni di questo A.

Fig. 1. – Caso n. 1 (dorsale) circa 2 ingr.

I due casi in questione si sono verificati in due Protei relativamente giovani: uno di 14 centimetri, l'altro di 13,5 cm. che per comodità di esposizione denominerò rispettivamente « caso 1° » e « caso 2° ». Tutti e due furono operati tre anni or sono; il N. 1 nel giugno del 1932, il N. 2 nell'ottobre dello stesso anno. Questi Protei mi servirono come donatori in esperimenti di trapianti e non me ne occupai più oltre lasciandoli dopo l'amputazione degli arti nella vasca comune nella quale vengono tenuti nel nostro Istituto un certo numero di questi animali in acqua corrente.

le Protée anguillard (*Proteus ang. Laur.*). « Bull. de la Soc. Zoologique de la France », *38*, année 1914, p, 109.

Il N. 1 venne trovato morto durante il periodo delle vacanze estive e venne fissato in mia assenza senza che purtroppo fosse tenuta nota della data esatta. Il N. 2 è tutt'ora vivente.

Il N. 1 venne mutilato di tutti e quattro gli arti circa a metà dell'omero e del femore, con un colpo netto di forbici. Il N. 2 venne mutilato invece del solo arto anteriore destro anche circa a metà dell'omero. Lo stato della rigenerazione raggiunto dai due casi è rappresentato dalle Figure (1-2-3). Nel primo caso gli arti posteriori hanno rigenerato due monconcini nettamente bifidi e che presumibilmente sarebbero cresciuti come arti normali. L'arto anteriore sinistro pure normale a tre dita; queste sono appena accennate ed il medio è maggiore degli altri due. Invece l'arto anteriore destro è nettamente bidattilo come gli arti posteriori.

Fig. 2. - Caso n. 1, Arto ant. sinistro.
(L'arto è infilato in un foro praticato in un pezzo di carta nera).

Il Proteo N. 2 ha rigenerato l'arto anteriore destro nettamente bidattilo. In questo caso il lungo periodo trascorso dalla amputazione ha permesso una rigenerazione quasi completa. L'arto rigenerato è leggermente più piccolo del normale, ma dello stesso diametro; una piccola strozzatura segna la zona di amputazione. Esiste un lieve accenno a curvatura a gomito (o meglio a ginocchio) poco mobile.

Ci troviamo qui di fronte a due casi nettamente diversi da quelli descritti dal Kammerer: qui l'arto rigenerato, o è perfettamente normale come costituzione e ripete esattamente, sia pure più in piccolo perchè non del tutto sviluppato l'arto amputato (N. 1 arti post. e ant. sinistro); oppure *al posto dell'arto anteriore amputato si è rigenerato un arto posteriore che possiamo ritenere perfetto* (N. 2 e N. 1 ant. destro). Non si ha assolutamente a che fare con arti iperrigenerati come quelli che così spesso si vedono negli Axolotl e come quelli che Kammerer ritiene dovuti alle azioni traumatiche sul moncone rigenerante dei Protei.

Si tratta di un vero fenomeno di omeosi sostitutiva?

Nel N. 1 l'arto rigenerato è ancora molto piccolo, e forse sarebbe poco prudente concludere in questo senso, ma nel secondo caso, la costituzione dell'arto rigenerato appare perfetta, si è già oltrepassato lo stadio di abbozzo in rigenerazione come sembrano ancora gli arti del primo caso e vi è perfetta continuità col moncone. Anche la pelle che ricopre l'arto rigenerato mostra le caratteristiche che si hanno in tutte le altre regioni del corpo.

Fig. 3. – Caso n. 2 (dorsale) ingr. circa 2 volte.

Da queste considerazioni mi pare che si possa senz'altro affermare che *in questo secondo caso al posto dell'arto anteriore si è rigenerato un arto posteriore e si è quindi verificato il medesimo fenomeno che si verifica in certi Artropodi.*

Nei Rettili, come abbiamo visto, sono stati descritti casi di rigenerazione di monconi caudali al posto di arti posteriori. Negli Anfibi questo sarebbe il primo caso di omeosi che, a quanto mi consta, sia stato descritto e forse è interessante anche per il fatto che esso ricorda maggiormente i casi tipici degli Artropodi che non i casi dei Rettili. Si tratta qui di organi bilaterali di metameri anteriori che rigenerano al loro posto organi omodinami di metameri posteriori; non come nei Rettili dove in sede di un organo bilaterale come è l'arto posteriore si rigenera una coda *non* omodinamica con l'arto al quale si sostituisce.

Per Abeloos, l'omeosi sarebbe una ulteriore prova della esistenza dei gradienti assiali, in quanto i territori morfogenetici nella rigenerazione avrebbero una potenza prospettica inferiore a quella originaria presentata dagli abbozzi degli organi corrispondenti durante l'ontogenesi e darebbero quindi origine a parti situate lungo il gradiente ad un livello posteriore.

I risultati che ho illustrato se da un lato non ci offrono alcun elemento nuovo per l'interpretazione teorica dell'omeosi, dall'altro si prestano ad alcune considerazioni su di un altro ordine di fatti.

È nota già, come abbiamo veduto dai risultati di Gadeau de Kerville, la estrema lentezza del processo di rigenerazione del Proteo. Anche nelle mie esperienze la rigenerazione veramente completa dell'arto non si è avverata nemmeno dopo tre anni dalla amputazione. In questo animale si prospetta una condizione biologica differente da quella degli altri Urodeli ad alto potere rigenerativo. Lo stato neotenico del Proteo forse interviene nel problema in questione da due punti di vista: lo stato larvale del soma da un lato e lo stato di ipotiroidismo dall'altro. Sono due condizioni queste, che sembrano presentare un valore diverso, anzi addirittura opposto di fronte al potere di rigenerazione!

È noto che le larve di Anfibi rigenerano meglio e più rapidamente degli adulti corrispondenti e che con la metamorfosi, negli Anuri scompare in generale il potere di rigenerazione. In questo senso lo stato larvale del soma del Proteo dovrebbe essere piuttosto una condizione favorevole alla rigenerazione. D'altro canto lo stato di ipotiroidismo che si può constatare facilmente nel Proteo sia coll'esame istofisiologico della glandola, sia coll'analisi degli effetti di essa sulle strutture somatiche (ossificazione) (Schreiber [1]) è un fattore che, per quanto sappiamo per altri Urodeli rallenta i processi di rigenerazione (Walter).

Le due condizioni sembrerebbero inconciliabili, e si dovrebbe ritenere che l'ipotiroidismo rappresenti il fattore che influenza la rigenerazione maggiormente che non lo stato larvale. Se non che, le precedenti ricerche sulla neotenia assoluta dei *Proteidae* avevano portato a ritenere che il soma di questi animali pur conservando le caratteristiche dello stato larvale fosse però insensibile agli stimoli ormonici morfogenetici (Noble [2], G. Schreiber [3]). Non mi pare che questo fatto possa essere senza un significato anche per quanto riguarda il potere di rigenerazione: la diminuzione di questo potere sarebbe quindi forse dello stesso ordine di fatti della perdita della capacità a metamorfosare caratteristica di questi animali.

(1) G. Schreiber, *La sostituzione endocrina del Proteus anguineus Laur. ed il problema della neotenia*. « Atti R. Ist. Veneto di sc. lett. ed arti », to. XC, p. 757, 1930-31.

(2) G. K. Noble, *The "retrograde metamorphosis" of Siredon: experiments on the functional activity of the thyroid of perennibranchs*. « Anat. Record », 1934, p. 100.

(3) G. Schreiber, *Il problema biologico della neotenia assoluta*. *Annalità Zoologiche*. « Suppl. Arch. Zool. Ital. », Vol. XIX, 1933.

Zoologia. — *Le trasformazioni dell'occhio degli Anuri durante la metamorfosi normale ed accelerata* (*). Nota (2) di M. Romano e G. Schreiber, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Le modificazioni che insorgono nell'occhio degli Anfibi durante la metamorfosi, ci sono sembrate interessanti specialmente da due punti di vista: fisiologico ed ottico-geometrico per quanto riguarda la metamorfosi normale; morfogenetico, per quanto si riferisce specialmente alla metamorfosi accelerata in seguito a tiroidizzazione. In tutti e due i sensi, pochissime ricerche furono eseguite finora, ed i risultati che esponiamo in questa Nota ci permettono di estendere ed illustrare in un nuovo campo i risultati di ricerche e considerazioni sulla azione della tiroide nella metamorfosi degli Anuri, che uno di noi aveva precedentemente ottenuti per altre manifestazioni della metamorfosi (3).

La metamorfosi normale dell'occhio degli Anfibi consiste sopratutto nelle modificazioni che subiscono i mezzi diottrici, cornea e cristallino, modificazioni che portano in definitiva l'occhio di girino adattato alla visione subacquea ed essere atto alla visione aerea. Oltre a ciò vi sono modificazioni meno importanti degli organi annessi, ghiandole, muscoli, palpebre ecc. Come nei pesci, l'occhio del girino presenta prima della metamorfosi il cristallino quasi sferico, e la cornea distinta in due strati, uno interno: cornea propria o sclerale, ed uno esterno, congiuntivale (detta « Brille » dagli AA. tedeschi). Tra le due cornee vi è uno spazio libero cosicchè l'occhio può muoversi liberamente sotto la cornea esterna. Lo spazio intercorneale durante la metamorfosi si restringe sempre più, vi si insinua il connettivo intraorbitale che fa accollare i due strati corneali (Popoff). L'epitelio corneale prolifera nella zona periferica e l'accrescimento che ne risulta porta ad un aumento della curvatura della cornea definitiva.

Il cristallino invece da sferico diviene lenticolare appiattendosi per la proliferazione delle fibre equatoriali. Intanto si vengono formando le ghiandole lacrimali per differenziamento di ghiandole cutanee e le palpebre che crescono come duplicature cutanee al bordo dell'orbita. Nella cavità orbitale i muscoli oculomotori già formati nel girino si ingrandiscono notevolmente.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1935.

(3) G. Schreiber, *L'applicazione della legge di azione degli ormoni alle metamorfosi degli Anuri*. « Arch. Zool. It. », XX, 1934.

Dal punto di vista ottico queste modificazioni sono interessanti per varie ragioni; anzitutto la cornea che nella visione subacquea non aveva nessuna funzione ottica, acquista questa funzione nella visione aerea ed assume la curvatura necessaria ed è coadiuvata anche dal liquido lacrimale che rende « ottica » la sua superfice (Ronchi).

Il cristallino invece, al quale nella visione subacquea è devoluto tutto l'effetto diottrico si appiattisce, e questo appiattimento, unito a lievi modificazioni dell'indice di rifrazione, è probabilmente compensato in parte dalla funzione della cornea. (La trattazione ottico–geometrica di queste modificazioni verrà fatta in una Nota successiva.)

L'appiattimento del cristallino risulta dalle presenti ricerche sul *Bufo* molto evidente dalla curva costruita portando sulle ascisse i tempi dello sviluppo e sulle ordinate i valori dell' «indice di Rabl» (rapporto percentuale del diametro equatoriale del cristallino e dello spessore) (1).

Sono state studiate queste modificazioni nel *Bufo vulgaris* tenendo conto specialmente dell'ordine cronologico di esse. Si è visto così che l'appiattimento del cristallino si inizia prima delle modificazioni della cornea. Il cristallino inizia le sue modificazioni già in girini di 66 giorni mentre la cornea si modifica negli stadi molto più avanzati della metamorfosi.

Nelle presenti ricerche si è inoltre tentato di chiarire le cause dell'esoftalmo caratteristico che si stabilisce nelle ultime fasi della metamorfosi. Vi concorrono oltre all'accrescimento assoluto del bulbo e la curvatura maggiore della cornea, anche l'accrescimento degli elementi anatomici dello spazio orbitale (ghiandole e muscoli) e probabilmente anche la caratteristica ed intensa desidratazione dei tessuti del girino alla fine della metamorfosi. Questa facendo retrarre la superficie cutanea attorno all'occhio concorre ad accentuare la sporgenza del bulbo.

È stato studiato anche l'accrescimento dello spessore della retina sia assoluto che relativo rispetto al bulbo e si è visto che lo spessore assoluto rimane pressocchè costante.

Vennero studiate anche le modificazioni metamorfiche che subentrano dopo somministrazione di preparati tiroidei ai girini, sia come nutrizione con tiroide fresca sia come iniezioni endoperitoneali di Thyroxin Roche che di estratti tiroidei in soluzione fisiologica.

Specialmente colle iniezioni si ottennero metamorfosi precoci in 3–4 giorni, fortemente disarmoniche. L'occhio delle larve disarmoniche presenta a sua volta fenomeni di disarmonia spiccatissimi, consistenti nel fatto che mentre la cornea risulta perfettamente metamorfosata, il cristallino invece rimane larvale pur presentando mitosi nelle fibre equatoriali.

(1) La curva ed i relativi dati numerici come pure le figure e la bibliografia completa verranno publicati nel lavoro definitivo della sig.na Romano.

Nelle larve così metamorfosate i muscoli risultano più sviluppati che nelle larve di controllo di eguale età e vi è pure qualche accenno alla formazione delle palpebre.

La disarmonia caratteristica di tutti questi occhi risulta quindi dal fatto che sembra invertita la cronologia dei fenomeni metamorfici per quanto riguarda la cornea ed il cristallino, tovandosi questi elementi in condizioni di sviluppo relativo esattamente opposto a quello delle larve in metamorfosi normale.

L'interpretazioue causale di queste disarmonie è facile a nostro modo di vedere, se si consideri la azione della tiroide sul girino alla luce delle leggi d'azione degli ormoni [1]. I fatti osservati nella metamorfosi accelerata si ricollegano a quanto risulta dalle ricerche della Scuola di F. Lillie sull'azione degli ormoni sul piumaggio dei polli, secondo le quali gli abbozzi ad accrescimento più lento sono suscettibili a dosi di ormone inferiori e quelli ad accrescimento più rapido a dosi superiori. Nella metamorfosi normale, per l'accrescimento progressivo della tiroide nel girino (Etkin) circolano concentrazioni progressivamente crescenti di ormone tiroideo per cui si vengono ad eccitare successivamente le varie zone morfogenetiche diversamente suscettibili a detto ormone, zone che hanno anche, come abbiamo visto, velocità di differenziamento differenti. In questa maniera la tiroide controlla la cronologia dei vari episodi della metamorfosi. Nella metamorfosi accelerata, si somministrano subito le più alte dosi di ormone e si vengono così ad eccitare contemporaneamente tutte le zone morfogenetiche. Nel caso particolare dell'occhio, tanto la cornea che il cristallino iniziano contemporaneamente le modificazioni, ma la cornea, ad accrescimento più rapido, arriva a completarle, mentre il cristallino ad accrescimento molto più lento, al termine della metamorfosi accelerata, non ha ancora raggiunto lo stato definitivo ed appare ancora larvale.

Le singole parti dell'occhio quindi si comportano dal punto di vista della morfogenesi, indipendentemente, come gli altri territori morfogenetici implicati nelle modificazioni della metamorfosi.

(1) Schreiber, loc. cit.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul contenuto in vitamina antineuritica* (B^1) *del grano germinante* [1]. Nota [2] di V. Famiani, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Da ricerche di C. Kucera [3] eseguite su semi di leguminose e cereali diversi, tra cui il grano, risulterebbe che la vitamina antineuritica (B^1), in esso contenuta, viene a subire, durante la germinazione, una diminuzione che sempre più si accentua con il progredire della germinazione stessa, fino a scomparire del tutto in 18ª giornata.

Tali risultati hanno assunto particolare interesse per noi, che, essendoci di recente occupati del valore alimentare del grano germinante, in base a ricerche già riferite [4] abbiamo potuto concludere, che al grano, in periodo di germinazione iniziale, spetta un valore biologico maggiore di quello che compete allo stesso grano secco e non germinante. Pertanto ci siamo proposti di renderci conto personalmente delle variazioni effettive che la vitamina B^1 subisce per effetto della germinazione.

Abbiamo dosato la vitamina B^1 antineuritica col metodo fondato sulla nozione del quoziente beriberico secondo G. Amantea, alle cui note pubblicazioni [5] rimandiamo per dettagli al riguardo.

Abbiamo sperimentato su due colombi dell'età di due anni circa. Dopo avere più volte accertato in ciascuno di essi il valore del Q_b normale (somministrando per imbeccamento all'animale opportunamente preparato gr. 30 di riso brillato e lavato per giorno, fino alla comparsa dei primi segni di beri-beri), abbiamo ripetuto l'esperimento, ma somministrando giornalmente gr. 28 di riso più 2 gr. di grano « Damiano » (fornitoci dall'Istituto Naz. di Genetica per la Cerealicoltura), o come tale, o germinante da 48 ore, o germinante da 6 giorni. La germinazione si otteneva, mettendo il grano

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935.

(3) C. Kucera, *Variations de la teneur en vitamines* B *et* C *des graines de céreales au cours de la germinations.* « C. R. de la Soc. de Biol. », 1928, *99*, 967; Id., *Nouvelles recherches sur la diminution de la teneur en vitamine* B *dans la graine des céreales et des leguminoses au Cours de la germination.* « Ibidem », 1929, *100*, 429.

(4) V. Famiani, *Sul valore alimentare del grano germinante.* « Rendic. R. Accad. Naz. del Lincei », 1933, *18*, 68.

(5) G. Amantea, *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei », 1933, 18, 317; Id., *La determinazione del « quoziente beri-berico »* (Q_b). *Notizie di tecnica.* « Ibidem », 1933, *18*, 399; Id., *Sul modo di dosare la vitamina antineuritica* (B^1), *applicando la nozione del « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Ibidem », 1935.

con pochissima acqua condotta in un bicchierino di vetro e lasciandovelo, a temperatura ambiente, per il tempo stabilito.

I risultati ottenuti sono riuniti nel seguente specchietto, dal quale risulta chiaramente, che il valore del Q_b, che si era elevato di 0.17 e 0.13 rispettivamente nei due animali per l'aggiunta al riso di 2 gr. di grano non germinante, ha presentato uno scarto assai più notevole (rispettivamente 0.38 e 0.39) per l'aggiunta di 2 gr. dello stesso grano germinante da 48 ore, ed è stato ancora maggiore nel caso del grano germinante da sei giorni in uno dei due colombi (0.56), mentre nell'altro non ha oltrepassato 0.33.

Ben diversi pertanto da quelli ottenuti da Kucera appaiono già questi nostri primi risultati, i quali – anche perchè indirettamente concordanti con osservazioni di Schittenhelm ed Eisler [1], pei quali l'orzo germinante conterrebbe quantità relativamente grandi di vitamina B^1 – ci permettono di escludere con sicurezza che durante la germinazione diminuisca nel grano il contenuto in fattore antineuritico. Risulterebbe anzi dalle nostre osservazioni zioni addirittura un aumento, e progressivo, a meno che non si voglia pensare che lo stato di germinazione renda migliore e più completa la utilizzazione della vitamina preesistente.

La divergenza tra i risultati nostri e quelli di Kucera può trovare la sua spiegazione nel fatto, che detto Autore non si è servito forse di una tecnica sperimentale di dosaggio esatta quanto la nostra.

TABELLA.

Animale numero	Alimento: al giorno						
	Riso gr. 30	Riso gr. 28 Grano « Damiano » gr. 2		Riso gr. 28 Grano « Damiano » in germinazione iniziale gr. 2		Riso gr. 28 Grano « Damiano » in 6ª giornata di germinazione gr. 2	
	Q_b	Q_b	Spostamenti	Q_b	Spostamenti	Q_b	Spostamenti
1	0.78	0.95	+ 0.17	1.16	+ 0.38	1.34	+ 0.56
2	0.77	0.90	+ 0.13	1.16	+ 0.39	1.10	+ 0.33

(1) A. SCHITTENHELM e B. EISLER, *Ueber das antirachitische Vitamin der Wurzelkeime.* Nota I, II e III. « Ztschr. f. d. ges. exp. Med. », 1931, 75, pp. 837, 745 e 758.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul contenuto in vitamina antineuritica* (B^1) *di alcune varietà di grano italiano* [1]. Nota [2] di V. Famiani, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Durante le nostre ricerche sul valore alimentare di alcuni cereali [3], abbiamo sentito a più riprese il bisogno di uno studio comparativo sul contenuto in vitamina antineuritica (B^1) nei cereali nostri.

Abbiamo pertanto voluto iniziarlo, incominciando col rivolgere l'attenzione al grano, e precisamente ad alcune varietà di grani « Strampelli ».

Sono note pel grano variazioni della vitamina B^1, riferibili al suolo ed alle condizioni culturali. Così, ad es., Mc Carrison e Viswanath [4] avrebbero trovato che il concime animale produce un grano a più elevato (del 15 % circa) contenuto in vitamina B^1, che non il grano ottenuto da terreni concimati chimicamente; per contro Hunt e Hosack [5] avrebbero osservato che la concimazione con comune fosfato acido, da solo o insieme con cloruro potassico e carbonato sodico, produce un grano a contenuto assai alto di vitamina antineuritica.

Noi abbiamo ritenuto utile sperimentare intanto con grano ottenuto in una medesima zona agraria, ed in condizioni di cultura eguali; e ci siamo serviti per le ricerche di otto varietà di grani « Strampelli », ottenuti nella zona di Rieti e fornitici dall'Istituto Nazionale di genetica per la cerealicoltura. Precisamente si tratta dei grani: « Aziziah » e « Cappelli » (grani duri); « Carlotta », « Fieramosca », « Mentana », « Fiume », « Damiano » e « Villa Glori » (grani teneri).

Metodo di dosaggio da noi seguìto è stato quello fondato sul criterio del quoziente beri–berico secondo G. Amantea, ai cui lavori originali [6] rimandiamo pei dettagli di tecnica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935.

(3) V. Famiani, *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con alcuni cereali.* « Il Problema alimentare », 1931, *1*, 165; Id., *Sul valore alimentare del grano (semi di « Triticum vulgare Vill. »)*, « Ibidem », 1932, *2*, 55.

(4) R. Mc Carrison e B. Viswanath, *The effect of Manurial Conditions on the Nutritive and Vitamin Values of Millet and Wheat.* « Ind. Journ. Med. Res. », 1926, *14*, 351.

(5) C. H. Hunt e W. Hosack, *The influence of Fertilisers on the Vitamin* B *content of Wheat.* « Ohio Agric. Exp. Sta. Bull. », 1927, *3*, 415.

(6) G. Amantea, *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri–berico* (Q_b). « Rendic. R. Accad. Naz. dei Lincei », 1933, *18*, 317; Id., *La determinazione del quoziente beri–berico* (Q_b). *Notizie di tecnica.* « Ibidem », 1933, *18*, 399; Id., *Sul modo di dosare la vitamina antineurica* (B^1), *applicando la nozione del « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Ibidem », 1935.

In 4 di razza pura (pavoncelli), previa preparazione, si è dapprima accertato, mediante alimentazione esclusiva con 30 gr. quotidiani di riso brillato e lavato il valore del Q_b normale. Quindi in due prove consecutive sono stati studiati gli spostamenti subiti da detto valore per l'aggiunta al riso di 30 gr. di una delle varietà di grano (2 varietà per ogni colombo), suddividendo i 30 gr. in 10 dosi eguali di 3 gr. ognuna, e somministrandole durante i primi 10 giorni dell'alimentazione deficiente, insieme con 27 gr. giornalieri di riso. L'alimento era fornito per imbeccamento ed in una sola volta. Dalla 11ª giornata in poi, fino alla comparsa dei primi segni netti di beri-beri, gli animali erano alimentati con 30 g. quotidiani di riso. Nel caso – abbastanza raro, del resto – che il periodo del vomito iniziasse prima della 11ª giornata di alimentazione deficiente, e che pertanto qualche chicco di grano venisse rivomitato, esso era riimbeccato agli animali in modo da esser certi della quantità totale di grano fornita.

Nella unita tabella sono riportati i valori del Q_b, con gli spostamenti rispetto al Q_b normale. Appare chiaramente, come gli spostamenti più rilevanti del Q_b si siano osservati per i grani « Mentana », « Carlotta » e « Damiano » (rispettivamente 0.47, 0.44 e 0.42), mentre di entità minore sono stati quelli notati per le varietà « Fieramosca » (0.33) e « Fiume » (0.33), e ancor minore è apparso lo spostamento pei grani « Cappelli » (0.28), « Aziziah » (0.27) e « Villa Glori (0.26).

TABELLA

Numero dell'animale	Valore normale del Q_b	Valori e spostamenti del Q_b, ottenuti per aggiunta al riso di 30 grammi di grano					
		Varietà di grano	Q_b	Spostamento	Varietà di grano	Q_b	Spostamento
Col. I. . .	0.71	« Mentana »	1.18	+ 0.47	« Carlotta »	1.15	+ 0.44
Col. II . .	0.73	« Fieramosca »	1.06	+ 0.33	« Fiume »	1.06	+ 0.33
Col. III . .	0.68	« Aziziah »	0.95	+ 0.27	« Damiano »	1.10	+ 0.42
Col. IV . .	0.77	« Cappelli »	1.05	+ 0.28	« Villa Glori »	1.03	+ 0.26

Poichè in ognuno dei 3 gruppi di casi ora considerati, i valori dei singoli scarti sono vicinissimi, se non eguali, tra loro, possiamo ordinare così le predette varietà di grano, in base al loro contenuto decrescente in vitamina B^1:

1° « Mentana », « Carlotta » e « Damiano »;
2° « Fieramosca » e « Fiume »;
3° « Cappelli », « Aziziah » e « Villa Glori ».

Da rilevare che i grani duri « Cappelli » e « Aziziah » figurano entrambi nella categoria di quelli a minor contenuto di vitamina antineuritica. I grani teneri, ad eccezione del « Villa Glori », si sono tutti dimostrati più ricchi.

Patologia. — *Ricerche sull'infezione malarica sperimentale umana da sporozoiti.* Nota preventiva [1] di T. De Sanctis Monaldi, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Lo studio parallelo dell'infezione malarica sperimentale ottenuta nell'uomo con l'inoculazione di sporozoiti per via sottocutanea o intradermica e per via endovenosa, mi è apparso argomento di notevole interesse dopo la lettura delle due Note del Raffaele, *Sul comportamento degli sporozoiti del sangue dell'ospite* (« Riv. di Malar. », 1934).

Questa breve Nota, malgrado il numero ancora limitato d'esperimenti effettuati, vuol solo portare un piccolo contributo di dati sperimentali alla soluzione dell'annosa questione del destino degli sporozoiti inoculati dall'anofele nell'ospite intermedio.

Tecnica degli esperimenti: Gli sporozoiti per le varie inoculazioni erano ottenuti prelevando le ghiandole salivari da zanzare che avevano punto dei gametiferi di terzana primaverile dai 15 ai 18 giorni prima, ed uccise con vapori di cloroformio. La dissezione con gli opportuni aghi sterili era praticata, dopo aver staccato le ali e l'addome dal torace; seguendo la tecnica del Raffaele che permette con una relativa facilità di ottenere le due ghiandole salivari, nella maggior parte dei casi, integre e pulite da detriti. La dissezione era praticata in una goccia di soluzione fisiologica sterile, su un vetrino portaoggetti anch'esso sterile e con l'aiuto del microscopio da dissezione.

Nel maggior numero dei casi le ghiandole sia che risultassero sane che infette si sono ottenute intiere, costituite cioè dai loro tre lobi caratteristici. Con somma cura si sono sempre eliminati i più piccoli pezzetti di chitina, i peli e le squamme che nelle manipolazioni forzatamente si diffondono nel liquido salino e che avrebbero potuto, se iniettati endovena all'uomo, costituire dei pericolosi emboli, come pure avrebbero inutilmente accresciuto

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1935.

la carica batterica inevitabile del liquido da inoculare. Ogni coppia di ghiandole appena isolata era ricoperta da un vetrino copri-oggetti, anche esso sterile, per poter procedere con l'aiuto del microscopio all'accertamento della reale presenza degli sporozoiti. Quando le ghiandole sono molto infettte si vedono subito numerosi sporozoiti sparsi nel liquido che circonda le ghiandole ancora intere. Quando la carica sporozoitica non è molto forte conviene schiacciare le ghiandole per romperle e così liberare gli sporozoiti in esse contenute, che si mettono allora facilmente in evidenza. In ogni caso dopo schiacciamento delle ghiandole riconosciute sicuramente infette e conservate in camera umida fino a che si era ottenuta la quantità necessaria, con accurati lavaggi sia del vetrino copri– che del porta–oggetti, si praticava la sospensione degli sporozoiti in soluzione fisiologica, sospensione che si aspirava in una siringa sterile da tubercolina fino al volume totale di cc. 1,10 – 1.20. Perchè più omogenea riuscisse detta sospensione si lasciava una grossa bolla d'aria penetrare nella siringa sì che la successiva agitazione rimescolava meglio il liquido. Una goccia era posta in una camera di Thoma–Zeiss per poter contare il numero di sporozoiti che si inoculavano in ogni esperienza, nei limiti degli errori compatibili con il sistema e dipendenti anche dal fatto che, non più di due conte per ogni sospensione, erano effettuate. Il volume totale d'ogni sospensione era esattamente portato a cc. 1 : una metà era inoculata suttocute o intraderma ad un paziente, l'altro mezzo cc. endovena ad altro ammalato. Avendo presente le interessanti ricerche del Besredka sull' infezione carbonchiosa, sulla necessità perchè questa infezione attecchisca che gli elementi bacillari vengano in contatto con determinate cellule di un tessuto recettivo (cellule dell'epidermide o del derma) oltre che fare delle inoculazioni sottocutanee ne abbiamo fatte anche intradermiche, mentre d'altra parte tutte le iniezioni endovenose sono state praticate con i seguenti accorgimenti affinchè, nei limiti del possibile, degli sporozoiti non rimanessero nel tragitto tra l'epidermide e l'endovena, sia nell' introduzione che nell'estrazione dell'ago. Previa modica stasi, con ago sterile libero si praticava la puntura della vena del gomito. Quando il sangue fuorusciva nettamente, fatte cadere due o tre gocce, si adattava la siringa e si inoculava il mezzo cc. di sospensione di sporozoiti. Aspirando due o tre volte il sangue nella siringa si procedeva così ad un suo completo lavaggio : infine si sostituiva alla prima un'altra siringa piena di soluzione fisiologica che si iniettava anche al paziente e che doveva lavare ancora l'ago prima di ritirarlo rapidamente dalla vena.

Tra la dissezione delle ghiandole e la completa inoculazione della sospensione di sporozoiti non ha mai interceduto un tempo superiore ai 30–40 minuti il che ci rendeva tranquilli sulla conservazione degli sporozoiti poichè lo stesso Raffaele ha dimostrato che essi si mantengono vivi e capaci di infettare ancora dopo sette ore dall'estrazione delle ghiandole, purchè conservate in camera umida.

TABELLA

Numero	Data	Cognome nome	Numero sporozoiti inoculati	Inoculazione intradermica			Cognome nome	Inoculazione endovenosa		
				Risultato	Incubazione	Reperto patassitario		Risultato	Incubazione	Reperto parassitario
1	5-1-935	T. R.	5.000	+	74 g.	pl. vivax ++++	D. P.	—	—	—
2	9-1-935	F. G.	50.000	—	—	—	R. L.	+	17 g.	pl. vivax ++++
3	18-1-935	P. P.	90.000	—	—	—	F. G.	—	—	—
				Inoculazione sottocutanea						
4	21-1-935	C. A.	1,00.000	—	—	—	A. A.	+	17 g.	pl. vivax ++++
5	25-1-935	C. F.	2.500	—	—	—	S. B.	+	15 g.	pl. vivax ++++
6	30-1-935	E. A.	75.000	—	—	—	G. S.	—	—	—
7	30-1-935		30.000				F. G.	—	—	—

I risultati ottenuti, sinteticamente riassunti nell'unita tabella mostrano come in sei esperimenti l'iniezione intradermica e sottocutanea abbia dato luogo solo una volta e dopo un lungo periodo di incubazione (74 giorni) ad una infezione terzanaria tipica con abbondante reperto di parassiti di *plasmodium vivax* nel sangue periferico dell'ammalato.

Il gran numero di risultati negativi in questo gruppo non è da attribuire ad alterazioni intervenute a carico degli sporozoiti inoculati perchè se non in ogni caso, tre volte la corrispondente inoculazione degli stessi elementi per via endovenosa ha dato luogo ad una tipica infezione.

Così pure la quasi completa negatività di risultati di questa serie non si può attribuire a quantità troppo piccole di sporozoiti inoculati, sotto cioè alla dose limite d'infezione, poichè secondo le nostre conte abbiamo inoculato da un minimo di 2.500 sporozoiti ad un massimo di 100.000 e l'unico risultato positivo si è ottenuto con la dose di 5.000 sporozoiti, mentre inefficaci sono state quantità 10, 15, 20 volte superiori.

Nella serie delle sette inoculazioni endovenose abbiamo avuto tre risultati positivi, due con periodi d'incubazione di 17 giorni, uno con periodo d'incubazione di 15 giorni. Negli altri quattro casi l'iniezione per via endovenosa ebbe esito negativo.

I risultati negativi sia nella serie delle inoculazioni intradermiche e sottocutanee che in quella delle inoculazioni endovenose ci mostrano che alcune particolarità dell'infezione malarica specie in rapporto alla fase sporozoitica non sono ancora ben note e debbono formare oggetto d'ulteriore studio.

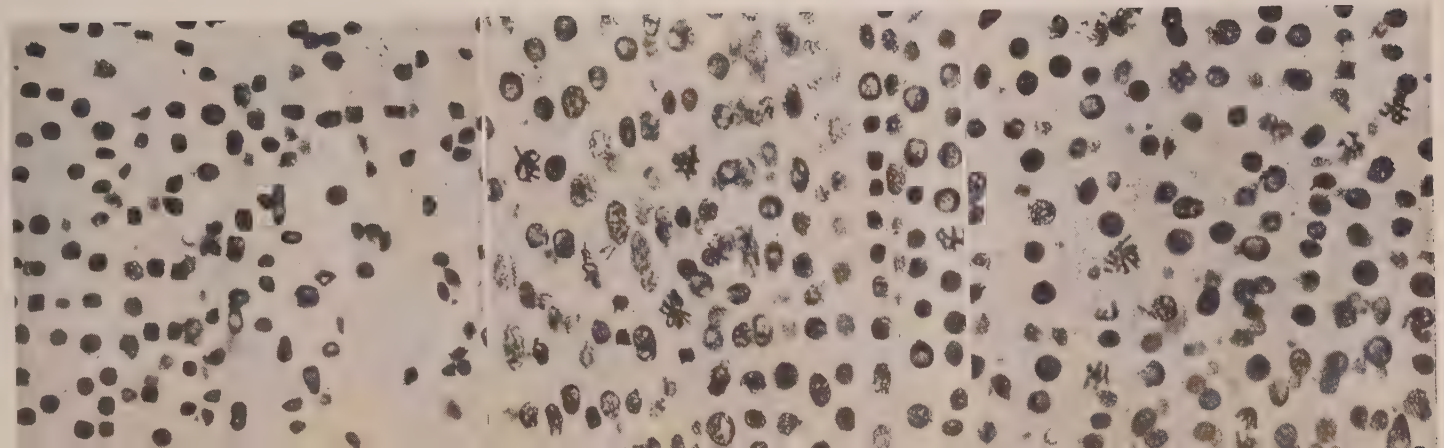
Importante ci sembra invece rilevare che tanto quando si sono inoculati 2.500 sporozoiti come nel caso n. 5, quanto 100.000 come nel caso n. 4, cioè dosi quaranta volte superiori, la febbre e la comparsa dei parassiti in circolo sono avvenuti quasi contemporaneamente cioè in quindicesima e in diciassettesima giornata.

Questa osservazione ci fa ritenere che nel periodo di incubazione un uguale fenomeno intervenga a carico di quantità così notevolmente differenti di sporozoiti, e ci può far comprendere come in ogni caso la comparsa degli accessi febbrili e del reparto parassitario si abbia sempre dopo un periodo presso a poco identico. Questi dati convaliderebbero l'ipotesi che gli sporozoiti, veri corpi estranei per l'organismo vertebrato superiore, penetrino non direttamente nei globuli rossi come affermava Schaudinn, ma in particolari cellule dell'organismo ove dopo aver compiuto un loro ciclo, pari alla durata del periodo d'incubazione dell'infezione malarica (14–17 giorni) darebbero luogo a quegli elementi che sarebbero solo allora capaci d'invadere i globuli rossi.

N. P.

fig. 2

fig. 3



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1935 (Anno XIII)

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Astronomia. — *Aumento di precisione nelle recenti riduzioni del « Catalogo Astrografico ».* Nota [1] del Corrisp. A. BEMPORAD.

Relativamente facile è far meglio degli altri mediante qualche accorta compensazione degli errori di qualsiasi genere: assai più difficile è superare sè stessi mediante cambiamento delle basi del proprio lavoro. Ciò richiede il più delle volte uno spreco di energia che da taluno potrebbe esser giudicato non in proporzione coi risultati conseguiti. Siamo lieti di dar qui le prove che nelle nostre ultime riduzioni di lastre del *Catalogo Astrografico* ci è riuscito di superare gli altri e anche noi stessi in misura abbastanza rilevante.

Abbiamo già comunicato in una serie di Note apparse su questi « Rendiconti » [2] e altrove [3] i risultati dello studio delle correnti stellari in otto centri fra 12^h e 18^h A.R. e fra $+51°$ e $+55°$ Decl. L'estensione di queste ricerche oltre 18^h era resa difficile dal fatto che le lastre fra 18^h e 24^h erano state ridotte e in massima parte già pubblicate in base alle posizioni di AG Cambr. Mass. (Ep. 1875.0), mentre le lastre fra 12^h e 18^h sono state ridotte in base alle posizioni più recenti (1916.0) e più precise — data la migliore conoscenza dei moti propri — di Yale Observatory [4].

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1935.

(2) Vol. XVII, pp. 497, 601, 882, 1025; vol. XVIII, pp. 177, 425.

(3) « La Ricerca Scientifica », anno VI, vol. I, n. 4, 1935; « Acta Societatis Gioeniae Catanensis », ser. 6ª, vol. I.

(4) *Catalogue of 8359 stars by Frank Schlesinger and Ida Barney.* New Haven, 1925. Pubblications of Yale Observatory, IV.

Di conseguenza abbiamo fatto una nuova determinazione delle costanti di 25 lastre [1] da 18^h in là, coi seguenti risultati (II) accanto ai quali riportiamo quelli delle precedenti riduzioni (I). Si avverte espressamente che valori medi di Res α sono stati valutati in secondi d'arco.

Lastra	Epoca	Centro		Antica riduzione: I			Nuova riduzione: II		
N.		α	δ	Res α	Res δ	Stelle n°	Res α	Res δ	Stelle n°
1391	1901.5	$18^h\ 6^m$	+ 51°	± 0ˢ.04	∓ 0″.5	24	± 0ˢ.03	± 0″.4	40
1567	1902.5	18	»	4	7	26	3	3	45
2626	1905.6	30	»	4	6	18	4	3	30
2509	1904.6	42	»	5	6	22	3	3	29
1607	1902.5	54	»	6	7	25	4	3	40
1608	1902.5	19 6	»	6	5	24	3	3	34
1749	1902.6	18	»	6	5	24	3	3	45
1614	1902.5	30	»	6	6	25	4	3	51
1703	1902.6	42	»	4	5	24	3	3	63
1394	1901.6	54	»	4	6	24	4	4	56
1772	1902.6	18 0	+ 52	4	5	24	3	3	31
1670	1902.5	12	»	3	6	25	3	3	51
1677	1902.5	24	»	4	5	24	4	3	38
2722	1907.6	36	»	3	6	20	4	4	34
1738	1902.5	48	»	3	5	24	4	3	39
1761	1902.6	19 0	»	4	5	24	3	3	44
2624	1905.6	12	»	4	5	26	3	3	40
1579	1902.5	24	»	3	5	20	3	3	45
1581	1902.5	48	»	5	6	23	3	3	49
1635	1902.5	18 6	+ 53	4	7	24	4	5	33
1736	1902.6	18	»	6	7	18	3	3	42
1770	1902.6	30	»	3	5	22	3	3	25
1783	1902.6	18 0	+ 54	4	8	21	4	3	24
1708	1902.5	12	»	6	6	18	4	4	35
1763	1902.6	24	»	4	7	24	0.025	4	37
In media:	1903.0	. . . .		a ± 0″.40		b ± 0″.59	23	a_1 ± 0″.30	b_1 ± 0″.33	40

(1) Cfr. *Catalogo astrografico di Catania*. Vol. III, parte 5ª e 6ª, p. VI.

Nel passare dalla riduzione I alla II il Res α si riduce di un quarto, il Res δ si riduce praticamente a metà, ciò che fornisce un indice abbastanza eloquente dell'aumento di precisione delle costanti. Nessuna meraviglia: i moti propri di Yale IV, ottenuti circa 40 anni dopo, sono naturalmente ben più esatti di quelli che si potevano conoscere all'epoca di A. G. Cambr. Mass. L'aumento notevole nel numero medio delle stelle di riferimento da 23 a 40 contribuisce certo anche in buona parte a questo aumento di precisione. Per questo solo fatto, se le misure delle stelle precedenti e di quelle aggiunte fossero tutte di ugual precisione, dovrebbe aversi una diminuzione dell'errore medio nel rapporto $\sqrt{40\ 23} = 1.32$. Dai valori medi su riportati appare invece che l'e. m. globale si riduce nel rapporto $\sqrt{a^2 + b^2 / a_1^2 + b_1^2} = 1.60$ cioè in misura sensibilmente maggiore. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che noi abbiamo introdotto nei nostri nuovi calcoli, non solo nuove posizioni equatoriali α, δ più esatte delle 1000 stelle di riferimento, ma anche nuove misure delle coordinate rettilinee x, y riuscite più precise, sia per la superiorità e comodità del nuovo macromicrometro di Cooke in confronto all'antico apparecchio di Gautier, sia per una più accurata valutazione dell'errore di *coma* particolarmente sensibile nelle misure della y. Ciò va d'accordo col fatto che l'aumento di precisione è più sensibile per la coordinata y che per la x, come dimostrano i rapporti:

$$a/a_1 = 1.33 \qquad b_1/b_1 = 1.79$$

Riassumendo, l'introduzione delle posizioni e dei moti propri di Yale IV e delle nuove misure delle stelle di riferimento delle lastre di Catania ha permesso di ridurre a $^6/_{10}$ del valore primitivo l'errore medio delle posizioni fotografiche. La maggior mole di lavoro numerico e di misure micrometriche richiesta dall'aumento del numero di stelle di riferimento ha conseguito dunque pienamente il suo scopo.

Non meno notevole appare l'aumento di precisione, quando venga valutato in base ai più accurati calcoli di costanti eseguiti intorno al 1903 (epoca media delle nostre lastre) nell'Osservatorio di Greenwich.

Da una Nota dell'illustre Sir Frank W. Dyson [1] relativa a riduzioni di lastre col metodo di Turner, cioè con 6 costanti [2], rileviamo che i residui medi lasciati dal calcolo di costanti della L. 4807 (epoca 1900 gennaio 27) con 18 stelle di riferimento — di cui si possedevano osservazioni meridiane recenti, talchè era da escludere l'eventuale influenza dei moti propri — importavano:

$$\text{Res } \alpha = \pm 0.''54 \qquad \text{Res } \delta = \pm 0.''41$$

(1) *Note on Plate Constants.* «M. N.», LXIII, p. 134 (Jan. 1903).

(2) *Nel Catalogo di Catania* le riduzioni vengono fatte in base a 4 sole costanti che consentono naturalmente minore approssimazione nei risultati in confronto alle riduzioni con 6 costanti.

valori casualmente quasi identici, ma scambiati, rispetto a quelli risultanti dalla riduzione I delle nostre 22 lastre.

Giustamente il Prof. Dyson considerava questi residui come *extremely satisfactory*. Ciò non esclude peraltro che le lastre di Catania fotografate intorno alla stessa epoca diano ora (certo in grazia del maggior numero di stelle di riferimento, della miglior conoscenza dei moti propri e un poco anche in grazia delle nuove misure) risultati ancora più soddisfacenti, come esprimono le cifre ricavate dalle sopradette 22 lastre

$$\text{Res}\,\alpha = \pm 0.''30 \qquad \text{Res}\,\delta = \pm 0.''33,$$

sopratutto quando si consideri che le nostre riduzioni comprendono tutte le stelle di Yale presenti sulle lastre, anche quelle in posizione sfavorevole che normalmente si sogliono escludere dai calcoli di costanti.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse.* Nota II [1] di N. Spampinato, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

6. Il teorema fondamentale come estensione nel campo bicomplesso di un teorema del Levi-Civita. – Si ricordi che nell'algebra C′ dei numeri bicomplessi è contenuta, come sotto-algebra, l'algebra ordinaria dei numeri complessi. Se in C′ consideriamo le unità u e v con la tabella di moltiplicazione

$$u^2 = u \quad , \quad uv = vu = 0 \quad , \quad v^2 = v \, , \tag{8}$$

un numero bicomplesso $x = \lambda u + \mu v$ *è complesso quando e solo quando* λ e μ *sono reali.* Invece lo stesso numero bicomplesso $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ espresso nel sistema di unità v_1 e v_2 (che mette in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicomplessi) *è complesso quando e solo quando le coordinate* x_1 *e* x_2 *sono complesse coniugate.* Ciò segue dal fatto che le coordinate λ, μ e x_1, x_2 di uno stesso numero bicomplesso nei due sistemi di unità u, v e v_1, v_2, sono legate dalle relazioni

$$x_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad x_2 = \lambda - i\mu \, , \tag{9}$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1935.

perchè le unità suddette sono legate dalle relazioni

$$(10) \qquad v_1 = \frac{u - iv}{2} \quad , \quad v_2 = \frac{u + iv}{2} .$$

Ciò posto consideriamo una coppia di numeri bicomplessi (x, y) e poniamo

$$(11) \qquad x = x_1 v_1 + x_2 v_2 = \lambda u + \mu v \quad , \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 = \nu u + \pi v .$$

Sarà perciò

$$(12) \qquad x_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad x_2 = \lambda - i\mu \quad , \quad y_1 = \nu + i\pi \quad , \quad y_2 = \nu - i\pi .$$

Le (12) determinano nell'S_4 complesso, dove sono rappresentate le coppie di numeri bicomplessi, una trasformazione di coordinate: il punto P immagine della coppia (x, y) ha nel *primo sistema* le coordinate (x_1, x_2, y_1, y_2), nel *secondo sistema* le coordinate (λ, μ, ν, π). Ne segue che *la coppia di numeri bicomplessi* (x, y) *è formata con numeri complessi quando e solo quando la sua immagine* P *nell'*S_4 *complesso è reale rispetto al secondo sistema di coordinate, rispondente alle unità* u *e* v*, ovvero quando e solo quando, nel primo sistema di coordinate, è* $x_1 = \bar{x}_2$, $y_1 = \bar{y}_2$ *, indicando con* $\bar{x}_2$ *e* $\bar{y}_2$ *i coniugati di* x_2 *e* y_2 .

Da quanto sopra è detto risulta che i punti P dell'S_4 complesso immagini delle coppie di *numeri complessi costituiscono l'*S'_4 *reale (rispetto al secondo sistema) contenuto nell'*S_4 *complesso* (questo S_4 *reale*, nel primo sistema di coordinate, è rappresentato dalle equazioni $x_1 = \bar{x}_2$, $y_1 = \bar{y}_2$). *In esso si ha la ordinaria rappresentazione delle coppie di numeri complessi* $x = \lambda u + \mu v$, $y = \nu u + \pi v$ *, con* λ, μ, ν, π *reali.*

Ora una tela T′ dell'S_4 complesso, se è costituita da punti *tutti reali rispetto al secondo sistema*, cioè se appartiene all'S'_4 *reale* contenuto nell'S_4 complesso, è una *superficie reale* (a due dimensioni reali) di questo S'_4 reale. Inoltre se si vuole assegnare una funzione bicomplessa del punto variabile su T′, data dalla (6), che sia in particolare *complessa*, cioè che assuma nei punti di T′ valori complessi, basta che la funzione $z_2(t, p)$ che comparisce nella (6), anzichè sceglierla ad arbitrio, si supponga eguale alla funzione coniugata di $z_1(t, p)$. Ma allora, applicando il teorema III), resta assicurata l'esistenza di una funzione bicomplessa $z(x, y)$ derivabile totalmente, o olomorfa secondo Scorza Dragoni, definita in un intorno quadridimensionale D (*dimensione complessa*) della superficie reale T′, che su T′ si riduca alla funzione *complessa* prefissata.

Per un teorema del Levi-Civita, se la superficie T′ dell'S'_4 reale *non è caratteristica*, esiste una ed una sola funzione complessa olomorfa $f(x, y)$ delle variabili complesse x, y, definita in un intorno D′ di T′, a quattro dimensioni reali, dell'S'_4 reale, e che sulla T′ si riduce alla funzione com-

plessa $z^*(x, y)$ assegnata. Ma allora l'intorno D′ deve appartenere all'intorno D di T′, a quattro dimensioni complesse, e la funzione bicomplessa $z(x, y)$, olomorfa secondo Scorza Dragoni, su D′ si deve ridurre alla funzione complessa $f(x, y)$ perchè questa è *l'unica* funzione olomorfa (complessa e quindi anche bicomplessa) definita nell'intorno D′ che su T′ si riduca, come $z(x, y)$, alla funzione $z^*(x, y)$ assegnata. Si ha pertanto:

III′′) *Nelle ipotesi del teorema* III), *se, in particolare, la tela* T′ *è una superficie dell'* S'_4 *reale, non caratteristica, e la funzione assegnata* $z^*(x, y)$ *è complessa, l'intorno* D *di* T′, *a* 4 *dimensioni complesse, contiene un intorno* D′ *di* T′, *a* 4 *dimensioni reali, appartenente all'* S'_4 *reale, nei cui punti la funzione bicomplessa* $z(x, y)$ *su* D′ *si riduce alla funzione complessa olomorfa* $f(x, y)$ *che deve esistere nell'intorno di* T′, *per il teorema di Levi–Civita, subordinante in* T′ *la funzione* $z^*(x, y)$ *assegnata.*

La proposizione III′′) dimostra che il teorema III), interpretazione nell'S_4 complesso del teorema fondamentale, è l'estensione nel campo bicomplesso del teorema fondamentale del Levi-Civita per le funzioni olomorfe di due variabili complesse. Questa osservazione fa prevedere che il teorema del Levi–Civita nel campo complesso si possa dedurre come corollario del teorema III). Bisogna dimostrare, a tal fine, indipendentemente dal teorema del Levi-Civita:

1° che esiste nell'S'_4 reale un intorno quadridimensionale D′ della superficie non caratteristica T′ contenuto in D;

2° che la funzione bicomplessa $z(x, y)$ assume nei punti di D′ valori complessi.

Ora la ipotesi che la tela T′, di equazioni (5′), appartenga all'S'_4 reale è espressa dalle condizioni, da essere soddisfatte in (R),

$$(13) \qquad x_1(t, p) = \bar{x}_2(t, p) \quad , \quad y_1(t, p) = \bar{y}_2(t, p).$$

Ne segue che le funzioni [5], prolungamento delle (5) nel corpo complesso, soddisfano alle condizioni

$$(14) \qquad x_1(r, q) = \bar{x}_2(r, q) \quad , \quad y_1(r, q) = \bar{y}_2(r, q).$$

Infatti si osservi, per es., che la funzione complessa olomorfa

$$(15) \qquad g(r, q) = x_1(r, q) - \bar{x}_2(r, q)$$

si annulla, per l'ipotesi fatta, in ogni punto di (R), e quindi se è una effettiva funzione di *due* variabili complesse, cioè se è definita in un intorno quadridimensionale Q del rettangolo (R), si annullerà nell'intorno quadridimensionale di ogni punto P di (R), perchè si annulla nell'intorno bidimensio-

nale di P posto in (R) [1]. Quindi la $g(r, q)$ è nulla nell'intorno Q di (R). Ciò dimostra la prima delle (14), che vale pertanto nell'intorno Q se $x_1(r, q)$ e $x_2(r, q)$ non si riducono a funzioni di una sola variabile. Analogamente se $y_1(r, q)$ e $y_2(r, q)$ non si riducono a funzioni di una sola variabile, si dimostra la seconda delle (14) in un intorno quadridimensionale di (R), che si può supporre coincidente con Q.

Mentre il punto (r, q) descrive l'intorno quadridimensionale Q di (R) il punto $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$ dell'S_4 complesso descrive un intorno quadridimensionale D' di T' posto in S'_4 perchè, per la (14), risulta P appartenente sempre all'S'_4 reale.

La dimostrazione dell'esistenza dell'intorno quadridimensionale D' di T', posto nell'S'_4 reale, cade in difetto se le funzioni $x_1(r, q)$, $x_2(r, q)$, $y_1(r, q)$ e $y_2(r, q)$ si riducono a funzioni di una sola variabile complessa. Ciò si verifica effettivamente nel caso che la T' sia una superficie caratteristica dell'S'_4 reale, e quindi, prolungata nel corpo complesso, dà una superficie caratteristica dell'S_4 complesso, cioè una superficie che proiettata dalle rette improprie dei piani coordinati $\rho_1(x_1, y_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2)$ rispettivamente su ρ_2 e ρ_1, deve dare, non regioni piane, ma curve, e quindi le funzioni in questione sono funzioni, non di due, ma di una sola variabile.

Ma se la T' non è caratteristica questa circostanza non si può verificare; in tal caso è dimostrata l'esistenza dell'intorno D' di T' posto in S'_4.

La condizione che la funzione bicomplessa $z^*(x, y)$ assuma in T' valori complessi è rappresentata dalla condizione, da valere in (R),

$$z_1(t, p) = \bar{z}_2(t, p). \tag{16}$$

Prolungando queste funzioni nel campo complesso si vede che la funzione

$$H(r, q) = z_1(r, q) - \bar{z}_2(r, q) \tag{16'}$$

si annulla in ogni punto P di (R) e quindi nell'intorno di P posto in Q. Ciò equivale ad affermare che, non solo in T', ma in tutto D', si ha

$$z_1(r, q) = \bar{z}_2(r, q), \tag{17}$$

e quindi la funzione bicomplessa

$$z(x, y) = z_1(r, q)\, v_1 + z_2(r, q)\, v_2 \tag{18}$$

assume valori complessi non solo nei punti di T', ma anche nei punti di D'. Resta pertanto dimostrato che il teorema del Levi-Civita relativo alle superficie reali T' non caratteristiche, può dedursi come corollario del teorema III).

(1) Si veda in proposito la nota a pie' di pagina (2) a p. 798 della Nota del Severi citata in (1), p. 2, della Nota I.

7. Le V_3 caratteristiche. – Una V_3 analitica dell'S_6 complesso si dirà caratteristica se appartiene ad una V_4 caratteristica.

Siano

$$(19)\quad \begin{cases} x_1 = x_1(p_1, p_2, p_3) \ , & y_1 = y_1(p_1, p_2, p_3) \ , & z_1 = z_1(p_1, p_2, p_3) \\ x_2 = x_2(p_1, p_2, p_3) \ , & y_2 = y_2(p_1, p_2, p_3) \ , & z_2 = z_2(p_1, p_2, p_3) \end{cases}$$

le funzioni complesse olomorfe delle tre variabili complesse indipendenti p_1, p_2, p_3, rappresentanti una V_3 analitica. Perchè la V_3 sia caratteristica, cioè appartenga ad una V_4 caratteristica, occorre e basta che le sue proiezioni da σ'' e σ' rispettivamente su σ_1 e σ_2, non siano a tre dimensioni, ma al più a due dimensioni, e quindi occorre e basta che le funzioni x_1, y_1, z_1 (x_2, y_2, z_2) si riducano a funzioni di due variabili complesse, cioè che sia

$$(20)\qquad \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = 0 \qquad \frac{\partial(x_2, y_2, z_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = 0 .$$

Ovvero, posto $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$, $z = z_1 v_1 + z_2 v_2$, occorre e basta che sia

$$(20')\qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = 0 .$$

Si ha pertanto il teorema:

IV) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una* V_3 *analitica dell'*S_6 *complesso, di equazioni* (19), *sia caratteristica è che il determinante jacobiano delle funzioni bicomplesse* $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$, $z = z_1 v_1 + z_2 v_2$ *delle variabili complesse* p_1, p_2, p_3 *sia nullo.*

8. Un teorema relativo alle trivarietà dell'S_6 complesso. – Consideriamo nell'S_6 complesso una *trivarietà* analitica, cioè una varietà complessa a tre dimensioni *reali*, rappresentata parametricamente dalle funzioni complesse

$$(21)\quad \begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3) \ , & y_1 = y_1(t_1, t_2, t_3) \ , & z_1 = z_1(t_1, t_2, t_3) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3) \ , & y_2 = y_2(t_1, t_2, t_3) \ , & z_2 = z_2(t_1, t_2, t_3) \end{cases}$$

olomorfe, delle tre variabili *reali* indipendenti t_1, t_2, t_3, definite in un parallelepipedo

$$(P)\qquad t_j' \leqq t_j \leqq t_j'' \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Prolungando le funzioni (21) nel corpo complesso si ottengono sei funzioni complesse di tre variabili complesse p_1, p_2, p_3, date, per es., dalle (19), e rappresentanti una varietà analitica V in generale a tre dimensioni complesse. Se la V risulta a due dimensioni, cioè una superficie V_2, la tri-

varietà data, che indicheremo con W_3, sarà *superficiale*, cioè appartiene ad una superficie. Per la V_2 passa qualche V_4 caratteristica e precisamente ne passa una sola se la V_2 non è seminulla nè semicaratteristica, ne passano infinite nel caso contrario. Se la W_3 è superficiale per essa passa, pertanto, una o infinite V_4 caratteristiche. Se la W_3 non è superficiale, essa appartiene ad una V_3 analitica, e per la W_3 passa una V_4 caratteristica quando e solo quando risulta caratteristica detta V_3, cioè, per il teorema IV), quando e solo quando le funzioni bicomplesse

$$(22)\quad x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad , \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \quad , \quad z = z_1 v_1 + z_2 v_2$$

delle variabili complesse p_1, p_2, p_3 soddisfano all'equazione differenziale

$$(20')\quad \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (p_1, p_2, p_3)} = 0 .$$

Questa condizione è anche soddisfatta nel caso che la W_3 sia superficiale, perchè in tal caso le (19), prolungamento nel corpo complesso delle (21), dovendo rappresentare una superficie, soddisfano le (20) e quindi la (20'). Si ha pertanto:

IV') *Per una trivarietà* W_3 *dell'*S_6 *complesso rappresentata dalle funzioni olomorfe* (21), *non superficiale, passa una* V_4 *caratteristica quando e solo quando le funzioni bicomplesse* (22), *aventi per coefficienti i prolungamenti nel corpo complesso delle funzioni* (21), *soddisfano all'equazione differenziale* (20'). *Se la* W_3 *è superficiale, nel qual caso la* (20') *è sempre soddisfatta dalle funzioni* (22), *per essa passa una o infinite* V_4 *caratteristiche secondo che la superficie contenente la* W_3 *non è o è semicaratteristica oppure seminulla.*

9. Interpretazione del teorema IV') nell'S_4 complesso. – Il teorema IV'), come il teorema II'), si può interpetrare nell'S_4 complesso e si ha:

V) *Fissata nell'*S_4 *complesso una trivarietà* W_3', *rappresentata dalle funzioni olomorfe*

$$(23)\quad \begin{cases} x_1' = x_1 (t_1, t_2, t_3) \quad , \quad y_1 = y_1 (t_1, t_2, t_3) \\ x_2 = x_2 (t_1, t_2, t_3) \quad , \quad y_2 = y_2 (t_1, t_2, t_3) \end{cases}$$

delle tre variabili indipendenti reali t_1, t_2, t_3 *e una funzione bicomplessa*

$$z (x, y) = z_1 (t_1, t_2, t_3) v_1 + z_2 (t_1, t_2, t_3) v_2$$

con z_1 *e* z_2 *funzioni complesse olomorfe delle tre variabili reali* t_1, t_2, t_3, *definite, insieme alle* (23), *in uno stesso parallelepipedo* (P), *cioè una funzione bicomplessa del punto variabile nella trivarietà* W_3, *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione bicomplessa* $Z (x, y)$, *totalmente derivabile, o olomorfa secondo Scorza Dragoni, rispetto alle due variabili bicomplesse*

$x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, e $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$, *definita in un intorno quadridimensionale (dimensione complessa) di* W_3 *che su* W_3 *si riduca alla funzione bicomplessa* $z(x, y)$ *prefissata, è che le funzioni bicomplesse*

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad , \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \quad , \quad z = z_1 v_1 + z_2 v_2 ,$$

con i coefficienti dati dalle funzioni $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ *(prolungate nel corpo complesso) delle tre variabili complesse* p_1, p_2, p_3, *soddisfacciano all'equazione differenziale*

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_1, p_3)} = 0 .$$

10. Il teorema IV') come estensione nel campo bicomplesso di un teorema del Severi. – Il Severi ha dimostrato [1] che il problema della ricerca delle condizioni locali necessarie e sufficienti perchè una funzione complessa olomorfa f del punto di una varietà tridimensionale (dimensione reale) Δ dell'S_4' reale, con le coordinate intrinseche $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, sia ivi traccia di una funzione olomorfa $F(x, y)$ dell'ambiente è risoluto nel senso che la f soddisfi all'equazione differenziale

$$\frac{\partial(f, x, y)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} = 0 .$$

Si scorge subito che il teorema V) è l'estensione nel campo bicomplesso del teorema del Severi su ricordato, teorema fondamentale per la teoria delle funzioni olomorfe di due variabili complesse x e y, perchè su di esso è fondata la risoluzione generale del problema del Dirichlet per le funzioni biarmoniche, risoluzione dovuta al Severi. Ciò si dimostra con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte nel n. 6 relativamente al teorema del Levi-Civita là ricordato, e si dimostra inoltre che il teorema del Severi si può considerare come conseguenza del teorema V). A tal fine si osservi che una trivarietà dell'S_4 complesso, se appartiene, in particolare, all'S_4' reale contenuto nell'S_4 complesso, è un'ordinaria V_3 reale di questo spazio.

(1) F. Severi, loc. cit. (1), p. 2, Nota I; n. 2.

Matematica (Geometria). — *Sull'applicabilità proiettiva dei reticolati piani.* Nota[1] di G. Palozzi, presentata dal Socio G. Fubini.

1. In una Nota, pubblicata in questi « Rendiconti »[2], ho esteso alla Geometria proiettiva delle superficie il problema dell'applicabilità o corrispondenza conforme, ed ho mostrato come si possa dare a questa geometria, per ciò che riguarda il problema dell'applicabilità (conforme o effettiva), la più grande analogia con la Geometria metrica. Più precisamente, il risultato ottenuto può riassumersi dicendo che, se si modifica alquanto la definizione di Fubini sull'applicabilità di due superficie, la corrispondenza che resta definita fra le due superficie è caratterizzata dalla proporzionalità o dall'uguaglianza dei loro elementi lineari proiettivi (e per conseguenza in quest'ultimo caso coincide con l'applicabilità di Fubini), a seconda che il contatto di cui parla la definizione si suppone geometrico o analitico. Nel primo caso ho dato alla corrispondenza il nome di *applicabilità proiettiva impropria;* nel secondo di *applicabilità proiettiva propria.*

La modificazione introdotta nella definizione di Fubini consiste nell'imporre che il contatto (geometrico o analitico) del secondo ordine venga realizzato lungo le asintotiche anzichè lungo due curve omologhe qualunque. Ora è noto che fra i reticolati piani costituiscono una categoria particolarmente notevole i reticolati asintotici, ottenuti proiettando da un punto su un piano le asintotiche di una superficie non sviluppabile. Si presentava quindi naturale domandarsi se due reticolati asintotici, provenienti da due superficie che si corrispondessero in un'applicabilità proiettiva secondo la nuova definizione, godessero anch'essi di una proprietà analoga a quella che definisce la corrispondenza delle superficie.

La risposta affermativa che si può dare a questa domanda mi ha indotto ad estendere ai reticolati piani la definizione di applicabilità proiettiva da me proposta per le superficie; ed una tale estensione – in cui le due specie di contatto (geometrico o analitico) sono tenute affatto distinte – mi sembra tanto più opportuna in quanto che la definizione data da Čech (per l'applicabilità proiettiva propria), del tutto soddisfacente dal punto di vista della condizione analitica a cui porta, non mi pare che abbia tutta la simmetria desiderabile dal punto di vista geometrico, poichè vi si parla per l'intorno

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1935.
(2) Vol. XX, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 9.

del *primo ordine* di *contatto analitico* e per quello del *secondo ordine* di *contatto geometrico* [1].

Nella presente Nota, oltre alla suddetta estensione, stabilisco una condizione geometrica per l'applicabilità proiettiva propria di due reticolati e, incidentalmente, dò una nuova interpretazione geometrica delle *forme elementari* e della *forma associata* ad un reticolato.

2. Siano R e $\overline{\mathrm{R}}$ due reticolati piani in corrispondenza biunivoca. Indicate con x e $\bar{x}$ le coordinate proiettive omogenee di due punti del piano, comune sostegno di R e $\overline{\mathrm{R}}$, che descrivano rispettivamente questi due reticolati, si potranno rappresentare R e $\overline{\mathrm{R}}$ con le equazioni

$$(1) \qquad x = x(u, v) \qquad\qquad (2) \quad \bar{x} = \bar{x}(u, v)$$

e si potrà supporre che la corrispondenza sia definita da valori uguali dei parametri u, v.

Le (1) e (2) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i piani sovrapposti descritti da x e da $\bar{x}$, e in questa corrispondenza ad una curva C del primo piano definita dalle (1) quando in esse si ponga $u = u(t), v = v(t)$ corrisponde la curva $\overline{\mathrm{C}}$ del secondo piano definita da $\bar{x} = \bar{x}(u(t), v(t))$.

Ora è più che noto che ogni corrispondenza biunivoca fra due superficie subordina sempre una proiettività fra i fasci di direzioni omologhe uscenti da punti omologhi [2]. Nel caso dei reticolati (1) e (2), fissata una coppia di punti omologhi O, $\overline{\mathrm{O}}$, si potrà dunque portare con una stessa proiettività P il punto O in $\overline{\mathrm{O}}$ e ogni curva C uscente da O in una curva $\overline{\overline{\mathrm{C}}}$ per $\overline{\mathrm{O}}$ avente in questo punto un contatto del primo ordine con la curva $\overline{\mathrm{C}}$ omologa di C; e, in particolare, la proiettività P porterà le linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ di R uscenti da O in due linee per $\overline{\mathrm{O}}$ aventi in un contatto del primo ordine rispettivamente con le linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ di $\overline{\mathrm{R}}$ uscenti da $\overline{\mathrm{O}}$. Noi ci domandiamo: *quand'è che le trasformate mediante* P *delle linee* $u = \text{cost.}$ *e* $v = \text{cost.}$ *di* R *hanno un contatto (non del primo, ma) del secondo ordine rispettivamente con le linee* $u = \text{cost.}$ *e* $v = \text{cost.}$ *di* $\overline{\mathrm{R}}$?

La risposta è che: *ciò avviene quando i reticolati* R *e* $\overline{\mathrm{R}}$ *hanno gli elementi lineari proiettivi proporzionali, e soltanto allora.*

Premesso che le x date dalle (1) soddisfano a un sistema di equazioni del tipo

$$(3) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + px \\ x_{vv} = \gamma x_u + \delta x_v + qx \\ x_{uv} = a x_u + b x_v + cx \end{cases}$$

(1) Ved. Fubini e Čech, *Introduction a la géomètrie projective différéntielle des surfaces.* Paris, Gauthier-Villars, cap. X, n. 56, p. 161.

(2) Ved., per es., Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale.* Bologna, Zanichelli, vol. 1°, parte 1ª, cap. 3°, § 52.

$$\alpha = |x_{uu}, x_v, x| : \Delta \quad , \quad \beta = |x_u, x_{uu}, x| : \Delta$$

$$\rho = |x_u, x_v, x_{uu}| : \Delta ; \cdots ; \Delta = |x_u, x_v, x| = 0$$

e le $\bar{x}$ ad un sistema analogo con coefficienti $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \cdots$, osserviamo che per il contatto del secondo ordine lungo le linee $u = \text{cost}$ o le linee $v = \text{cost}$ non si utilizza mai la terza equazione. Dopo questa semplice osservazione non c'è che riferirsi alla dimostrazione data, nel caso analogo, per le superficie [1].

Chiamando *applicabilità proiettiva impropria* la corrispondenza fra i reticolati (1) e (2) quando, per ogni coppia di punti omologhi $O, \overline{O}$, esiste una proiettività che porta O in $\overline{O}$, ogni curva C uscente da O in una curva $\overline{\overline{C}}$ avente in $\overline{O}$ un contatto del primo ordine con la curva $\overline{C}$ omologa di C, e le linee $n = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ di (1) in linee aventi un contatto del secondo ordine rispettivamente con le linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ di (2), si può dunque dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due reticolati si corrispondano in un'applicabilità proiettiva impropria è che i loro elementi lineari proiettivi siano proporzionali.

3. Mutando nella precedente definizione le parole « applicabilità proiettiva impropria » in « applicabilità proiettiva propria » e « contatto » in « contatto analitico », si trova che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due reticolati si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria è che i loro elementi lineari primitivi siano uguali.

Che la condizione sia necessaria risulta dal fatto che la definizione di applicabilità proiettiva propria è più restrittiva della definizione di applicabilità di Čech, e che questa è caratterizzata appunto dall'uguaglianza degli elementi lineari proiettivi dei due reticolati. Che sia poi sufficiente, si può pure far discendere da un'osservazione di Čech [2], il quale ha notato che, se due reticolati R e $\overline{R}$ hanno eguali elementi lineari proiettivi, fra le ∞^2 proiettività che portano un punto O di R nel punto omologo $\overline{O}$ di $\overline{R}$, ogni curva C di R uscente da O in una curva $\overline{\overline{C}}$ avente in $\overline{O}$ un contatto analitico del primo ordine con la curva $\overline{C}$ omologa di C, e le linee di R uscenti da O in linee aventi in $\overline{O}$ un contatto (geometrico) del secondo ordine rispettivamente con le linee omologhe di $\overline{R}$, ve n'è *una* per cui questo contatto del secondo ordine è analitico.

(1) Nella Nota già citata.

(2) Ved. Fubini e Čech, op. cit., cap. X, n. 56, p. 163.

4. Nel caso di reticolati asintotici, basta ricordare che l'elemento lineare d'una superficie è uguale a quello di un reticolato proiezione delle sue asintotiche [1], per concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due reticolati asintotici si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria o impropria è che si corrispondano in un'applicabilità proiettiva rispettivamente propria o impropria le due superficie da cui provengono i reticolati.

5. Come per le superficie, così anche per i reticolati il contatto analitico del secondo ordine lungo le linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ porta di conseguenza il contatto analitico del primo ordine (almeno) lungo ogni coppia di curve omologhe. Perciò:

Affinchè i reticolati (1) *e* (2) *si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria occorre e basta che, per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{O}$, *esista una proiettività che porti* O *in* $\overline{O}$ *e le linee* $u = \text{cost.}$ *e* $v = \text{cost.}$ *di* (1) *in linee aventi in* $\overline{O}$ *un contatto analitico del secondo ordine rispettivamente con le linee* $u = \text{cost.}$ *e* $v = \text{cost.}$ *di* (2).

Si può dunque definire l'applicabilità proiettiva propria di due reticolati facendo intervenire nella definizione esclusivamente le linee dei reticolati stessi; ed allora si potrebbe introdurre il concetto di reticolati *parzialmente applicabili*, quando la condizione per l'applicabilità proiettiva propria è verificata soltanto per le linee $u = \text{cost.}$ o soltanto per le linee $v = \text{cost.}$ Si trova che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè, per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{O}$, *esista una proiettività che porti* O *in* $\overline{O}$ *e la linea* $u = \text{cost.}$ ($v = \text{cost.}$) *di* (1) *uscente da* O *in una linea per* $\overline{O}$ *avente ivi un contatto analitico del secondo ordine con la linea* $u = \text{cost.}$ ($v = \text{cost.}$) *di* (2) *uscente da questo punto (cioè affinchè si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria i sistemi di linee* $u = \text{cost.}$ ($v = \text{cost.}$) *dei reticolati* (1) *e* (2)*), è che sia* $\gamma = \bar{\gamma}$ ($\beta = \bar{\beta}$) *o, se si vuole, che la forma elementare* $\gamma \dfrac{dv^2}{du}\left(\beta \dfrac{du^2}{dz}\right)$ *di* (1) *eguagli la corrispondente forma elementare di* (2).

Ciò posto, sia C una curva uscente da O in direzione $\dfrac{du}{dv}$ e O′ un punto di essa, distinto da O: i punti O e O′ sono vertici di una stessa maglia del reticolato (1). Siano O_1 e O_2 gli altri due vertici di questa maglia: precisamente, O_1 (O_2) sia il punto in cui la linea $u = \text{cost.}$ ($v = \text{cost.}$) uscente da O è incontrata dalla linea $v = \text{cost.}$ ($u = \text{cost.}$) uscente da O′. Il punto O′ ha coordinate del tipo

$$x' = x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \cdots$$

(1) Ved. Fubini e Čech, op. cit., cap. X, n. 54, p. 156.

e il punto O_1'

$$x_1' = x + x_v\,dv + \frac{1}{2}x_{vv}\,dv + \cdots$$

La retta di questi due punti incontrerà la tangente (x, x_v) alla linea $u = \text{cost.}$ uscente da O in un punto V di coordinate $X = \lambda x' + x_1'$ con λ determinato in modo che sia $|X, x, x_v| = 0$ cioè, per le (3), con $\lambda = -\frac{1}{2}\gamma\frac{dv^2}{du} + \cdots$ Sia poi M un altro punto qualunque della retta O', O_1', purchè tale che la sua posizione limite, quando O' tende ad O su C, sia distinta da O; il punto M avrà coordinate $\mu x' + x_1'$ con $\mu = -1 + \cdots$

Il limite del birapporto $(O_1' O' V M)$, *quando* O' *tende ad* O *su* C, *vale* $\frac{1}{2}\gamma\frac{dv^2}{du}$.

Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria i sistemi delle linee* $u = \text{cost.}$ *dei reticolati* (1) *e* (2) *è che (in punti omologhi e per direzioni omologhe) il limite del birapporto* $(O_1' O' V M)$ *eguagli il limite del birapporto corrispondente* $(\overline{O}_1' \overline{O}' \overline{V} \overline{M})$.

Analoga condizione si ottiene per i sistemi di linee $v = \text{cost.}$, partendo dal birapporto $(O_2' \overline{O}' U N)$, ove U è il punto dell'intersezione della $O' O_2'$ con la tangente (x, x_u) e N un punto di questa retta la cui posizione limite, quando O' tende ad O su C, sia diversa da O.

6. Nel numero precedente si è trovata in sostanza una nuova interpretazione geometrica delle forme elementari di un reticolato [1]. Aggiungerò che, con un procedimento del tutto analogo, si può ottenere anche una interpretazione geometrica della forma $\beta\gamma\,du\,dv$ associata ad un reticolato.

Si consideri la retta che congiunge O_1' col punto O_2' di coordinate

$$x_2' = x + x_u\,du + \frac{1}{2}x_{uu}\,du^2 + \cdots$$

e siano H e K i punti nei quali questa retta si appoggia alle tangenti (x, x_u) e (x, x_v) rispettivamente. Il punto H ha le coordinate $hx_1' + x_2'$ con $h = -\frac{1}{2}\beta\frac{du^2}{dv} + \cdots$; e k le coordinate $kx_1' + x_2'$ con $k = -2\frac{du}{\gamma\,dv^2}$.

Si trova che: *il limite del birapporto* $(O_1' O_2' K H)$, *quando* O' *tende ad* O *su* C, *vale* $\frac{1}{4}\beta\gamma\,du\,dv$.

(1) Che è da ravvicinare a quella data da Bompiani per le forme elementari di una superficie. Ved. la Nota di questo autore: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie.* «Boll. Unione Matem. Ital.», 5, 1926.

Matematica (Analisi). — *Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre.* Nota [1] di U. Broggi, presentata dal Socio G. Fubini.

È noto che, se $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} < 1$, la serie $\sum A_n L_n(t)$, dove

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{(-t)^\nu}{\nu!}$$

è il polinomio di Laguerre di ordine n, converge assolutamente in tutto il piano complesso e uniformemente in ogni area finita chiusa dello stesso.

Essa è pertanto lo sviluppo di una funzione intera. Ma la classe delle funzioni intere sviluppabili in serie di polinomi di Laguerre (o di polinomi generalizzati di Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(t) = e^t t^{-\alpha}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^{n+\alpha})),$$

non può non apparire ristretta a chi osservi che già nel caso della funzione e^t gli integrali di Laguerre definenti i coefficienti dello sviluppo divergono.

Se alla funzione $\varphi(t)$ corrisponde lo sviluppo $\sum A_n L_n(t)$ è infatti

$$A_n = \int^{\infty} e^{-t} L_n(t)\varphi(t)\,dt$$

e se $\varphi(t) = e^t$, l'integrale al secondo membro diverge qualunque sia n (così come diverge qualunque sia n l'integrale definente i coefficienti B_n dello sviluppo di e^t in serie di polinomi generalizzati di Laguerre) [2].

Una classe di funzioni intere analiticamente importante – quella delle funzioni $\varphi(t)$ di tipo esponenziale – tali cioè che

$$\varphi(t) < e^{\alpha t}$$

dove α è una costante, è invece suscettibile di uno sviluppo della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(\lambda t)$$

dove λ è un parametro positivo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1935.

(2) È invece $e^{-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} L_n(t)$, e quindi anche $e^t = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n L_n(-t)$. Nel caso speciale la difficoltà può venire agevolmente girata.

Vale infatti il teorema, che ci proponiamo di dimostrare:

« Se la funzione intera $\varphi(t)$ è di tipo esponenziale, può venire definito un $\lambda_0 > 0$ tale che se è $\lambda > \lambda_0$ si ha uniformemente in ogni area finita chiusa del piano t

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n L_n(\lambda t).$$

Se è

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$$

e

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots$$

gli h_n, $(n = 0, 1, \cdots)$, sono i coefficienti dello sviluppo di $f(z)$ in serie di potenze di $\frac{z-\lambda}{z}$ ».

1. La funzione $f(z)$ della variabile complessa z sia regolare all'infinito. Sarà anche, in corrispondenza di valori abbastanza grandi di mod z

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots \tag{1}$$

e quindi, qualunque sia λ

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\lambda}\left(1 - \frac{z-\lambda}{z}\right) + \frac{\alpha_2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{z-\lambda}{z}\right)^2 + \cdots.$$

Può sempre definirsi $\lambda > 0$ per modo che lo sviluppo di $f(z)$ in serie di potenze positive crescenti di $\frac{z-\lambda}{z}$

$$h_0 + h_1 \frac{z-\lambda}{z} + h_2\left(\frac{z-\lambda}{z}\right)^2 + \cdots \tag{2}$$

abbia un raggio di convergenza maggiore di 1 e sia quindi

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|h_n|} < 1. \tag{3}$$

Lo si vede osservando che se è ρ il raggio di convergenza della serie $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$ ed è $\lambda > \frac{1}{\rho}$, le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda^n}, \cdots, \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\alpha_n}{\lambda^n} \qquad (r = 0, 1, \cdots)$$

convergono, ed è

$$(4) \qquad h_r = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\,\alpha_n}{\lambda^n} .$$

E che, per un noto teorema di Polya, secondo il quale condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione intera $\sum e_n \frac{t^n}{n!}$ sia di tipo esponenziale è che la serie $c_0 + c_1 t + \cdots$ abbia un raggio di convergenza non nullo [1], l'integrale di Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}\, dt$$

ha un'ascissa di convergenza $R z = \mu \leq \rho$.

La funzione $\frac{f(z)}{z}$ di cui l'integrale è l'espressione nel semipiano $R z > \mu$ nel quale $\frac{f(z)}{z}$ è regolare, è sviluppabile in una serie di potenze di $z - \lambda$, $(\lambda > \mu)$, avente un raggio di convergenza per lo meno uguale a $\lambda - \mu$.

La (2) converge [2], e converge pertanto assolutamente, nel circolo

$$|z - \lambda| = \nu\lambda$$

corrispondente al massimo valore di $\nu > 0$ tale che

$$\nu\lambda < \lambda - \mu .$$

Può evidentemente ottenersi sempre che sia ad un tempo

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda > \frac{1}{\rho} \\ \lambda(\nu - 1) + \mu < 0 \\ \lambda\nu > 1 . \end{cases}$$

2. È, per quanto precede

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) dt = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \cdots$$

(1) G. Polya, *Ueber die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* « Math. Zeitschrift », *29*, 1929, pp. 549-640.

(2) La (2) è uno speciale sviluppo in serie di Bürmann-Lagrange. Si cfr. ad es., per le condizioni di convergenza, date nella forma che qui si applica, S. Pincherle, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, I, p. 246.

mentre, per la (2)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\frac{z-\lambda}{z}\right)^n .$$

Che sia anche

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n \, L_n(\lambda t) \right) dt \tag{6}$$

è una conseguenza della relazione

$$\frac{1}{z}\left(\frac{z-\lambda}{z}\right)^n = \int_0^{\infty} e^{-tz} \, L_n(\lambda t)\, dt ,$$

dove

$$L_n(\lambda t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-\lambda t)^{\nu}}{n!} = \frac{1}{n!} e^{\lambda t} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\lambda t} t^n) ;$$

che generalizza l'altra, corrispondente a $\lambda = 1$, stabilita da F. Tricomi [1], e di ciò che

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|h_n|} < 1 ,$$

mentre la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda t)\, w^n$$

sviluppo di

$$\frac{1}{1-w} e^{\frac{\lambda t}{w-1}} ,$$

ha il raggio di convergenza 1.

La serie $\sum h_n L_n(\lambda t)$ converge assolutamente in ogni punto dell'intervallo d'integrazione $(0, \infty)$ ed uniformemente in ogni intervallo chiuso $(0, T)$, dove $T > 0$.

E poichè la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |e^{-tz}| \, |h_n L_n(\lambda t)| \, dt = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} |h_n| \left(\frac{|x-\lambda|}{|x|}\right)^n$$

converge, ($\mathrm{R}z = x$ supposto maggiore di μ), è legittimo dedurne [2] che

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n L_n(\lambda t) \right) dt = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\frac{z-\lambda}{z}\right)^n$$

$$= \frac{f(z)}{z} .$$

(1) F. Tricomi, *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre* («Rend. Linc.», XXI, pp. 232–239).

(2) Cfr. Bromwich, *Theory of infinite series* (1926), p. 500.

3. Ma è anche in modo del tutto analogo, e come è d'altronde ben noto

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) dt .$$

Poichè una serie uniformemente convergente di funzioni continue $\sum h_n L_n(\lambda t)$ è continua, come lo è, qualunque sia t, $\sum \alpha_n \frac{t^n}{n!}$, non può sussistere l'uguaglianza

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-tz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n L_n(\lambda t) \right) dt$$

senza che sia in tutti i punti del semiasse reale positivo [1], e pertanto anche in tutto il piano t

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n L_n(\lambda t),$$

come si affermò.

Ma è pure evidentemente, se $\lambda' > \lambda$, e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h'_n \left(\frac{z - \lambda'}{z} \right)^n ,$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h'_n L_n(\lambda' t) ,$$

mentre si deduce dalla (3)

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|h_n|} < 1$$

che la serie $\sum h_n L_n(\lambda t)$ converge assolutamente in ogni punto del piano t, uniformemente in ogni area finita chiusa dallo stesso.

È, ad esempio, $\frac{1}{z-1}$ la funzione determinante $\frac{f(z)}{z}$ corrispondente alla generatrice $\varphi(t) = e^t$, e

$$f(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{\lambda}{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\lambda-1} \right)^n \left(\frac{z-\lambda}{z} \right)^n ,$$

$$\left| \frac{1}{\lambda-1} \right| < 1$$

se $\lambda > 2$. Si ha dunque anche, se $\lambda > 2$,

$$e^t = \frac{\lambda}{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda-1} \right)^n L_n(\lambda t) .$$

(1) Cfr., ad es., S. PINCHERLE, loc. cit., p. 336.

Matematica. — *A proposito di alcuni teoremi di media che si incontrano nella dinamica.* Nota[1] di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Come è noto[2], Hopf ha osservato che i ragionamenti, usati da Birkhoff nel dimostrare il suo teorema ergodico, acquistano singolarmente in chiarezza se sono volti a stabilire che:

Data una varietà V *e una funzione* $f(P)$ *del punto di* V, *sommabile su* V, *allora, se* T *è una trasformazione di* V *in sè, soddisfacente a certe condizioni*[3], *e se* P^i *è l'immagine del punto* P *di* V *nella* T^i, *la successione* $f(P), f(P^1), \cdots$ *ammette il limite secondo Cesàro*

$$(1) \qquad \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{i} \left(f(P) + f(P^1) + \cdots + f(P^{i-1}) \right)$$

per quasi tutti i punti P *di* V–limite quasi ovunque costante, se T è metricamente transitiva[4].

Di qui poi Hopf deduce immediatamente il teorema ergodico di Birkhoff (relativo non più ad una, ma ad un gruppo di trasformazioni di V in sè), formulandolo nel modo che segue:

Se G *è un gruppo di trasformazioni,* $T(t)$, *di* V *in sè, soddisfacente a certe condizioni, per quasi tutti i punti* P *di* V *esiste il limite*

$$(2) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(P(t))\, dt,$$

se $P(t)$ *è l'immagine di* P *nella* $T(t)$–limite quasi ovunque costante, se G è metricamente transitivo.

D'altra parte, per giustificare senza ricorrere al teorema di Birkhoff[5] una formula indicata da Levi-Civita, ed a Levi-Civita da questo teorema suggerita, ho avuto occasione di stabilire che:

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1935.

(2) Per le notizie bibliografiche e per quelle relative alla terminologia, rimando, di massima, alla mia Memoria *Sul fondamento matematico della teoria degli invarianti adiabatici.* [« Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. XIII (1934-1935), pp. 335-362]

(3) Tutti gli enunciati contenuti in questa introduzione sono soltanto approssimativi.

(4) Cioè, se V non si può dividere in due parti misurabili, entrambe invarianti rispetto a T, ed entrambe di misura positiva.

(5) Nel caso che non ci si voglia imporre questa restrizione, si può allora procedere come nella mia Memoria *Sul teorema ergodico.* [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LVIII (1934), pp. 311-325].

Se G *è completamente transitivo, allora per ogni porzione misurabile* E *di* V *riesce*

$$(3) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \int_{E(t)} f(P)\, dP = k \cdot mE \qquad (k = \text{cost}),$$

dove $E(t)$ *è l'immagine di* E *nella* $T(t)$ [1];

e questo risultato io l'ho ottenuto con un ragionamento in cui giuocano solo le proprietà fondamentali della misura secondo Lebesgue [2].

Per il quale ragionamento, come mi propongo di fare rilevare in questa Nota, vale un'osservazione analoga all'osservazione fatta da Hopf nei riguardi di quello di Birkhoff: esso, cioè, acquista in perspicuità, ove lo si applichi a dimostrare un altro teorema, di cui la (3) è poi conseguenza presso che immediata, così come l'esistenza del limite (2) segue da quella del limite (1).

Nei numeri seguenti indicherò l'enunciato e la dimostrazione di questo teorema.

Chiudo queste righe introduttive avvertendo che, dato il carattere della Nota presente, sarebbe stato inutile e vano abbandonare i criteri di semplicità che ho seguiti, nella scelta delle ipotesi di lavoro, durante le mie ricerche precedenti [3].

1. Enunciato e dimostrazione del teorema. — Nell'S_n reale ed euclideo $(x_1, \cdots, x_n)$ sia V una varietà analitica, semplice e chiusa di equazione $H(x_1, \cdots, x_n) = 0$; le derivate parziali di $H(x_1, \cdots, x_n)$ non siano mai simultaneamente nulle su V — allora V è priva di singolarità.

Sia T una trasformazione analitica e biunivoca di V in sè

α) *metricamente transitiva*

e

β) *conservante la misura delle porzioni misurabili di* V — la misura essendo calcolata nella metrica subordinata su V dalla metrica euclidea che vige nello spazio ambiente [4].

(1) Vedi *Sul fondamento matematico* ecc. Dalla nota (15) della quale Memoria appare come io avessi già allora riconosciuto che per la validità dei ragionamenti là svolti bastava che G contenesse almeno una trasformazione metricamente transitiva (mentre la transitività completa di G porta che tutte le sue trasformazioni, a meno naturalmente della trasformazione identica, sono transitive in senso metrico); cfr. il n. 10 di questa Nota.

Circa poi la validità della (3) nell'ipotesi che G sia solo metricamente transitivo, si veda l'altra mia Memoria *Transitività metrica e teoremi di media* [in corso di stampa nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»], sul contenuto della quale avremo occasione di ritornare nell'ultimo numero di questa Nota.

(2) Circa formule analoghe alla (3), dedotte applicando la teoria delle equazioni integrali, si veda il lavoro di Carleman citato in *Sul fondamento* ecc., nota (15).

(3) Per quello che riguarda l'uso del postulato di Zermelo si veda *Sul fondamento* ecc., nota (21).

(4) Si può anche supporre che T ammetta un invariante integrale positivo; cfr. in proposito *Sul teorema ergodico*, n. 12.

Sia inoltre $f(P)$ una funzione reale del punto P di V, sommabile su V, e si ponga

$$F(E) = \int_E f(P)\, dP$$

per ogni porzione misurabile E di V.

2. Allora:

Nelle ipotesi del n. 1, per ogni porzione misurabile E *di* V *riesce*

$$\lim_{i \to +\infty} \varphi_i(E) = \frac{mE}{mV} \int_V f(P)\, dP,$$

se

$$\varphi_i(E) = \frac{1}{i}(F(E) + \cdots + F(E^{i-1})),$$

dove – secondo una convenzione che sarà sempre tacitamente rispettata nel seguito – E^i *è l'immagine di* E *nella potenza i-esima della* T.

3. Per la dimostrazione incominciamo con l'osservare [1] come dalla β) segua che, data una porzione misurabile E di V, l'insieme $E + E^1 + E^2 + \cdots$ ha la stessa misura dell'insieme $\cdots + E^{-2} + E^{-1} + E + E^1 + E^2 + \cdots$, invariante nella T; e quindi, per la α), che:

Se $mE > 0$, *allora* $m(E + E^1 + \cdots) = mV$.

Osserviamo inoltre come dall'essere $|F(E)| \leq \int_V |f(P)|\, dP$ si deduca immediatamente

$$|\varphi_i(E) - \varphi_i(E^p)| \leq \frac{2p}{i} \int_V |f(P)|\, dP;$$

e quindi, che:

Se $i \to +\infty$, *allora*

$$|\varphi_i(E) - \varphi_i(E^p)| \to 0 \qquad (p = 0, 1, \cdots). \tag{4}$$

4. Premesso questo, siano J ed I due porzioni misurabili di V, con

$$mI = mJ; \tag{5}$$

e si ponga

$$I_0 = I \cdot J \;;\quad I_1 = (I - I_0) \cdot (J^1 - I_0^1) \;;\quad I_2 = (I - I_0 - I_1) \cdot (J^2 - I_0^2 - I_1^1); \cdots$$

$$J_0 = J \cdot I \;;\; J_1 = (J - J_0) \cdot (I^{-1} - J_0^{-1}) \;;\; J_2 = (J - J_0 - J_1) \cdot (I^{-2} - J_0^{-2} - J_1^{-1}); \cdots$$

(1) Per maggiori chiarimenti sulle considerazioni che seguono, vedi *Sul fondamento* ecc., n. 3.

di guisa che

$$(6) \qquad I_p = (I - I_0 - \cdots - I_{p-1}) \cdot (J^p - J_0^p - \cdots - J_{p-1}^p) = J_p^p ;$$

e quindi, per la β), $mI_p = mJ_p$; da cui

$$(7) \qquad m\bar{I} = mI_0 + mI_1 + \cdots = mJ_0 + mJ_1 + \cdots = m\bar{J} ,$$

se

$$\bar{I} = I_0 + I_1 + \cdots \quad ; \quad \bar{J} = J_0 + J_1 + \cdots$$

5. Dalle posizioni fatte si deduce facilmente che l'insieme $I - \bar{I}$ non ha punti in comune con l'insieme $(J - \bar{J}) + (J^1 - \bar{J}^1) + \cdots$ — infatti è

$$I \cdot J^p = (I - I_0 - \cdots - I_{p-1}) \cdot (J^p - J_0^p - \cdots - J_{p-1}^p) +$$

$$+ J^p \cdot (I_0 + \cdots + I_{p-1}) + I \cdot (J_0^p + \cdots + J_{p-1}^p) \qquad (p = 0, 1, \cdots);$$

e, per la (6),

$$I \cdot J^p = I_p + J^p \cdot (I_0 + \cdots + I_{p-1}) + I \cdot (J_0^p + \cdots + J_{p-1}^p);$$

cioè $I \cdot J^p$ è porzione di $\bar{I} + \bar{J}^p$; ma allora è come volevamo

$$(I - \bar{I}) \cdot (J^p - \bar{J}^p) = 0 \qquad (p = 0, 1, \cdots) —;$$

e quindi, per la prima osservazione del n. 3, che dei due insiemi $I - \bar{I}$, $J - \bar{J}$ uno almeno ha misura nulla.

Ma, per la (5) e la (7), riesce $m(I - \bar{I}) = m(J - \bar{J})$; indi è $mI = m\bar{I}$, $mJ = m\bar{J}$; e, per la β), $mI^p = m\bar{I}^p$, $mJ^p = m\bar{J}^p$, se $p = 0, 1, \cdots$; da cui segue immediatamente

$$(8) \qquad \varphi_i(\bar{I}) = \varphi_i(I), \varphi_i(\bar{J}) = \varphi_i(J) \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

6. D'altra parte è evidentemente

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi_i(\bar{I}) = \varphi_i(I_0) + \cdots + \varphi_i(I_p) + \varphi_i(I_{p+1} + I_{p+2} + \cdots), \\ \varphi_i(\bar{J}) = \varphi_i(J_0) + \cdots + \varphi_i(J_p) + \varphi_i(J_{p+1} + J_{p+2} + \cdots) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Inoltre, se p è sufficientemente grande, riesce

$$m(I_{p+1} + I_{p+2} + \cdots) = m(J_{p+1} + J_{p+2} + \cdots) < \varepsilon ,$$

con ε positivo e prefissato. Indi è anche, per la β),

$$m(I_{p+1}^i + I_{p+2}^i + \cdots) = m(J_{p+1}^i + J_{p+2}^i + \cdots) < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \cdots);$$

e, se ε è stato scelto opportunamente una volta fissato $\delta > 0$,

$$|F(I_{p+1}^i + I_{p+2}^i + \cdots)| < \delta \ , \ |F(J_{p+1}^i + J_{p+2}^i + \cdots)| < \delta \quad (i = 0, 1, \cdots)$$

– ciò per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue –; e quindi, per definizione,

$$(10)\quad |\varphi_i(I_{p+1}+I_{p+2}+\cdots)|<\delta\ ,\ |\varphi_i(J_{p+1}+J_{p+2}+\cdots)|<\delta\quad (i=1,2,\cdots).$$

Dalla (4) e dalla (6) si ha poi

$$\varphi_i(I_0)-\varphi_i(J_0)\to 0\ ,\ \cdots\ ,\ \varphi_i(I_p)-\varphi_i(J_p)\to 0\ ,$$

se $i\to+\infty$; relazioni che, insieme con le (8), (9) e (10), dànno finalmente

$$(11)\qquad \lim_{i\to+\infty}(\varphi_i(I)-\varphi_i(J))=0\ .$$

7. La (11) dice, in sostanza, che, posto

$$\varphi(E)=\overline{\lim_{i\to+\infty}}\,\varphi_i(E)\quad ,\quad \Phi(E)=\overline{\lim_{i\to-\infty}}\,\varphi_i(E)$$

per ogni porzione misurabile E di V, $\varphi(E)$ e $\Phi(E)$ dipendono dalla sola misura di E

$$\varphi(E)=\psi(mE)\quad ,\quad \Phi(E)=\Psi(mE)\ ,$$

dove $\psi(\eta)$ e $\Psi(\eta)$ sono due funzioni evidentemente continue in tutto l'intervallo $0\leq\eta\leq mV$ [1].

Per dimostrare il nostro teorema occorre quindi e basta far vedere che

$$(12)\qquad \psi(\eta)=\Psi(\eta)=\frac{\eta}{mV}\int_V f(P)\,dP\ .$$

8. A questo scopo, p sia un numero naturale; η_0 sia un numero non negativo verificante la relazione $p\eta_0\leq mV$; $E_1,\cdots,E_p$ siano p porzioni [2] misurabili di V, prive a due a due di punti in comune e tutte di misura uguale ad η_0.

Sarà allora, per la (11),

$$\varphi_i(E_1+\cdots+E_p)-p\varphi_i(E_1)=\varphi_i(E_1)+\cdots+\varphi_i(E_p)-p\varphi_i(E_1)\to 0\ ,$$

se $i\to+\infty$; vale a dire

$$\psi(p\eta_0)=p\psi(\eta_0)\quad ;\quad \Psi(p\eta_0)=p\Psi(\eta_0)\qquad (0\leq p\eta_0\leq mV)\ .$$

Ma tanto basta [3], in virtù della continuità di $\psi(\eta)$ e di $\Psi(\eta)$, perchè sia

$$\psi(\eta)=\frac{\eta}{mV}\psi(mV)\quad ;\quad \Psi(\eta)=\frac{\eta}{mV}\Psi(mV)\ .$$

(1) Circa le affermazioni fatte nel testo, cfr. *Sul fondamento* ecc., nota (36).
(2) Certo esistenti; cfr. *Sul fondamento* ecc., nota (37).
(3) Cfr. *Sul fondamento* ecc., fine del n. 7.

E la (12) sarà stabilita non appena si sia osservato che, evidentemente,

$$\psi(mV) = \varphi(V) = \int_V f(P)\,dP \quad ; \quad \Psi(mV) = \Phi(V) = \int_V f(P)\,dP\,.$$

9. Osservazione I. – Indicherò rapidamente come si dovrebbe procedere ove dal teorema stabilito si volesse dedurre la (3), nell'ipotesi che T (o) sia l'identità; che, per $t \neq o$, ogni T (t) del gruppo (analitico a un parametro) G là considerato soddisfaccia alle α) [1] e β) del n. 1; e che sia inoltre $T(t_1 + t_2) = T(t_1) + T(t_2)$, per ogni coppia di numeri reali t_1, t_2.

Precisamente: osservato che hanno senso i due integrali

$$\int_o^\tau dt \int_{E(t)} f(P)\,dP \text{ [2]} \quad , \quad \int_E dP \int_o^\tau f(P(t))\,dt \text{ [3]} \qquad (\tau > o)\,,$$

se ne dovrebbe stabilire [4] l'uguaglianza; dopo di che, fissato un numero positivo τ_o e (se $\tau > \tau_o$) posto $\tau = (\nu + 1)\,\tau_o + \mu$ con $\nu = o, 1, \cdots$ e $o \leq \mu < \tau_o$, si avrebbe

$$\frac{1}{\tau}\int_o^\tau dt \int_{E(t)} f(P)\,dP = \frac{1}{\tau}\int_E dt \int_o^\tau f(P(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_E dP \int_o^{\tau_o} f(P(t))\,dt + \cdots + \frac{1}{\tau}\int_{E(\nu\tau_o)} dP \int_o^{\tau_o} f(P(t))\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\tau}\int_{E(\nu\tau_o)} dP \int_o^{\mu} f(P(t))\,dt = \frac{\nu+1}{\tau}\cdot\frac{1}{\nu+1}\sum_o^\nu{}_i \int_{E(i\tau_o)} dP \int_o^{\tau_o} f(P(t))\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\tau}\int_{E(\nu\tau_o)} dP \int_o^{\mu} f(P(t))\,dt;$$

(1) Cioè, che G sia completamente transitivo.

(2) Questo primo integrale ha certo senso, perchè la funzione $\int_{E(t)} f(P)\,dP$ è continua rispetto a t; cfr. *Sul fondamento* ecc., n. 5.

(3) Che la funzione $\int_o^\tau f(P(t))\,dt$ esista per quasi tutti i punti di V e sia sommabile su V (una volta postala uguale a zero nei punti in cui essa non è definita), è notorio – cfr. E. Hopf, *On causality, statistics and probability* [« Journal of Mathematics and Physics », vol. XIII (1934), pp. 51-102], p. 84 –; e di qui segue immediatamente che lo stesso vale per la funzione $\int_o^\tau f(P(t))\,dt$.

(4) Dimostrandola, per esempio, prima per le funzioni continue e poi, mediante passaggi al limite, per quelle sommabili.

cioè, per il teorema del n. 2 applicato alla $T(\tau_0)$ ed alla $F(E) = \int_E dP \int_0^{\tau_0} f(P(t))\,dt$ [1]:

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \int_{E(t)} f(P)\,dP = \frac{1}{\tau_0} \frac{mE}{mV} \int_V dP \int_0^{\tau_0} f(P(t))\,dt = \frac{mE}{mV} \int_V f(P)\,dP .$$

10. Osservazione II. – Se $T(t_0)$, $t_0 \neq 0$, è una trasformazione di G che risulti metricamente transitiva, tale è anche la $T(-t_0)$, in virtù della $T(t_1 + t_2) = T(t_1) + T(t_2)$ e del fatto che $T(0)$ è l'identità; posto allora τ_0 uguale a quello dei due numeri t_0 e $-t_0$ che è positivo, il ragionamento svolto conserva inalterata la sua validità. Si ritrova così un risultato cui si è già alluso (cfr. anche *Sul fondamento* ecc., nota [15]).

11. Osservazione III. – Il teorema del n. 2 è certo vero – nel senso che esiste sempre il limite $\lim_{i \to +\infty} \varphi_i(E)$ — anche se T non è metricamente transitiva [2]; però nel ragionamento svolto la transitività metrica di T è sfruttata in maniera credo essenziale.

E se nella mia Memoria, già ricordata, *Transitività metrica e teoremi di media* io sono riuscito a adattare il ragionamento in discorso alla dimostrazione della (3) nell'ipotesi della transitività metrica di G, gli è perchè per una certa classe di porzioni misurabili di V l'essere G transitivo in senso metrico porta che, se E è una porzione di questa classe e $T(\tau_0)$ una trasformazione di G con $\tau_0 \neq 0$ [3] e $|\tau_0|$ sufficientemente piccolo, allora da

$$mE > 0$$

segue (cfr. n. 3)

$$m(E + E(\tau_0) + \cdots) = mV ,$$

di guisa che nei riguardi di E la $T(\tau_0)$ si comporta come se fosse metricamente transitiva [4].

(1) Si terrà presente che $\int_0^{\tau_0} f(P(t))\,dt$ è sommabile su V; e, poichè

$$\left| \int_{E(v\tau_0)} dP \int_0^{\mu} f(P(t))\,dt \right| \leq \int_V dP \int_0^{\tau_0} |f(P(t))|\,dt ,$$

che $\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{E(v\tau_0)} dP \int_0^{\mu} f(P(t))\,dt = 0$.

(2) Volendo, lo si potrebbe dedurre dal teorema di Hopf.

(3) $T(0)$ è, anche qui, l'identità.

(4) Per essere precisi, in questa Memoria io stabilisco la (3) solo per gli insiemi della classe in discorso, poichè ciò bastava per gli scopi che mi proponevo; ma indico anche come procedere, ove si voglia stabilire la (3) per un insieme misurabile qualunque, senza avvalersi naturalmente del teorema di Birkhoff.

Matematica. — *Su di un sistema di infinite equazioni lineari.* Nota [1] di U. Broggi, presentata dal Socio G. Fubini.

Sia

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \cdots \tag{1}$$

lo sviluppo, valido in un intorno del punto all'infinito, di una funzione $f(z)$, regolare in esso.

Ove si ponga $w = \frac{z - 1}{z}$, e si postuli essere il punto $z = 1$ interno al semipiano di olomorfia della funzione $\frac{f(z)}{z}$, regolare e nulla all'infinito, e pertanto determinante, s'ottengono i coefficienti $\beta_0, \beta_1, \cdots$ dello sviluppo di $f(z)$ in serie di potenze crescenti di w

$$f(z) = \beta_0 + \beta_1 w + \beta_2 w^2 + \cdots,$$

ricordando che, come discende da una proposizione stabilita da F. Tricomi [2], $\beta_0, \beta_1, \cdots$ sono i coefficienti dello sviluppo della funzione

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!},$$

(intera e di tipo esponenziale poichè si postulò diverso da zero il raggio di convergenza della serie $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$) in serie di polinomi di Laguerre.

È cioè, se

$$L_r(t) = \frac{e^t}{r!} \frac{d^r}{dt^r}(e^{-t} t^r)$$

e

$$\varphi(t) \sim \beta'_0 L_0(t) + \beta'_1 L_1(t) + \cdots$$

$$\beta'_r = \int_0^{\infty} e^{-t} \varphi(t) L_r(t)\, dt = \beta_r \quad [3] \qquad (r = 0, 1, \cdots).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1935.

(2) F. Tricomi, *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* « Rendiconti Lincei » (XXI, pp. 232-239).

(3) Cfr. U. Broggi, *Sullo sviluppo delle funzioni intere in serie di polinomi di Laguerre.* « Rendiconti Lincei ».

Poichè la (1) può scriversi

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 (1 - w) + \alpha_2 (1 - w)^2 + \cdots$$

l'osservazione formulata fornisce in modo immediato una soluzione del sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite $\beta_0'', \beta_1'', \cdots$

$$\begin{aligned}
\beta_0'' + \beta_1'' + \beta_2'' + \cdots\cdots\cdots\cdots &= \alpha_0 \\
\binom{1}{1}\beta_1'' + \binom{2}{1}\beta_2'' + \cdots\cdots\cdots\cdots &= -\alpha_1 \\
\binom{2}{2}\beta_2'' + \binom{3}{2}\beta_3'' + \cdots\cdots\cdots &= \alpha_2 \\
\binom{3}{3}\beta_3'' + \binom{4}{3}\beta_4'' + \cdots &= -\alpha_3 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

che già E. Borel [1] trattava nella sua tesi, condotto ad esso dal problema della costruzione, nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$, di una funzione infinitamente derivabile $\Phi(t)$, tale che data una successione arbitraria $a_0, a_1, \cdots$ sia

$$\lim_{t = +0} \Phi^{(n)}(t) = a_n \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

Può venire dimostrato che « la soluzione

$$\beta_r = \int_0^\infty e^{-t} L_r(t) \varphi(t)\, dt$$

fornita dalle precedenti relazioni è la somma generalizzata di Borel della serie

$$\frac{(-1)^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)\,\alpha_n \,»,$$

convergente qualunque sia r, e di somma β_r, se il raggio ρ di convergenza della serie $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$ è maggiore di 1, e si ha quindi in un intorno del punto $w = 0$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (1 - w) + \alpha_2 (1 - w)^2 + \cdots = \beta_0 + \beta_1 w + \beta_2 w^2 + \cdots$$

(1) E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (« Ann. Éc. Norm. sup. », 3e sér., to. XII, 1895). Cfr. pure M. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, p. 19.

Si perviene alla dimostrazione osservando anzitutto che l'esistenza di

$$\beta_r = \int_0^\infty e^{-t}\,\varphi(t)\,L_r(t)\,dt$$

qualunque sia $r \geqq 0$ implica quella di

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^r\,\varphi(t)\,dt$$

come si vede immediatamente per induzione.

Può venirne dedotto che

$$e^{-t}\,\varphi(t)\,L_0(t) = e^{-t}\,\varphi(t) \to 0\,, \qquad \text{se} \qquad t \to +\infty\,.$$

$e^{-t}\,\varphi(t)$ essendo una funzione continua, lo è parimenti $t^r e^{-t}\,\varphi(t)$: ove non esistesse

$$\lim_{t=+\infty} e^{-t}\,\varphi(t),$$

che non può esistere senza essere uguale a zero, la condizione necessaria e sufficiente di convergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^r\,\varphi(t)\,dt\,,$$

che fissato un $\varepsilon > 0$ si possa indicare un $T > 0$ tale che

$$\left| \int_{t'}^{t''} e^{-t}\,t^r\,\varphi(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

se

$$t'' > t' > T$$

non potrebbe venire soddisfatta.

Qualunque sia T, può venire indicato un intervallo (t', t'') nel quale

$$0 < \eta_r < e^{-t}\,\varphi(t)$$

e

$$\eta_r\,(t'' - t')\,t'^r \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

sia arbitrariamente grande.

Il ragionamento utilizzato serve a dimostrare parimenti che

$$e^{-t}\,t^r\,\varphi(t) \to 0\,, \qquad \text{se} \qquad t \to +\infty\,,$$

uniformemente in r, e pertanto che

$$e^{-t}\, t^r\, \varphi^{(s)}(t) \to 0\,, \qquad \text{se} \qquad t \to +\infty\,,$$

uniformemente in s ed in r.

Per quanto concerne la seconda delle due affermazioni si ha infatti, integrando per parti

$$\beta_r = \frac{1}{r!}\int_0^\infty \frac{d^r}{dt^r}\,(e^{-t}\, t^r)\,\varphi(t)\,dt = -\frac{1}{r!}\int_0^\infty \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\,(e^{-t}\, t^r)\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

L'integrale converge qualunque sia r: si vede attribuendo ad r i valori $1, 2, \cdots$ che

$$e^{-t}\, t^r\, \varphi'(t) \to 0\,, \quad , \quad \text{se} \qquad t \to +\infty$$

uniformemente in r.

Una nuova integrazione per parti fornisce pertanto

$$\beta_r = \frac{1}{r!}\int_0^\infty \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}}\,(e^{-t}\, t^r)\,\varphi''(t)\,dt$$

convergente qualunque sia r: attribuendo ad r i valori $2, 3, \cdots$ si vede analogamente che

$$e^{-t}\, t^r\, \varphi''(t) \to 0\,, \qquad \text{se} \qquad t \to +\infty\,.$$

Si ha così procedendo

$$e^{-t}\, t^r\, \varphi^{(s)}(t) \to 0\,, \qquad \text{se} \qquad t \to +\infty$$

uniformemente in s ed in r, e

$$\beta_r = \frac{(-1)^r}{r!}\int_0^\infty e^{-t}\, t^r\, \varphi^{(r)}(t)\,dt = \frac{(-1)^r}{r!}\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{r+h}\,\frac{t^{r+h}}{h!}\right)dt$$

$$= \frac{(-1)^r}{r!}\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_{n=r}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-r+1)\,\alpha_n\,\frac{t^n}{n!}\right)dt\,.$$

È questa la somma (integrale) di Borel della serie che si ottiene premettendo r zeri all'altra

$$\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-r+1)\,\alpha_n\,.$$

È noto che se la serie $a_0 + a_1 + \cdots$ è sommabile secondo Bore (o sommabile (B)) – è tale cioè che

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\frac{t^n}{n!}\right)dt$$

converge – è sommabile (B) l'altra $0 + a_0 + a_1 + \cdots$, senza che sia sempre vera la reciproca; sono sommabili entrambe (B), e sommabili (B_1) (dove come somma (B_1) dalla serie $a_0 + a_1 + \cdots$ si definisce, ove esista, il valore di

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!} \quad (s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n))$$

se essendo $\psi(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{r!} + \cdots$ è

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \psi(t) = 0.$$

È questo appunto, come si dimostrò, il caso delle serie

$$\frac{(-1)^r}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) \alpha_n$$

di cui, come venne affermato, le costanti

$$\beta_r = \int_0^{\infty} e^{-t} L_r(t) \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=r}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) dt$$

sono le somme (B) (e (B_1)).

Se il raggio ρ di convergenza della serie $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$ è uguale ad 1 e $z = 1$ è punto regolare della somma della serie, esso è interno al poligono di Borel, che le corrisponde e che coincide con quello delle serie che si ottengono derivando rispetto a r: le infinite serie

$$\frac{(-1)^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-r+1) \alpha_n$$

sono sommabili (B) e convergono pertanto gli integrali

$$\beta_r = \int_0^{\infty} e^{-t} L_r(t) \varphi(t) dt = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^r \varphi^{(r)}(t) dt$$

qualunque sia r.

Ma la condizione è sufficiente senza essere necessaria: il punto $z = 1$ può essere regolare ed interno al poligono di Borel anche nel caso in cui sia $\rho < 1$, o essere regolare e punto frontiera senza che ciò permetta di escludere la sommabilità (B) (e (B_1)) delle serie considerate.

Geometria. — *Sulle linee proiettive di una superficie.* Nota [1] di A. Terracini, presentata dal Socio G. Fubini.

1. B. Segre, in due Note pubblicate recentemente su questi « Rendiconti » [2] ha considerato su una superficie S (non sviluppabile) dello spazio ordinario un sistema ∞^3 di linee, da lui chiamate *linee proiettive*, in base alla seguente definizione. Facendo capo alla nozione di birapporto di quattro generatrici di una superficie rigata, data in modo algoritmico dal Cartan, B. Segre considera il birapporto delle quattro tangenti asintotiche di un sistema uscenti da quattro punti di una linea qualunque L della superficie considerata (concepite come quattro generatrici della rigata costituita dalle tangenti asintotiche di quello stesso sistema uscenti dai singoli punti della linea L), e poi analogamente il birapporto delle quattro tangenti asintotiche del secondo sistema uscenti dai medesimi quattro punti: la linea L è chiamata da B. Segre una linea proiettiva se, comunque si prendano quei quattro punti sulla linea L, i due birapporti considerati sono costantemente eguali fra loro. Le linee proiettive costituiscono un sistema ∞^3, che è covariante per omografie e reciprocità; cosicchè questo sistema fu dal Segre riavvicinato ai sistemi ∞^3 delle linee sezioni piane, o delle linee di contatto di coni circoscritti (linee coniche), salvo la circostanza che questi sono covarianti soltanto per omografie. L'analogia è poi anche stata dallo stesso Segre messa in evidenza in modo analitico, in base all'equazione [3]

$$(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) + (\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) = 0$$

da lui trovata per le linee proiettive, essendo

$$(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) = 0 \quad , \quad (\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) = 0$$

rispettivamente le equazioni delle sezioni piane e delle linee coniche della superficie S: le notazioni usate sono quelle divenute usuali con la *Geometria proiettiva differenziale* di Fubini e Čech [4].

2. I fatti notevoli messi così in evidenza da B. Segre mi pare rendano desiderabile che alle linee proiettive si giunga anche altrimenti, e fra altro

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1935.

(2) *I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste.* Note I e II presentate nella seduta del 5 maggio 1935.

(3) Ci limitiamo per brevità a una regione della superficie S costituita da punti iperbolici: in una regione a punti ellittici la somma che segue va sostituita con una differenza.

(4) Bologna, Zanichelli, 1926-27.

senza la nozione del birapporto di quattro generatrici di una rigata, nozione ingegnosa, ma in cui la concezione algoritmica appare preponderante rispetto al contenuto geometrico. Nelle linee che seguono indico appunto un procedimento per giungere alle linee proiettive di una superficie facendo capo unicamente alla nozione di elemento lineare proiettivo di una congruenza di rette (con falde rocali distinte) [1], nozione definita in modo puramente geometrico [2]: birapporto [3], su una retta generica g della congruenza, formato dai due fuochi F, $\overline{F}$ esistenti su g e dalle traccie sulla medesima g dei due piani focali $\overline{\pi}^*$, π^* uscenti dal raggio g^* infinitamente vicino a g.

Ora, se Γ è una congruenza rettilinea a falde focali distinte, e con una falda S non degenere come luogo nè come inviluppo, il suo elemento lineare proiettivo E è una frazione avente come numeratore e come denominatore forme la prima biquadratrica e la seconda quadratica nei differenziali du e dv delle coordinate curvilinee u, v a cui è riferita la S, forme che risultano generalmente prime fra di loro; se e soltanto se la seconda falda degenera in una linea, oppure in una superficie sviluppabile, numeratore e denominatore dell'elemento lineare E acquistano un fattore lineare comune, così da diventare rispettivamente una forma cubica e una forma lineare [4]. Quando ciò avvenga, diremo per brevità che l'elemento lineare proiettivo è *semplificabile*; nel caso precedente (caso generale) si ha invece un elemento lineare proiettivo *non semplificabile*.

Se su una superficie S si parte dal sistema ∞^3 delle sue sezioni piane, questo sistema gode evidentemente della proprietà che comunque si scelga in esso un sistema ∞^1, sia Σ, le tangenti alle linee di Σ costituiscono una congruenza Γ la cui seconda falda focale è una sviluppabile; cosicchè l'elemento lineare proiettivo E di Γ è semplificabile. Se si parte invece dal sistema ∞^3 delle linee coniche della superficie S, e si sceglie in esso comunque un sistema ∞^1, sia ancora Σ, le tangenti alle linee non più di Σ, ma del sistema coniugato Σ_1, dànno luogo a una congruenza Γ_1 (con seconda falda degenere cioè) con elemento lineare proiettivo E_1 semplificabile. Per giungere alle linee proiettive, proviamo a procedere in modo analogo, ma cercando di far comparire in modo simmetrico i sistemi Σ e Σ_1, che testè entravano in gioco rispettivamente per le sezioni piane e per le linee coniche. Precisamente, cerchiamo su una superficie S il più generale sistema ∞^1 di linee, Σ, il quale insieme col suo coniugato Σ_1 goda della seguente proprietà: che i due elementi lineari proiettivi E ed E_1 delle due congruenze Γ e Γ_1

(1) Questa condizione viene sottintesa nel seguito.

(2) Cfr. le mie Note *a*) *Su alcuni elementi lineari proiettivi*. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, ser. II, vol. II, 1933; *b*) *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette*. « Atti del R. Istituto Veneto », to. XCIV, 1935.

(3) Qui dunque, come non occorre dire, si tratta del birapporto di quattro punti di una retta.

(4) Cfr. la mia Nota *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale* ecc.

formate dalle tangenti alle linee di Σ e dalle tangenti alle linee di Σ_1 diano somma [1] semplificabile.

3. Riferiamo la superficie S, descritta dal punto $x = x(u, v)$ a parametri asintotici u, v, e per poter coordinare il calcolo che segue con quello di B. Segre supponiamo d'aver scelto il fattore delle coordinate omogenee di punto in modo che il determinante (x, x_u, x_v, x_{uv}) valga $\frac{1}{2}$, cosicchè per la superficie S con le notazioni dell'op. cit. di Fubini e Čech sarà $\theta = 0$, mentre

$$x_{uu} = \beta x_v + p_{11} x,$$

$$x_{vv} = \gamma x_u + p_{22} x,$$

e $q_{11} = 2 p_{11} + \beta_v$, $q_{22} = 2 p_{22} + \gamma_u$. Sulla superficie S consideriamo poi il sistema ∞^1 formato delle linee inviluppate dalle tangenti per cui $dv = \tau(u, v)\, du$. La congruenza Γ formata da queste tangenti ha l'elemento lineare proiettivo [2]

$$(1) \qquad E = \frac{[2 W (\tau du + dv)^2 - N du\, dv]\, du\, dv}{4 (\tau^2 du^2 - dv^2)},$$

dove W e N designano le espressioni indicate con queste stesse lettere nella teoria delle congruenze rettilinee esposta nell'op. cit. di Fubini e Čech: precisamente nelle condizioni in cui ci siamo posti

$$W = (\tau\gamma)_u - \left(\frac{\beta}{\tau}\right)_v - (\log \tau)_{uv},$$

mentre risulta

$$(2) \qquad N = 2\tau \left\{ -\tau q_{22} + \frac{q_{11}}{\tau} + \frac{\gamma^2 \tau^3}{2} - \frac{\beta^2}{2\tau^3} - (\gamma\tau^2)_v + \left(\frac{\beta}{\tau^2}\right)_u + \right.$$

$$\left. + 2 W + \frac{\tau_{uu}}{\tau^2} + \tau_{vv} - \frac{3}{2}\frac{\tau_u^2}{\tau^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_u^2}{\tau} \right\}.$$

D'altro lato la condizione affinchè le linee $v = v(u)$ siano linee proiettive è stata trovata in forma esplicita da B. Segre (cfr. la (20) della sua Nota citata) sotto la forma

(1) Si osservi che, in base alla (1) che segue, gli elementi lineari E ed E_1 hanno sempre lo stesso denominatore, cosicchè la loro somma è ancora, in generale, un rapporto di forme differenziali del 4° e del 2° grado. Qui poi parliamo della *semplificabilità* di un tale rapporto senza però domandare che esso abbia il significato geometrico di elemento lineare proiettivo.

(2) Formola (6) della mia Nota citata *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale* ecc.

$$\frac{\frac{d^3 v}{du^3}}{\frac{dv}{du}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 v}{du^2}}{\frac{dv}{du}}\right)^2 = \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\left(\frac{dv}{du}\right)^4 + q_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - q_{11};$$

perciò applicando questa condizione al caso in cui anzichè $v = v(u)$ sia data $\frac{dv}{du} = \tau(u, v)$, essa si trasforma nella equazione a derivate parziali del second'ordine nella τ

$$G(\tau) = 0, \tag{3}$$

dove per una qualsiasi funzione $\tau(u, v)$ poniamo

$$G(\tau) = \frac{\tau_{uu}}{\tau} + 2\tau_{uv} + \tau\tau_{vv} - \frac{3}{2}\frac{\tau_u^2}{\tau^2} - 2\frac{\tau_u\tau_v}{\tau} - \frac{1}{2}\tau_v^2 - \tag{4}$$

$$- \frac{\beta^2}{2\tau^2} + \frac{\gamma^2\tau^4}{2} - q_{22}\tau^2 + q_{11}.$$

Ora se facciamo questa posizione nella (2), vediamo che comunque si scelga il sistema Σ si ha identicamente per la relativa congruenza rettilinea

$$N - 4\tau W = 2\tau\left\{\left(\frac{\beta}{\tau^2}\right)_u - (\gamma\tau^2)_v - 2(\log\tau)_{uv}\right\} + 2G(\tau). \tag{5}$$

Osserviamo a questo proposito – per quanto questo non ci interessi ulteriormente – chè le linee proiettive risultano caratterizzate dall'equazione

$$N - 4\tau W = 2\tau\left\{\left(\frac{\beta}{\tau^2}\right)_u - (\gamma\tau^2)_v - 2(\log\tau)_{uv}\right\}. \tag{6}$$

Riprendendo la (5), se anzichè la congruenza Γ si considera ora quella, Γ_1, formata dalle tangenti alle linee del sistema Σ_1 coniugato di Σ, possiamo scrivere una formola analoga alla (5): per questo basta passare dalla superficie S luogo alla stessa superficie inviluppo, cambiando β e γ rispettivamente in $-\beta$ e $-\gamma$, e lasciare τ invariato, cosicchè sarà

$$N_1' - 4\tau W_1 = -2\tau\left\{\left(\frac{\beta}{\tau^2}\right)_u - (\gamma\tau^2)_v + 2(\log\tau)_{uv}\right\} + 2G(\tau), \tag{5$_1$}$$

dove W_1 e N_1' sono le quantità analoghe a W, N per la nuova congruenza, tenuto presente che questa viene ora trattata a partire dalla superficie S come inviluppo (il che è irrilevante per W_1, ma non per N_1'). Portiamo finalmente i valori (5) e (5$_1$) nell'elemento lineare E dato dalla (1) e nell'analogo E_1: tenuto presente il valore di W e di W_1, risulta

$$E + E_1 = \frac{[-(\log\tau)_{uv}(\tau du - dv)^2 - G(\tau)\,du\,dv]\,du\,dv}{\tau^2\,du^2 - dv^2}. \tag{7}$$

La condizione perchè il secondo membro della (7) sia semplificabile nel senso sopra chiarito, è evidentemente che sia

$$G(\tau) = 0 \quad \text{oppure} \quad G(\tau) = 4\tau(\log\tau)_{uv}.$$

Di queste due condizioni la prima coincide con la (3), e la seconda - come segue dalla (4) – equivale alla $G(-\tau) = 0$; e nei due casi si ha rispettivamente

$$(8). \qquad E + E_1 = \frac{-(\log\tau)_{uv}(\tau\,du - dv)\,du\,dv}{\tau\,du + dv};$$

$$E + E_1 = \frac{-(\log\tau)_{uv}(\tau\,du + dv)\,du\,dv}{\tau\,du - dv}.$$

Concludiamo pertanto: *condizione necessaria e sufficiente perchè le tangenti a un sistema* ∞^1, Σ, *di linee tracciate sulla superficie* S, *e le tangenti al sistema coniugato costituiscano due congruenze* Γ, Γ_1 *i cui elementi lineari proiettivi* E, E_1 *diano somma semplificabile è che uno dei due sistemi sia costituito da linee proiettive* (*e precisamente*, a norma della (8), *quello dei due in corrispondenza al quale si annulla il numeratore di* $E + E_1$). Questa condizione può servire per definire il sistema ∞^3 delle linee proiettive.

4. I calcoli del numero precedente permettono di giungere alle linee proiettive anche in un altro modo. Pensiamo invero di riferire la superficie S alle linee di un qualsiasi sistema ∞^1, Σ, e alle linee del sistema coniugato Σ' come linee coordinate. Formando allora gli invarianti delle equazioni di Laplace soddisfatte dalla superficie, in coordinate puntuali o tangenziali, quando si adottino i nuovi parametri, secondo la (11) a p. 104 dell'op. cit. di Fubini e Čech, si riconosce che la somma dei due « secondi » [1] invarianti l'uno puntuale e l'altro tangenziale differisce per un fattore non nullo dal secondo membro della nostra (4). Perciò *le linee proiettive di una superficie* S *godono anche della proprietà caratteristica che assumendo comunque fra esse un sistema* ∞^1, *e riferendo la superficie a questo sistema e al sistema coniugato, risulta nulla la somma del « secondo » invariante puntuale e del « secondo » invariante tangenziale.*

(1) Il « primo » e il « secondo » invariante risultano scelti in loc. cit. in modo che il singolo annullarsi del « secondo » invariante puntuale o rispettivamente tangenziale caratterizza i sistemi Σ di linee coniche o risp. piane.

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Introduzione e impostazione.* Nota I [1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

In un mio recente lavoro collo stesso titolo [2], ho avuto occasione di risolvere il problema del moto liquido piano irrotazionale determinato da una corrente traslocircolatoria che investe una *lamina bilatera* a lati uguali e di determinare le corrispondenti azioni dinamiche.

Posteriormente a tale pubblicazione venni a conoscere l'esistenza di un lavoro sullo stesso argomento dovuto ai sigg. S. A. Tchapligin e N. S. Arjanikov [3], in cui il moto liquido in presenza di una lamina a lati disuguali viene studiato mediante la rappresentazione conforme del piano del moto tagliato dalla lamina, in un semipiano. Il contorno della lamina viene così sostituito dall'intero asse reale, il punto all'infinito del piano del moto viene mutato in un punto al finito nel quale viene posta una *doppietta* immagine della corrente asintotica. La trasformazione usata però, per la disimmetria imposta agli elementi della rappresentazione, non è immediatamente applicabile al caso della lamina equilatera [4].

Tali autori poi, determinato il valore della circolazione in modo da regolarizzare il moto nella cuspide di poppa, applicano senz'altro il teorema di Kutta–Joukowsky al calcolo dell'azione dinamica ammettendo che la presenza dell'altra cuspide saliente, non regolarizzata, non invalidi il detto teorema.

Nelle mie Note accennate ed in questa, seguendo il punto di vista del Cisotti, Finzi, ecc. [5], il problema viene presentato sotto un punto di vista

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935.

(2) L. Sona, *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera.* « Rend. Acc. Lincei », ser. 6ª, vol. XIX, 1934, p. 238 e *Azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera.* « Id. », p. 401. Nel seguito queste due Note verranno indicate semplicemente Nota 1ª e Nota 2ª.

(3) S. A. Tchapligin e N. S. Arjanikov, *On the forward Aerofoil and flap slot theory*, « U. S. S. R. Transactions of the Scientific–Research Industrial Institutes, Central Aero-Hydrodynamical Institutes », settembre 1931. Mosca.

L'esistenza di questo lavoro scritto in russo e munito solo di un brevissimo riassunto in inglese, mi venne rivelata da una recensione della mia prima Nota qui sopra citata sul « Zentralblatt für Mechanik » (fascicolo 15 giugno 1934). In esso vengono citati dei precedenti lavori del Tchapligin, fra cui uno del 1910 « *Teoria reshotchatovo krila* » (titolo russo scritto in caratteri latini), che pare contenga un primo esempio di rappresentazione conforme di un piano con un ostacolo fisso in un semipiano.

(4) Farò vedere in una prossima Nota come dovrebbe essere modificata la trasformazione accennata per poter trattare questo caso d'eccezione.

(5) I già numerosi lavori esistenti in proposito hanno avuto tutti come punto di partenza la Nota del Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta–Joukowsky.* « Rend.

diverso: l'esistenza dei punti cuspidali, per le singolarità che il moto presenta in essi, contribuisce in modo essenziale all'azione dinamica, modificando in generale la spinta normale alla corrente di Joukowsky e dando origine anche ad una azione diretta.

In questa Nota estendo il metodo seguìto nelle precedenti al caso generale di una lamina di apertura qualunque a lati comunque disuguali. Il lavoro è diviso in due parti. Nella prima viene trattato il lato geometrico–cinematico della questione colla rappresentazione conforme del piano tagliato dalla lamina in un piano forato dal cerchio di raggio uno, e colla determinazione del potenziale del moto e della velocità.

La trasformazione viene ottenuta partendo dal tipo generale di trasformazioni considerate dal Cisotti in forma differenziale per il quadrilatero. La lamina può essere infatti considerata come un quadrilatero con i lati a due a due sovrapposti.

La particolare semplicità e simmetria della rappresentazione trovata, permettono di determinare subito il potenziale del moto e la velocità. Presentano un certo interesse i casi particolari in cui per opportuni valori della circolazione e dell'angolo con cui la corrente investe la lamina, si ottiene la regolarizzazione del moto in uno o in due dei punti angolosi [1].

Esaurito così il problema idrocinematico passo nella seconda parte alla determinazione delle azioni dinamiche esercitate sulla lamina. La risultante di queste è costituita dalla spinta normale alla direzione della corrente secondo il teorema di Kutta–Joukowsky e da una forza ulteriore dovuta alla presenza delle cuspidi. Questa forza aggiunta si presenta, nella sua espressione analitica, decomposta in due parti: una parallela ad un lato, l'altra parallela all'altro lato della lamina, con verso opposto a quello che va dal vertice comune agli estremi. Assumendo il vertice stesso come punto d'applicazione la forza aggiunta risulta quindi sempre contenuta nell'angolo formato dai prolungamenti dei lati della lamina e la sua intensità dipende dalle quantità che caratterizzano la corrente traslocircolatoria e dalle costanti della lamina (aper-

Acc. Lincei», vol. V, ser. 6ª, 1927, pp. 16–21. In essa viene dimostrato che l'azione dinamica di una corrente traslocircolatoria su una lamina semplice risulta sempre normale alla lamina e non alla corrente come vorrebbe il teorema di Kutta–Joukowsky. Per la citazione degli altri lavori sul moto liquido in presenza di profili con punti cuspidali salienti e per notizie più estese riguardanti l'influenza delle singolarità del moto sulle azioni dinamiche, rimando il lettore all'opuscolo del Cisotti, *Sulla regolarizzazione dei salienti idrodinamici*. «Rend. Seminario Matematico e fisico di Milano», vol. VIII, 1934, p. 55, e al testo del Finzi e Bozza, *Resistenza idro e aerodinamica*. Milano (1935), cap. VI.

(1) Nel caso della lamina a lati uguali la completa regolarizzazione è stata data dal Cisotti a p. 22 dell'opuscolo sopra citato, insieme ad altri notevoli esempi di regolarizzazione del moto in punti cuspidali salienti mediante opportuna determinazione delle costanti del problema. Assai interessanti si presentano pure a riguardo le considerazioni contenute nella Memoria *Sulla regolarizzazione idrodinamica degli estremi di una lamina rettilinea*, dello stesso autore. («Mem. Acc. Pont. Nuovi Lincei», ser. III, vol. II, 1935, pp. 51–77).

tura e lunghezza dei lati). L'una o l'altra di queste forze si annulla quando viene regolarizzato il moto nella cuspide corrispondente, ciò che si può ottenere scegliendo convenientemente il valore della circolazione. Quando il moto venga regolarizzato in entrambe le cuspidi, nel qual caso occorre assegnare un conveniente valore oltre che alla circolazione anche all'angolo della corrente investitrice, è nulla la forza aggiunta e l'azione dinamica è costituita dalla sola spinta di Joukowsky. In questo solo caso il risultato qui ottenuto coincide con quello del Tchapligin e Arjanikov [1]. In generale invece l'azione aggiunta ha una componente secondo la direzione della corrente che può essere positiva (resistenza diretta) o negativa (forza di risucchio), e una componente normale, che, a seconda delle circostanze, va ad aumentare o a diminuire la spinta di Joukowsky.

Se la corrente è puramente traslatoria, questa spinta è nulla, com'è noto, ma rimane l'ulteriore forza che risulta direttamente proporzionale al quadrato della velocità asintotica.

Se la corrente è puramente circolatoria è ancora nulla la spinta di Joukowsky, ma è ancora diversa da zero l'altra forza dovuta alle cuspidi. Si ha quindi anche in questo caso un'azione dinamica risultante in conformità a quanto venne segnalato in casi analoghi da altri autori [2]. Essa risulta direttamente proporzionale al quadrato della circolazione.

Il significato aerodinamico dell'argomento trattato, viene messo in evidenza ai nn. 13–16. Vengono determinate la *portanza* e la *resistenza* nel caso della regolarizzazione del moto a poppa, che, com'è noto, si presenta spontaneamente quando si consideri *l'ala spezzata* [3] muoversi nell'aria di moto traslatorio, rettilineo, uniforme. Si studiano le variazioni di queste quantità al variare dell'angolo d'attacco e il contributo portato ad esse dalla spinta di Joukowsky e dalla cuspide saliente non regolarizzata a prora.

Il caso della doppia regolarizzazione, a poppa e a prora, presenta un certo interesse perchè il moto avviene senza resistenza diretta.

La portanza risulta proporzionale al quadrato della velocità, alla radice quadrata del prodotto dei lati dell'ala e a un fattore ben determinato dipendente dall'apertura dell'ala.

Al n. 15 viene preso in considerazione il caso in cui uno dei lati abbia lunghezza assai piccola rispetto all'altro in modo che l'ala spezzata sia assimilabile ad un'ala piana con alettone di piccole dimensioni. Si trova allora che la presenza dell'appendice, indipendentemente dalla sua lunghezza, modifica profondamente l'azione dinamica sia come intensità che come orientazione.

(1) Loc. cit., p. 12, formula (35).

(2) Cfr. U. Cisotti, *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi.* «Rend. Acc. Lincei», vol. X, ser. 6ª, 1929, pp. 469–475.

(3) Il nome di *ala spezzata* è tolto dal citato lavoro del Tchapligin e Arjanikov.

Al n. 16 vengono applicate le formule ottenute al caso dell'ala con alettone regolarizzato.

Da ultimo (nn. 17–19), viene determinato il momento risultante delle azioni dinamiche rispetto al vertice della lamina e vengono esaminati i principali casi particolari che si presentano a riguardo.

PARTE I.

Integrale del moto liquido.

1. Posizione del problema. — Si abbia una lamina bilatera fissa disposta col vertice nell'origine delle coordinate e in posizione tale da avere come bisettrice l'asse delle x (v. fig. 1). Indichiamo con α l'angolo formato dai due lati della lamina colla direzione negativa dell'asse x. L'apertura della lamina stessa sarà allora 2α, e si dovrà avere

$$0 < \alpha < \pi .$$

Per $\alpha = 0, \pi$, la lamina si chiude e diventa rettilinea coi due lati sovrapposti. Escluderemo, salvo avviso contrario, questa ipotesi.

La lamina bilatera si presenta allora come un quadrilatero, OAO'B, con i lati a due a due sovrapposti. Gli estremi A e B rappresentano due punti cuspidali salienti e i due punti O, O', affacciati nell'origine, rappresentano il vertice di un saliente e quello di un rientrante rispettivamente, se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; viceversa se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la lamina si apre ad angolo piatto e scompaiono così i due punti angolosi nell'origine.

Poniamo poi

$$l = \mathrm{OA}$$

e indichiamo con m il rapporto fra il lato inferiore e il superiore della lamina per cui

$$m = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \quad ; \quad \mathrm{OB} = ml .$$

2. Rappresentazione conforme. Espressione del dz. — Il piano $z = x + iy$, in cui si considera il moto liquido, tagliato dalla lamina bilatera, si può rappresentare in modo conforme diretto [1], su un piano, $\zeta = \xi + i\eta$, forato da un cerchio di raggio unitario con centro nell'origine. Il contorno della lamina si trasforma allora nella circonferenza del foro considerato.

(1) Cfr., per es., U. Cisotti, *Idromeccanica piana*, parte I, p. 38 e p. 118; vedi anche A. R. Forsyth, *Theory of functions of a complex variable*, 2ª ed., p. 632 e seguenti.

Seguendo un procedimento analogo a quello della mia Nota citata [1] per la lamina equilatera, faccio corrispondere ai due vertici O , O′ affacciati nell'origine, due punti sulla circonferenza simmetrici rispetto all'asse delle ordinate, $e^{i\varepsilon}$ ed $e^{i(\pi-\varepsilon)}$ rispettivamente, con

$$-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2} ;$$

ai due vertici estremi della lamina A e B, faccio invece corrispondere due punti, $e^{i\sigma_1}$ ed $e^{-i\sigma_1}$, simmetrici rispetto all'asse reale con

$$|\varepsilon| < \sigma_1 < \pi - |\varepsilon| \quad [2].$$

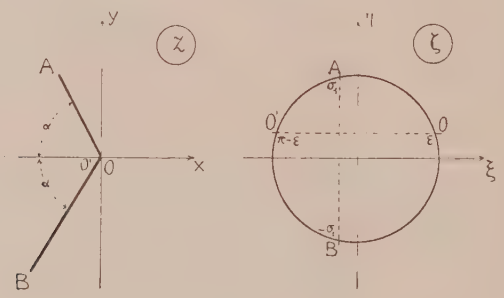


Fig. 1.

In questo modo il lato superiore della lamina (v. fig. 1) è rappresentato dall'arco OAO′, il lato inferiore dall'arco O′ BO . I due angoli ε e σ_1 vengono determinati in funzione degli elementi noti (α , l , m) , nel modo che ora verrà stabilito.

La forma differenziale della trasformazione, come si può dedurre anche dalla teoria generale del quadrilatero [3], è la seguente

$$(1) \qquad dz = \frac{e^{-\varepsilon ni}}{k} \cdot \frac{(\zeta - e^{i\sigma_1})(\zeta - e^{-i\sigma_1})}{\zeta^2} \left(\frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{\zeta + e^{-i\varepsilon}} \right)^n d\zeta ,$$

essendo k una costante reale da determinarsi, e avendo posto, per semplicità

$$n = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} ,$$

(1) Nota 1ª, n. 1.

(2) Questa particolare scelta dei punti corrispondenti ai vertici della lamina rappresenta un'ovvia generalizzazione di quella fatta nel caso della lamina a lati uguali che rientra nella presente trattazione qualora si ponga $\varepsilon = 0$. L'essere $\varepsilon \gtrless 0$ dipende, come vedremo, dall'essere il rapporto m fra il lato OB e il lato OA della lamina, maggiore o minore di 1 .

(3) U. Cisotti, citazione precedente, p. 117.

per cui, in base alle limitazioni convenute per α, risulterà

$$-1 < n < 1 .$$

Essa rispecchia il noto modo di comportarsi del dz nei punti angolosi. Precisamente il dz si annulla del primo ordine nei punti A e B e di ordine n in quello dei due punti O, O′, che rappresenta il vertice di un saliente, mentre diventa infinito di ordine n in quello dei due punti stessi che rappresenta il vertice di un rientrante. In pari tempo la forma differenziale (1), assegna al dz l'argomento che corrisponde all'orientazione di ciascuno dei lati della lamina, e da questo fatto dipende anzi la presenza del fattore costante $e^{-n\pi i}$. Si conviene poi di scegliere quella tale determinazione, per la potenza con esponente reale n, che fa corrispondere a valori di argomento nullo per la base, valori di argomento nullo per la potenza stessa.

Meccanica. — *Sul problema di Clebsch.* – I. *Impostazione generale.* Nota[1] di Maria Pastori, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

In una Nota precedente[2] ho tracciato brevemente la teoria dei tensori vincolati a un sistema di geodetiche, teoria che mi è stata suggerita dal cercare la possibilità di una estensione del problema di Clebsch alle piastre curve[3].

Concepita una piastra elastica comunque incurvata come formata da tanti strati tra loro paralleli, se sono nulle le forze di massa, libere le basi, e quindi la sollecitazione esterna limitata al bordo, si suppone che gli strati non si influenzino reciprocamente, così che il tensore degli sforzi abbia, con le notazioni della Nota introduttiva, e per la forma particolare del ds^2 ivi scelto, nulle le componenti con almeno un indice 3. Si esprime il tensore degli sforzi mediante un'unica funzione delle tre coordinate, che si deve determinare in guisa da soddisfare alle equazioni indefinite e a quelle di Beltrami.

Il problema, impossibile in generale, ammette d'altronde, nel caso che gli strati siano piani, la soluzione già conosciuta ed espressa in coordinate generali dalle (I) e (II) della Nota introduttiva. Resta quindi giustificato di cercare se esiste una soluzione analoga per piastre curve, valida in generale o almeno in qualche caso particolare semplice. Ma si trova, che in tale impostazione generale del problema, il caso piano è un caso *singolare*, essen-

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1935.

(2) Dal titolo: *Tensori vincolati a un sistema di geodetiche.* Questi «Rendiconti», vol. XXI, pp. 801–808.

(3) Mi riferisco, qui e nella Nota II, alle notazioni adottate nella Nota citata e che chiamo introduttiva.

zialmente diverso da tutti gli altri. Questa conclusione non mi sembra priva di interesse, perchè, attraverso a una risposta sostanzialmente negativa, risulta illuminato il problema propostomi, come le difficoltà che esso comporta e balza evidente l'annunciato carattere singolare del caso piano. Conclusione quest'ultima che, se può essere consona ad un'acuta intuizione fisica, non è certo prevedibile dal punto di vista matematico.

In questa Nota I incomincio dall'osservare che, indipendentemente dal problema elastico, se si suppone che un mezzo continuo abbia gli sforzi interni per superficie parallele, che cioè il tensore degli sforzi sia bidimensionale (s'intende con componenti dipendenti dalla coordinata x^3) non basta che esso soddisfi alle equazioni indefinite in due dimensioni per ogni $x^3 = \text{cost.}$, ma deve soddisfare a un'ulteriore equazione indefinita, che manca *solo* nel caso di strati piani.

Considero poi la più generale soluzione delle equazioni indefinite data dal prof. Finzi [1], cercando di far discendere da essa la soluzione del problema in esame. In tale soluzione generale è contenuto un tensore doppio arbitrario simmetrico di S_3, tensore che suppongo isotropo perchè venga a dipendere, nel modo più spontaneo, da un'unica funzione [2]. Trovo però che questa funzione, per soddisfare alle particolari esigenze del problema in istudio, deve ridursi nel caso piano a una funzione armonica di due variabili. Essa non può quindi comprendere come caso particolare la (II) della Nota introduttiva, che dipende da una funzione biarmonica di due variabili.

Finalmente costruisco un tensore degli sforzi vincolato alle x^3, e pure dipendente da un'unica funzione delle tre coordinate, che ha nulle *a priori* le componenti con almeno un indice 3; esso però non soddisfa identicamente alle equazioni indefinite altro che nel caso piano.

Nella Nota II continuo a occuparmi di tale tensore vincolato, deducendone le corrispondenti equazioni di Beltrami, e limitandomi per semplicità di formole a strati di curvatura media costante. Mostro come si presenti la soluzione singolare del caso piano e, fra i casi curvi, considero quello che offre le più particolari semplificazioni, il caso sferico; ma constato che ciò non ostante non è possibile trovare per esso una soluzione del tipo della precedente.

Mi pare interessante rilevare che, nelle formole della Nota I, dove prendendo in considerazione solo le equazioni indefinite ci si ferma alle derivate prime, entra la curvatura media delle superficie $x^3 = \text{cost.}$ In quelle della Nota II ove si giunge alle derivate seconde, per considerare le equazioni di Beltrami, entra anche la curvatura di Casorati delle medesime superficie.

(1) B. Finzi, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui.* Questi «Rendiconti», vol. XIX, ser. 6ª, 1934, pp. 578–584.

(2) U. Cisotti, *Tensori isotropi.* Questi «Rendiconti», vol. XI, ser. 6ª, 1930, pp. 727–731.

§ 1. – Equazioni indefinite di equilibrio per sistemi continui con sforzi interni per superficie parallele.

Per un sistema continuo in equilibrio, in assenza di forze di massa, le equazioni indefinite si scrivono, come è noto:

$$\Phi_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0 \tag{1}$$

ed esprimono l'annullarsi della divergenza del tensore degli sforzi.

Separando dagli altri il caso in cui α ha il valore 3, e tenendo conto delle formole del § 1 della Nota introduttiva, si ottiene:

$$\begin{cases} \Phi_{ij/l}\, g^{jl} + \Phi_{i3/3} = 0 \\ \Phi_{3j/l}\, g^{jl} + \Phi_{31/3} = 0 . \end{cases} \tag{1'}$$

Pensiamo ora il sistema continuo costituito da strati paralleli alle superficie $x^3 = \text{cost.}$ e supponiamo che siano nulli gli sforzi normali, ad esse relativi. Avremo, in tutto lo spazio occupato dal sistema continuo:

$$\Phi_{\alpha\beta}\, \delta^{\beta}_{3} = \Phi_{\alpha 3} = 0 . \tag{2}$$

Tenendo conto di queste e della forma particolare che assumono, per il sistema coordinato scelto, le formole di derivazione covariante in S_3 (formola (7) della Nota introduttiva), avremo finalmente:

$$\begin{cases} \Phi_{ij}{}^{/j} = 0 \\ \Phi_{ij}\, b^{ij} = 0 \end{cases} \tag{1''}$$

dove b_{ij} sono funzioni di $x^1\, x^2\, x^3$, che per $x^3 = \text{cost.}$ diventano i coefficienti della seconda forma fondamentale della corrispondente superficie.

Essi sono tutti nulli soltanto se le $x^3 = \text{cost.}$ sono piani, ed è quindi questo l'unico caso in cui, mancando l'ultima delle (1'') basta che il tensore degli sforzi soddisfi alle prime (1'') che esprimono l'annullarsi della sua divergenza per ogni $x^3 = \text{cost.}$ [1]. In ogni altro caso, anche se le $x^3 = \text{cost.}$ sono sviluppabili ad es., bisogna che il tensore degli sforzi soddisfi ad un'ulteriore equazione indefinita rappresentata dall'ultima delle (1''). È evidente dunque l'influenza essenziale della seconda forma fondamentale delle superficie $x^3 = \text{cost.}$, il che potrà essere anche rilevato nelle successive specificazioni del problema.

(1) Cfr., ad es., R. Marcolongo, *Equilibrio dei corpi elastici* (Hoepli, 1904, p. 328 e segg.). Si noti che, nel caso di strati piani, la derivazione covariante in S_3 coincide con la stessa lungo ogni $x^3 = \text{cost.}$; come risulta dalla (7) della Nota introduttiva.

§ 2. – Soluzione delle equazioni indefinite col tensore degli sforzi dipendente da un'unica funzione.

Nella Nota già citata, il prof. Finzi ha dato la più generale soluzione delle equazioni (1). Essa, per lo spazio euclideo, è:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\,\varepsilon_{\beta\delta\mu}\,\chi^{\lambda\mu/\gamma\delta} \tag{3}$$

dove $\chi^{\lambda\mu}$ sono le componenti di un tensore arbitrario simmetrico di S_3. Se supponiamo che tale tensore sia isotropo [1], esso verrà a dipendere da un'unica funzione f [2]. Precisamente si avrà, con f funzione di $x^1\,x^2\,x^3$,

$$\chi^{\lambda\mu} = f g^{\lambda\mu} \tag{4}$$

e cioè:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\,\varepsilon_{\beta\delta\mu}\,g^{\lambda\mu}\,f^{/\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\,\varepsilon_{\beta\delta}{}^{\lambda}\,f^{/\gamma\delta} = (g_{\alpha\beta}\,g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta}\,g_{\gamma\beta})\,f^{/\gamma\delta}\,. \tag{3'}$$

Cerchiamo le condizioni cui deve soddisfare f perchè siano verificate le (2).

Separando dagli altri il caso in cui α ha il valore 3, e tenendo conto della forma particolare del ds^2 (§ 1 della Nota introduttiva), abbiamo:

$$\begin{cases} f^{/i\,3} = 0 \\ f_{/hk}\,g^{hk} = \Delta^* f = 0\,. \end{cases} \tag{5}$$

Osserviamo che l'ultima delle (1″) diviene, per la forma (3′) del tensore degli sforzi:

$$f_{/hk}\,b^{hk} + \mathrm{H} f_{/3\,3} = 0 \tag{6}$$

con:

$$\mathrm{H} = -\,b^h_h = -\,b_{hk}\,g^{hk} \tag{7}$$

funzione delle tre variabili che per ogni $x^3 = \text{cost.}$ dà la curvatura media della corrispondente superficie. Ora è facile vedere che la (6) è una conseguenza delle (5). Si ha infatti, per la seconda delle (5), e la (17) della Nota introduttiva:

$$\Delta^* f_{/3} = f_{/hk\,3}\,g^{hk} = f_{/h\,3\,k}\,g^{hk} = 0\,.$$

Applicando le formole di derivazione covariante e tenendo conto delle (3) (4) della Nota introduttiva e delle prime (5), si ottiene appunto la (6).

(1) U. Cisotti, loc. cit.

(2) Un tensore doppio simmetrico di S_3 dipendente da un'unica funzione si ottiene anche per derivazione covariante da uno scalare. Si ha allora $\chi^{\lambda\mu/\gamma\delta} = f^{/\lambda\mu\gamma\delta}$; ma, per la simmetria completa di questo tensore e l'emisimmetria delle ε, il corrispondente tensore degli sforzi è nullo.

Ma l'ultima delle (5) nel caso piano diventa $\Delta f = 0$ [1], dove Δ è l'operatore di Laplace nel piano. La soluzione (3′) non può quindi contenere come caso particolare la nota soluzione del problema di Clebsch, nella quale il tensore degli sforzi dipende da una funzione biarmonica delle due variabili $x^1 x^2$ (ed è di secondo grado in x^3, come risulta dalla (II) della Nota introduttiva).

§ 3. – Tensore degli sforzi vincolato.

Se in luogo delle (3′) poniamo $\Phi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma 3}\, \varepsilon_{\beta\delta 3}\, f^{/\gamma\delta}$ assicuriamo *a priori*, per le note proprietà delle ε, il verificarsi delle (2). Ma, avendo scelto tra le componenti del tensore di Ricci soltanto quelle in cui l'ultimo indice è 3, abbiamo costruito un tensore vincolato. Dovremo quindi porre, con le notazioni della Nota introduttiva:

$$\Phi_{\alpha\beta\,(33)} = \varepsilon_{\alpha\gamma(3)}\, \varepsilon_{\beta\delta(3)}\, f^{/\gamma\delta}\,. \tag{8}$$

Costruiamo con questo tensore vincolato le equazioni indefinite (1); separiamo in esse il caso in cui α ha il valore 3 dagli altri, teniamo conto della (10) della Nota introduttiva, della emisimmetria delle ε e della simmetria di $f^{/\gamma\delta\beta}$. Otteniamo:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij(3)}\, \varepsilon_{hk(3)}\, f^{/3k}\, b^{jh} = 0 \\ \varepsilon_{jl(3)}\, \varepsilon_{hk(3)}\, f^{/lk}\, b^{jh} = 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Queste, per le note relazioni tra le ε e le g (cfr. l'ultimo membro delle (3′)), e con le notazioni introdotte nel paragrafo precedente, diventano:

$$\begin{cases} \mathrm{H} f_{/i3} - f_{/j3}\, b_i^j = 0 \\ \mathrm{H}\Delta^* f + f_{/jh}\, b^{jh} = 0\,. \end{cases} \tag{9′}$$

Osserviamo che l'ultima (9′) non è naturalmente che l'ultima (1″) applicata alle (8) e che tutte le (9′) diventano identità solo nel caso piano. È questo dunque l'unico caso in cui il tensore vincolato (8) soddisfa alle equazioni indefinite qualunque sia f.

(1) Cfr. la nota (1) a p. 143.

Chimica (Chimica talassografica). — *Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia* [1] Nota II [2] di C. M. Maldura presentata dal Corrisp. G. Bargellini.

A seguito di una mia precedente Nota [3] vengono ora presi in considerazione i sali nutritivi e l'alcalinità delle acque lagunari di Orbetello.

Da molto tempo l'attenzione dei biologi è rivolta allo studio dei composti dell'azoto e del fosforo contenuti nell'acqua di mare, la cui presenza e quantità è in stretta relazione con lo sviluppo della vita nelle acque. In questi ultimi anni, sopratutto in seguito al perfezionamento dei metodi di indagine, il problema della produttività del mare può dirsi ormai inquadrato ed esteso dai limnologi allo studio delle condizioni della vita nelle acque dolci.

Nelle lagune poco o nulla è stato fatto al riguardo essendo le osservazioni tuttora rivolte allo studio delle varie forme di vita in relazione agli spettri salini. Quindi, pur mancando dei termini di confronto che potrebbero far trarre delle conclusioni più generali, i valori dei composti azotati e del fosforo, rilevati in Orbetello, presentano tuttavia un particolare interesse.

Innanzi tutto vediamo che in molti casi si rientra nelle proporzioni medie dell'Oceano e di quei mari ricchi di vita e di sostanze nutritive, come il Mare del Nord, ma non del Mediterraneo di cui è ben nota la povertà in sali nutritivi, cosa che a prima vista sembrerebbe contrastare con la ricchezza delle sostanze organiche contenute nei fanghi di Orbetello, che dovrebbe invece contribuire ad aumentare tali valori. Probabilmente l'abbondante vegetazione tende a ristabilire l'equilibrio con la utilizzazione diretta e immediata tanto dei nitrati che del fosforo. L'azoto ammoniacale, ultimo termine della decomposizione delle sostanze organiche azotate, forse perchè non direttamente utilizzato dalle piante, si ritrova ancora in proporzioni leggermente superiori.

A questo proposito è necessario far presente che il continuo, e spesso non indifferente ricambio delle acque operato dalle maree, rende difficile seguire la fluttuazione annuale di questi composti, come si può fare in mare, così che dai dati riportati sembra non esserci alcun rapporto tra la variabilità di essi e lo sviluppo stagionale della vegetazione.

(1) Lavoro eseguito presso il R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1935.
(3) Questi « Rendiconti », vol. XXII, pp. 64–68.

In via generale si può affermare che anche dall'osservazione degli spettri del N e del P non è possibile far rientrare l'ambiente lagunare di Orbetello nella classificazione limnologica, ad esempio come tipo di lago eutrofo, distrofo o alcalitrofo, dato che esso presenta in comune alcune di quelle caratteristiche che appunto differenziano questi tre tipi di laghi.

La silice si presenta spesso con valori piuttosto elevati e specialmente nella Stazione II si può osservare una certa regolarità nella fluttuazione annuale, con dei massimi corrispondenti ai mesi estivi.

Data la relazione tra contenuto in silice e sviluppo delle diatomee in questo senso non si può trarre nessuna considerazione dalle presenti osservazioni senza conoscere la presenza e lo sviluppo di queste forme di vita nella laguna di Orbetello.

Anche nel caso della silice gli apporti di acqua dolce, relativamente più ricca in silicati dell'acqua di mare, possono essere la causa della grandezza dei valori osservati.

Particolare importanza, in relazione ai fenomeni vitali, presentano i valori del pH e dell'alcalinità.

A questo proposito è bene chiarire che con quest'ultimo termine s'intende la concentrazione equivalente, espressa in milliequivalenti per litro, di una base forte in equilibrio con un radicale acido debole, e cioè la quantità delle basi presenti nell'acqua di mare, legate all'acido carbonico come carbonati e bicarbonati.

Il sistema carbonati–bicarbonati–acido carbonico costituisce il sistema tampone dell'acqua di mare, mentre il pH viene determinato dalla pressione parziale della CO_2.

Naturalmente i valori dell'alcalinità variano col variare della salinità, mentre l'alcalinità specifica, termine introdotto da Wattenberg [1] per indicare il rapporto "alcalinità per litro: contenuto in Cl °/₀₀", è una grandezza praticamente costante aggirantesi nel mare tra 0,1200 e 0,1225.

Anche nel caso dell'alcalinità purtroppo mancano precedenti osservazioni in laguna alle quali ci si possa riferire. Ultimamente Gripenberg [2] in un suo lavoro sui sedimenti del Mar Baltico tratta del contenuto in $CaCO_3$ e dei suoi rapporti col pH in quelle acque, però nessuna deduzione si può trarre a favore del caso presente, a causa della forte diversità del contenuto salino fra i due ambienti. Wattenberg [3] in alcune determinazioni eseguite

(1) H. Wattenberg, *Ueber die Bestimmung der Alkalinität des Meerwassers.* I. Mitt.: *Ueber den Kalkgehalt des Ozeanwassers.* « Ann. der Hydr. usw. » Jahrg. LVIII, S. 277, 1930; Id., *Ueber den Kalkgehalt des Ozeanwassers.* II. Mitt.: *Die Verteilung im Atlantischen Ozean.* Ibid., Jahrg. LIX, 273, 1931.

(2) S. Gripenberg, *A study of the sediments of the North Baltic and adjoining Seas.* « Merentutkimuslaitoksen Julkaisu Havsforskningsinstitutes skrift », N° 96, 1934.

(3) H. Wattenberg, *Kalziumkarbonat– und Kohlensäuregehalt des Meerwassers* in *Wiss. Ergebnisse d. Deutschen Atlant. Exped. auf « Meteor » 1925–1927*, Bd. VIII, 1933.

durante la campagna del « Meteor » in Atlantico ha potuto osservare che presso le foci del Rio delle Amazoni il valore dell'alcalinità specifica aumenta considerevolmente col diminuire della salinità (riscontrando un valore di 0,204 in corrispondenza di un contenuto in cloro di 4,67), ma anche le sue osservazioni poco possono illuminare la presente questione.

In una breve nota non è certamente possibile esaminare particolareggiatamente una questione così complessa, perciò mi devo limitare a far osservare che nella laguna di Orbetello generalmente l'alcalinità specifica subisce delle forti variazioni rispetto ai valori riscontrati nel mare da Wattenberg e da altri autori [1], e queste variazioni risultano meno appariscenti nella Stazione I che nella II, dove è più facile notare una certa regolare fluttuazione annuale corrispondente all'andamento del pH e allo sviluppo della vegetazione.

Infatti i valori massimi dell'alcalinità specifica si osservano nella Stazione II in corrispondenza della stagione invernale e all'inizio della primaverile, mentre i minimi nell'estiva ed all'inizio dell'autunnale. Inversamente si comportano i valori del pH.

Da una comparazione dei valori trovati con quelli che si potrebbero calcolare per l'acqua in condizioni normali, integrati da altre ricerche sulla pressione parziale e sul contenuto totale della CO_2, si dovrebbe notare l'influenza dei fenomeni fotosintetici e respiratori dell'abbondante flora, i quali assai probabilmente debbono costituire una delle principali cause delle variazioni osservate dall'alcalinità specifica, tali che per la loro entità non si dovrebbero attribuire unicamente alle corrispondenti variazioni di salinità.

È anche assai probabile che appunto questi stati di equilibrio dei carbonati determinino condizioni favorevoli allo sviluppo delle notevoli quantità di certi molluschi riscontrati nella laguna di Orbetello [2], ma ciò non potrebbe venire confermato che da uno studio molto approfondito delle condizioni chimico-fisiche di queste acque, studio che, per il complesso e l'entità dei fattori in giuoco, si presenta particolarmente arduo.

Nelle presenti ricerche ho adottato i metodi analitici in uso nelle indagini oceanografiche, e cioè: per la determinazione della salinità il metodo clorometrico di Knudsen, per l'ossigeno (espresso in cc. per litro) il metodo di Winkler, notando che nella determinazione della percentuale $\left(\frac{100.O_2}{O_2}\right)$ il valore dell'O_2 è stato riportato alla temperatura e alla salinità corrispondenti, e per il rapporto solfati:cloruri l'SO_4'' (espresso in gr. per Kg. di acqua) è stato determinato gravimetricamente come $BaSO_4$ seguendo la tecnica di Thompson. I composti azotati, del fosforo e della silice (tutti espressi in

(1) H. Wattenberg, loc. cit.; C. H. N. Cooper, *Chemical Costituents of Biological Importance in the English Channel*, Part II. *Hydrogen ion concentration, excess base, carbon dioxide and oxygen.* « Journ. Mar. Biol. Ass. », vol. XVIII, p. 729, 1933.

(2) N. Apolloni, *Ricerche faunistiche nella laguna di Orbetello.* « Boll. Pesca, Pisc. e Idrobiol. », VIII, 396, 1931.

mmgr. per m³ di acqua) sono stati determinati secondo i metodi proposti nella riunione di Oslo del Consiglio internazionale per l'esplorazione del mare, e cioè il metodo di Harvey per i nitrati, di Griess-Ilosvay per i nitriti, di Nessler per l'ammoniaca, di Denigès per i fosfati, e di Dièrert–Wandenbulke per la silice, servendomi in alcuni casi del fotometro di Pulfrich per la comparazione. La determinazione del pH è stata eseguita con il metodo colorimetrico di Sörensen e Palitzsch ed i valori ottenuti sono stati corretti per le corrispodenti salinità e temperature *in situ*, secondo la formula data da Buch, ed infine per l'alcalinità venne seguìta la tecnica di Wattenberg.

Tabella I.

Stazione I (Canale di Nassa).

Data	t°	Cl	S	SO_4	$\frac{100\,SO_4}{Cl}$	O_2	$\frac{100\,O_2}{O_2'}$	$N-NH_4$	$N-NO_2$	$N-NO_3$	P	Si	pH	A	$\frac{A}{Cl}$
19-4-34	17.0	15.10	27.20	2.1732	14.392	5.397	92.06	111.0	1.5	22.0	0.30	290	8.000	2.647	0.1753
18-5-34	19.7	15.18	27.43	2.8288	18.635	4.978	88.02	110.0	1.0	24.5	1.15	225	7.899	2.543	0.1675
20-6-34	23.3	20.13	36.36	2.7900	13.862	4.908	94.61	157.0	28.0	7.20	6.15	699	8.555	2.232	0.1108
20-7-34	25.6	—	—	—	—	2.651	44.28 (*)	95.5	0	—	0	336.5	8.325 (*)	2.356	—
22-8-34	22.0	20.92	37.79	2.3987	11.466	4.825	96.38	125.0	18.0	21.8	2.50	178.5	8.125	2.514	0.1201
19-9-34	23.6	21.16	38.22	2.8684	13.555	3.810	77.02	63.0	17.5	57.8	4.85	139.5	8.109	2.465	0.1165
22-11-34	10.3	18.09	32.68	2.5850	14.290	5.361	82.01	120.5	13.1	26.6	0.20	423	7.874	2.266	0.1252
19-12-34	14.8	19.70	35.59	2.6548	13.475	4.749	81.51	63.5	10.4	27.0	1.85	670	8.011	2.597	0.1318
18-1-35	8.1	20.45	36.94	1.7839	8.725	6.136	93.44	26.0	10.1	24.8	2.80	58.9	7.973	2.533	0.1239
20-2-35	12.0	18.15	32.79	2.6166	14.416	6.381	101.05	38.5	10.5	13.0	0	130.5	8.125	2.493	0.1374
20-3-35	13.5	20.26	36.60	2.8051	13.846	5.765	97.28	70.5	9.8	19.8	3.45	178.5	7.941	2.572	0.1269
19-4-35	14.1	20.80	37.57	2.9330	14.192	5.591	96.53	98.5	4.4	18.2	1.30	40.5	8.103	2.668	0.1283

(*) Non corretto per la salinità.

Tabella II.

Stazione II (Laguna di Ponente).

Data	t°	Cl	S	SO_4	$\frac{100\,SO_4}{Cl}$	O_2	$\frac{100\,O_2}{O_2'}$	$N-NH_4$	$N-NO_2$	$N-NO_3$	P	Si	pH	A	$\frac{A}{Cl}$
19-4-34	18.4	14.45	26.11	2.0884	14.45_3	5.038	86.52	160.0	14.0	23.5	2.00	550	7.88_0	2.551	0.1765
18-5-34	20.7	20.52	37.07	2.1642	10.54_7	4.83_5	92.64	150.0	12.5	18.9	0.50	390	8.05_0	2.543	0.1239
20-6-34	23.3	18.67	33.73	2.6299	14.08_6	5.13_3	100.00	145.0	14.4	110.5	7.05	455	8.47_8	2.272	0.1217
20-7-34	25.9	—	—	—	—	3.61_2	60.71 (*)	90.0	14.7	—	1.40	702	8.42_2 (*)	2.108	—
22-8-34	24.4	25.23	45.57	2.1359	8.46_5	2.578	55.61	100.5	16.6	96.0	8.45	1000	8.10_0	2.162	0.0857
19-9-34	24.5	24.53	44.30	3.1467	12.82_8	3.67_0	78.60	151.5	16.6	68.5	7.70	722.5	8.09_0	2.151	0.0877
22-11-34	10.2	17.60	31.80	2.5023	14.20_7	5.87_0	89.95	338.0	19.7	14.4	18.00	573.5	7.79_5	2.136	0.1213
19-12-34	10.7	14.03	25.35	2.0701	14.75_5	6.04_0	89.36	190.0	18.0	49.2	1.40	1191	7.87_5	2.002	0.1427
18-1-35	2.3	14.84	26.82	1.8397	12.39_7	7.63_0	94.43	276.0	37.1	37.4	3.15	178.5	7.76_2	2.195	0.1479
20-2-35	9.5	15.02	27.14	2.0804	$13\,85_0$	6.94_1	101 45	185.5	11.9	13.0	0	241	7.93_4	2.340	0.1558
20-3-35	13.1	14.92	26.96	2.1769	14.52_3	5.856	91.89	171.0	49.5	12.0	6.30	309	7.90_4	2.369	0.1588
19-4-35	13.7	16.96	30.64	2.5362	14.95_4	5.30_4	86.30	152.5	42.0	14.4	2.60	263	7.81_9	2.485	0.1465

(*) Non corretto per la galinità.

Chimica. — *Sulla struttura del fosfato ferrico* [1]. Nota [2] di V. Caglioti presentata dal Socio N. Parravano.

È noto che i composti del tipo ABX_4 cristallizzano fondamentalmente in due tipi di reticolo: anidrite e barite, entrambi rombici. Col crescere del diametro della particella B, si passa rispettivamente al tipo dello zircone e della monazite, tetragonali; un ulteriore aumento del diametro di B conduce al tipo della scheelite. Da quest'ultimo tipo si passa a quello della wolframite, monoclino, quando diminuisce il diametro della particella A.

Il passaggio da un reticolo all'altro avviene quindi solo per variazione del raggio degli ioni che costituiscono l'edifizio cristallino.

Levi e Ghiron [3] e Schultze [4] hanno però mostrato che i composti BPO_4 e $BAsO_4$ presentano una struttura tetragonale che è affine a quella della cristobalite; perciò un nuovo tipo di struttura si ritrova per i composti ABX_4.

In un lavoro in corso di stampa [5] io ho potuto mettere in evidenza che il fosfato di alluminio, preparato sia precipitando il solfato di alluminio con fosfato bisodico e neutralizzando l'H_2SO_4 che si libera con acetato sodico, sia precipitando con ammoniaca una soluzione d'idrossido d'alluminio in acido fosforico, dopo che è passato attraverso una fase armofa, cristallizza per riscaldamento di mezz'ora sotto cloruro di sodio a 900° in una fase con peso specifico 2.31 e una struttura del tutto analoga a quella della cristobalite stabile a bassa temperatura.

La cella elementare del fosfato d'alluminio così preparato è infatti pseudo–tetragonale con $\frac{c}{a} = 0.96$; una costante reticolare $a_0 = 7.135$ Å e contiene 4 molecole di $AlPO_4$; ma la sua struttura è probabilmente rombica come si verifica, del resto, per la cristobalite stabile a bassa temperatura.

Durante il corso delle ricerche che vado esponendo, Huttenlocher [6] ha mostrato che quando il fosfato di alluminio viene preparato da soluzioni di alluminato sodico e acido fosforico in eccesso, in tubo chiuso, a 250°, si ottiene una fase che presenta le proprietà morfologiche del quarzo, ha

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1935.

(3) Levi e Ghiron, « Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 6ª, vol. XVIII, p. 394 (1933).

(4) Schultze, « Zeitschr. phys. Chem. » B, *24*, 215 (1934).

(5) V. Caglioti, *Relazioni tra* $AlPO_4$ *e* SiO_2 *e tra acidi silicici e acidi allumofosforici*. « Atti V Congresso Nazionale di Chimica pura e applicata » (in corso di stampa).

(6) « Zeitschr. f. Kristall. », *90*, 508 (1935).

un peso specifico 2.56, $a_o = 4{,}93$ Å e $c_o = 2 \times 5{,}47$ Å. Tale fase ha lungo l'asse c una costante doppia di quella del quarzo.

Huttenlocher trova però che questa fase riscaldata si trasforma in un'altra avente uno spettro diverso da quello del quarzo, che, secondo me, potrebbe identificarsi con la fase da me trovata, analoga alla cristobalite. Anche riscaldando la variscite a 900° ho ottenuto la fase analoga alla cristobalite.

Nè a me nè a Huttenlocher è riuscito avere un prodotto con lo spettro descritto da Strada per $AlPO^4$ (1).

Dalle ricerche mie e di Huttenlocher risulterebbe perciò che il fosfato di alluminio può cristallizzare in tutti e due i tipi di reticolo, quello del quarzo e della cristobalite.

L'arseniato di alluminio, invece, secondo Machatschki (2) cristallizza nel tipo reticolare del quarzo. È evidente che, anche in questo caso, il passaggio dal tipo della cristobalite a quello del quarzo si compie per variazione del diametro della particella B del composto ABX_4. Era perciò da prevedere che anche il composto $FePO_4$ potesse cristallizzare in uno dei due tipi di struttura. Da quanto si potrà vedere più sotto, risulta infatti che $FePO_4$ presenta una struttura analoga a quella del quarzo. Ho preparato il prodotto precipitando una soluzione di cloruro ferrico con fosfato bisodico e neutralizzando l'HCl che si libera con la quantità calcolata di acetato sodico.

Il prodotto è stato quindi lavato con acqua e acido acetico, seccato in stufa e scaldato per due ore a 600°. Ha un colore bianco con *nuance* gialletta; e peso specifico, determinato col picnometro, 3.10. Lo spettrogramma del composto ottenuto con anticatodo di ferro è assolutamente identico per posizione e intensità delle righe a quello dell'arseniato di alluminio preparato dal solfato di alluminio e arseniato bisodico e seccato per sei ore a 700°. Lo spettro è analogo a quello del quarzo. Nella tabella che segue, riporto calcoli degli spettrogrammi del quarzo, dell'arseniato di alluminio e del fosfato ferrico.

(1) « Gazzetta Chimica It. », *64*, 653 e 662 (1934).
(2) « Zeitschr. Kristall. », *90*, 314, (1935).

TABELLA

QUARZO			$AlAsO_4$				$FePO_4$			
I	θ	(hkl)	I	θ	(hkl)	a_o	I	θ	(hkl)	a_o
d	13° 16′	(10.0)	d	13° 6′	(10 0)	4.92	d	12° 56′	(10.0)	5.014
f	16° 50′	(10.1)	f	16° 32′	(10.1)	4.971	f	16° 24′	(10.1)	5.009
m	23° 15′	(11.0)	d	23° 14′	(11.0)	4.896	d	22° 57′	(11.0)	4.954
mf	25° 23′	(10.2)	m	24° 23′	(10.2)	5.007	m	24° 23′	(10.2)	5.011
d	27° 14′	(20.0)	m	26° 31′	(20.0)	5.029	m	26° 23′	(20.0)	5.025
d	28° 53′	(20.1)								
f	32° 27′	(11.2)	f	31° 8′	(11.2)	5.028	f	31° 08′	(11.2)	5.034
d	35° 32′	(20.2)	m	35° 39′	(20.2)	4.911	m	34° 17′	(20.2)	5.028
f	39° 4′	(21.1)	f	37° 56′	(21.1)	5.002	f	37° 39′	(21.1)	5.040
m	41° 19′	(11.3)	m	40° 13′	(11.3)	5.028	m	40° 8′	(11.3)	5.042
md	43° 13′	(30.0)	d	42° 17′	(30.0)	4.973	d	41° 13′	(30.0)	5.083
ff	44° 55′	(20.3) (30.1)	ff	43° 4′	(20.3) (21.2)	5.029 5.018	ff	42° 55′	(21.2) (20.3)	5.041 5.037
m	48° 56′	(10.4)	m	43° 38′	(00.4) (30.1)	5.043 5.010	m	43° 30′	(00.4) (30.1)	5 061 5.028
			mf	46° 38′	(10.4)	5.029	mf	40° 21′	(10.4)	5.055
f	50° 36′	(30.2)	mf	48° 44′	(30.2)	5.010	mf	48° 38′	(30.2)	5.032
			m	51° 32′	(21.3)	4.917	m	51° 29′	(21.3)	5.040
m	52° 11′	(22.0)								
m	54° 2′	(22.1) (21.3)	m	52° 20′	(22.1) (11.4)	4.945	mf	52° 11′	(22.1) (11.4)	5.018 5.043
f	55° 13′	(31.0)	mf	53° 11′	(31.0)	5.024	mf	53° 11′	(31.0)	5.028
f	57° 19′	(31.1)	m	55° 11′	(20.4) (31.1)	5.036 5.013	m	54° 54′	(20.4) (31.1)	5.057 5.034
			md	57° 28′	(22.2) (30.3)	5.026 5.034	md	57° 11′	(22.2) (30.3)	5.048 5.068
d	58° 19′	(20.4)								
f	63° 44′	(31.2)	f	60° 37′	(31.2)	5.029	f	60° 37′	(31.2)	5.034
m	67° 44′	(10.5)	m	63° 5′	(40.0) (10.5)	5.002 4.928	m	62° 45′	(40 0) (10.5)	5.024 5.039
m	68° 18′	(40.1)	f	65° 2′	(21.4)	5.030	f	64° 45′	(21.4)	5.049
f	69° 35′	(21.4)			(40.1)	5.001			(40.1)	5.030
f	72° 52′	(22.3)	m	67° 44′	(22.3)	5.039	m	67° 53′	(22.3)	5.043
d	73° 53′	(11.5)	md	10° 52′	(11.5)	5.036	md	70° 27′	(11.5)	5.056
f	78° 17′	(40.2) (31.3)	mf	72° 18′	(40.2) (31.3)	5.067 5.032	mf	72° 18′	(40.2) (31.3)	5.031 5.037
				media	a_o = 5.005 A°			media	a_o = 5.035 A°	

Per il fosfato ferrico si calcola $\frac{c}{a} = 1{,}11$ $a_o = 5.035$ $c_o = 5.588$.

Nella cella elementare son contenute tre molecole, se si raddoppia la costante reticolare lungo l'asse c. Se si riscalda $FePO_4$ per un'ora a 900°, il suo spettrogramma non si modifica; e però si ottiene uno spettro differente, se il prodotto viene fuso sotto cloruro sodico.

Conclusione.

Il fosfato ferrico preparato per azione del fosfato bisodico sul cloruro ferrico in presenza di acetato sodico cristallizza in una fase morfologicamente identica a quella del quarzo, con una cella $a_o = 5.035$ $c_o = 5.588 \times 2$ $n = 3$ (d sperimentale = 3.1). Mentre il fosfato d'alluminio cristallizza in due fasi, analoghe rispettivamente al quarzo e alla cristobalite, il fosfato ferrico cristallizza normalmente nella fase analoga al quarzo.

Chimica (Chimica biologica). — *L'idrolisi enzimatica totale degli acidi condroitin-solforico e mucoitin-solforico nei loro componenti*[1]. Nota[2] di C. Neuberg e W. Cahill presentata, dal Socio A. Menozzi.

Secondo le attuali nostre conoscenze la demolizione enzimatica completa delle sostanze risultanti da più costituenti chimicamente eterogenei non è opera di un solo enzima, ma di una serie di fermenti. I processi di idrolisi totale delle proteine, degli acidi nucleinici, dei polipeptidi e degli etero-polisaccaridi, sono di ciò tipici esempi. Tra le sostanze chimicamente complesse, e per le quali è lecito pensare ad un significato biologico, sono da annoverarsi i rappresentanti assai diffusi del gruppo delle *mucine* o *sostanze mucoidi*, sulla cui costituzione essenziale ha fruttuosamente indagato il Levene coi suoi collaboratori[3]. I fatti messi in evidenza dall'Autore americano designano per questo gruppo due tipi di sostanze strutturalmente fondamentali: l'acido mucoitin-solforico e l'acido condroitin-solforico, entrambi formati da un aminozucchero, da acido glucuronico, acido acetico e acido solforico.

Secondo Levene l'acido mucoitin-solforico differisce dal condroitin-solforico per la natura dei legami dei singoli complementi. Ma la distinzione fondamentale deriva dal fatto che mentre nell'acido mucoitin-solforico l'aminozucchero è la glucosamina, nel condroitin-solforico esso è invece rappresentato da condrosamina, derivato della serie del galattosio.

(1) Lavoro eseguito nel Kaiser Wilhelm Institut für Biochemie di Berlino-Dahlem.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1935.

(3) P. A. Levene, « Monographs of the Rockefeller Institute for Medical Research », *18*, 1922.

La suscettibilità di scissione enzimatica di queste combinazioni risultava già dalle osservazioni di Neuberg e Rubin [1] i quali da tempo avevano dimostrato come i batteri attaccassero l'acido condroitin-solforico liberandone l'acido solforico. Da ciò venne postulata l'esistenza di una *solfatasi*. L'effettiva esistenza di un enzima capace di liberare l'acido solforico legato come estere nelle combinazioni organiche fu dimostrata dapprima da Neuberg e Kurono [2] per l'estere fenol-solforico e in seguito da Neuberg e Hofmann [3] per l'acido condroitin-solforico. Un enzima capace di agire sui glucosidi sinapici era invero già noto da tempo; ma esso rifletteva un gruppo di sostanze strutturalmente assai discoste da quelle qui considerate. L'acido solforico, in tali glucosidi, non è infatti legato a un radicale glucidico o fenolico, ma bensì congiunto per l'idrossile a un derivato dell'acido imino-tio-carbonico. Si possono cioè distinguere tre tipi di solfatasi: la fenolsolfatasi che scinde gli esteri fenol-solforici, la sinapoglucosidosolfatasi che idrolizza l'estere solforico dei tioglucosidi della senape, e la condrosolfatasi che agisce sull'estere solforico delle mucine.

La condrosolfatasi è presente nei batteri, e ne sono particolarmente ricche le forme affini al gruppo del *B. fluorescens non liquefaciens*. Si riscontra pure nel *B. pioceaneus* e nel *B. proteus*. Come già fu osservato dai precitati Autori, e come più da vicino recentemente fu visto da Neuberg e Cahill [4], la liberazione del radicale solforico dagli acidi condroitin e mucoitin-solforici, per azione della condrosolfatasi, è accompagnata dalla contemporanea formazione di sostanze riduttrici. Noi abbiamo ora trovato che *la condrosolfatasi determina la scissione completa degli acidi mucoitin e condroitin-solforici*. Essi vengono scomposti nei quattro costituenti prima elencati.

Parte sperimentale.

Ci servimmo, come substrati, degli acidi condroitin-solforico e mucoitin-solforico in forma dei rispettivi sali sodici. L'acido condroitin-solforico venne preparato dai setti nasali del maiale. Esso era privo di solfati minerali e di sostanze riduttrici. L'acido mucoitin-solforico venne ottenuto dai cordoni ombelicali umani, per noi espressamente raccolti in tre cliniche ginecologiche di Berlino. La preparazione dell'acido venne eseguita secondo il procedimento di Levene. Anche in questo caso il preparato ottenuto era esente così da solfati inorganici come da sostanze riduttrici.

Come agente enzimatico ci servimmo del fermento tipico del *B. fluorescens*, ottenuto in forma di preparato secco all'alcool-etere.

(1) C. Neuberg e O. Rubin, «Bio. Z.», *67*, 82, 1914.

(2) C. Neuberg e K. Kurono, «Bio. Z.», *140*, 295, 1923.

(3) C. Neuberg e E. Hofmann, «Naturwissensch.» *19*, 484, 1931; «Bio. Z.», *234*, 345, 1931.

(4) C. Neuberg e W. Cahill, «Bio. Z.», *275*, 328, 1935.

I. – *Scissione enzimatica dell'acido condroitin–solforico.*

7,0 gr. di sale sodico dell'acido condroitin–solforico, contenente il 5,4 % di zolfo, vennero sciolti in 800 cc. di acqua e addizionati di 24 gr. di preparato enzimatico e di 10 cc. di toluolo. La miscela, racchiusa in bottiglia di vetro a tappo smerigliato, venne mantenuta per quattro giorni in termostato a 37° C. Venne quindi centrifugata e il liquido limpido così ottenuto si evaporò a temperatura ambiente in apparecchio di Faust–Heim sino al volume di 200 cc.

a) *Isolamento dell'acido glucuronico.* — Metà del liquido (100 cc.) servirono per la determinazione dell'acido glucuronico. La soluzione, direttamente e fortemente riducente il Fehling, venne ulteriormente concentrata in apparecchio di Faust-Heim sino a sciroppo. La reazione, neutra al rosso Congo, era debolmente acida al tornasole. pH = 6,2. A questo punto lo sciroppo venne addizionato di acido solforico diluito sino a reazione nettamente acida al rosso Congo e contemporaneamente si aggiunsero circa otto volumi di alcool assoluto. Si ottenne con ciò l'allontanamento di gran parte delle sostanze di partenza, dell'enzima e dei sali inorganici. Dopo filtrazione e lavaggio del precipitato con alcool, si aggiunse alla soluzione la quantità di carbonato di bario esattamente richiesta per l'eliminazione dei solfati e si concentrò quindi nuovamente a temperatura ambiente. Il liquido concentrato si riprese con acqua, si filtrò, si addizionò di un eccesso di cinconina e si riscaldò per due ore a b. m.; questo allo scopo di trasformare nel sale dell'alcaloide il glucuron–lattone eventualmente formatosi. La soluzione venne infine addizionata di poco nero animale e, dopo raffreddamento, filtrata.

La soluzione limpida e incolora, previo allontanamento dell'alcaloide libero mediante ripetuta estrazione con cloroformio, venne sottoposta a concentrazione, col che già si ottenne una parziale separazione del sale di cinconina dell'acido glucuronico. La quantità rimanente si rapprese col raffreddamento della soluzione. Il glucuronato di cinconina, trasportato sul filtro con poca acqua diaccia, si separò per aspirazione alla pompa e si ricristallizzò quindi due volte dalla soluzione acquosa calda. Si ottennero così g. 1,5 di prodotto già in stato di purezza. L'identificazione fu accertata in base all'analisi ed al potere rotatorio [1]. Una traccia del composto ha dato intensiva al massimo le reazioni della naftoresorcina-benzolo e della naftoresorcina–cloroformio [2], così come la reazione dell'orcina. Esso ha ridotto intensamente il Fehling. La sua soluzione, privata per trattamento con ammoniaca dell'alcaloide, e addizionata di acqua di barite, ha separato il caratteristico precipitato fioccoso di color giallo arancio ed ha pure dato luogo a precipitazione per trattamento con sottacetato di piombo.

(1) C. Neuberg. «B.», *33*, 3320, 1900.
(2) C. Neuberg e M. Kobel, «Bio. Z.», *243*, 435, 1931.

b) *Caratterizzazione della condrosamina.* — La seconda metà del liquido venne addizionata di acetato di bario e centrifugata. La soluzione venne quindi trattata direttamente con acetato di p-bromofenilidrazina. Come è noto [1] questo reattivo dà luogo, in presenza di acido glucuronico, alla formazione di composti difficilmente solubili; in particolare esso dà un sale di bario che è praticamente insolubile in acqua e nei solventi organici e che pertanto si presta alla separazione dell'acido glucuronico. L'isolamento, in stato di chimica purezza, dell'aminozucchero come sale di bario del derivato p-bromofenilidrazinico non ci è stata possibile. *Ci è invece riuscita la sua separazione come p-bromofenilosazone.* A differenza del composto con l'acido glucuronico, che si separa immediatamente, il p-bromofenilosazone dell'aminozucchero non precipita che dopo oltre un'ora di riscaldamento. Se dopo aver filtrato a caldo il composto idrazinico dell'acido glucuronico, si riscalda il filtrato ulteriormente per circa un'ora dopo aggiunta di altro acetato di p-bromofenilidrazina, l'osazone comincia tosto a separarsi. Già il prodotto grezzo è cristallino. La sua separazione si ottiene completa lasciando a sè qualche tempo la soluzione raffreddata a 0° C. Separato alla pompa e lavato con acido acetico e con acqua, in cui è insolubile, l'osazone venne essiccato e ricristallizzato due volte dall'alcool diluito. Si ottenne così in forma di aghi gialli con p. f. 175° C. A differenza del composto dell'acido glucuronico, esso si scioglie in acido acetico diluito e in acetone. È identico al p-bromofenilgalattosazone, come risulta anche dal suo punto di fusione misto, che fu trovato a 178–180° C. La sua purezza fu confermata dall'analisi. Rendimento 0,7 gr.

c) *Caratterizzazione dell'acido acetico.* — Per la dimostrazione della separazione enzimatica dell'acido acetico presente in forma di gruppi acetilici nell'acido condroitin-solforico, l'esperienza venne condotta nel modo seguente: 0,5 gr. di acido condroitin-solforico libero vennero esattamente neutralizzati con idrossido di litio e portati con acqua al volume complessivo di 50 cc. Vennero quindi addizionati di gr. 1,5 di fermento e di 1 cc. di toluolo e lasciati quindi a sè per due giorni in termostato a 37° C.

Il liquido venne quindi sottoposto a centrifugazione e la parte limpida si concentrò in apparecchio di Faust-Heim sino a pochi cc. Il residuo all'evaporazione venne estratto con alcool, che lascia indisciolte impurezze varie mentre scioglie facilmente l'acetato di litio. Dopo allontanamento dell'alcool il residuo venne ripreso con poca acqua e su di esso si eseguì la reazione del nitrato di lantanio secondo Krüger-Tschirch [2]. La reazione fu intensamente positiva. Sulla stessa soluzione non ancora purificata per trattamento con alcool, la reazione era del resto già apparsa positiva, se pure meno intensa

(1) C. Neuberg, « B. », *32*, 2395, 1899; G. Goldschmidt e E. Zerner, « Monatsh. Chemie », *33*, 1217, 1912; A. Jolles, « B. », *45*, 3280, 1912.

(2) D. Krüger e E. Tschirch, « Ber. », *62*, 2782, 1929.

e condizionata all'impiego di una maggiore quantità di jodio, consumato dalle varie impurezze presenti in soluzione.

d) *La determinazione dell'acido solforico liberato per effetto dall'azione enzimatica* non fu eseguita quantitativamente, poichè sotto questo aspetto il processo era già stato accuratamente indagato da Neuberg e Hofmann. Qualitativamente la liberazione di acido solforico fu direttamente accertata sul liquido d'esperienza, previo trattamento con acido acetico per allontanare le proteine. La quantità di acido solforico liberata apparve assai copiosa.

I dati esposti ci dimostrano la possibilità di dissociazione enzimatica completa dell'acido condroitin-solforico. Particolarmente degno di nota è la liberazione d'acido acetico, che secondo Levene, sarebbe unito al gruppo azotato dell'aminozucchero. Tale scissione lascia pensare all'intervento di una aminoacidasi. E più precisamente, secondo noi, ad un nuovo tipo di enzima: ad una aminosaccaro–acidasi capace di idrolizzare gli aminozuccheri acilati.

Il preparato enzimatico da noi impiegato contiene quindi tutti gli enzimi necessari all'idrolisi completa dell'acido condroitin-solforico. È cioè un fermento plurimo, confrontabile con l'*emulsina*, la *tripsina*, la *mirosinasi* [1] ecc.

II. — *Scissione enzimatica dell'acido mucoitin–solforico.*

Venne impiegato per queste esperienze il preparato ottenuto dai cordoni ombelicali. Le esperienze, così come le successive operazioni analitiche, furono condotte sostanzialmente come per l'acido condroitin-solforico. La diversa composizione del substrato richiese per altro una modificazione di procedimento.

6,2 gr. di sale sodico dell'acido mucoitin-solforico vennero sciolti in 600 cc. di acqua, addizionati di gr. 18 di preparato enzimatico e di cc. 7,5 di toluolo e lasciati quindi a sè in termostato a 37° C per quattro giorni. Per la separazione dei vari prodotti dell'azione enzimatica il liquido venne centrifugato e la soluzione limpida ottenuta venne divisa, come nella prima esperienza, in due parti uguali.

a) Da una metà della soluzione venne separato l'acido glucuronico come sale di cinconina. Il prodotto grezzo cristallizzò in questo caso con una certa difficoltà. A separazione avvenuta presentò però il suo tipico comportamento.

b) L'altra metà della soluzione venne debolmente acidificata con acido bromidrico e quindi evaporata in apparecchio di Faust-Heim. Il sedimento di sostanze proteiche formatosi si separò per centrifugazione ed il liquido si trattò secondo Steudel [2] con isocianato di fenile, portando la soluzione

(1) C. Neuberg e O. v. Schoenebeck, «Bio. Z.», *265*, 223, 1933.
(2) H. Steudel, «H.», *34*, 368, 1902.

i limiti stabiliti di alcalinità mediante aggiunta di KOH n/1. Si separò così il fenilisocianato della glucosamina, di aspetto gelatinoso, riducente il Fehling. Separato alla pompa, esso venne in seguito, secondo il procedimento, trasformato nella corrispondente aldeide per ebollizione in presenza di acido acetico al 20 %. L'aldeide cristallizzò direttamente dalla soluzione e la sua identità fu confermata dall'analisi. Punto di fusione e punto di fusione misto a 212,5° C. Potere rotatorio concordante con quello del preparato di confronto ottenuto dal cloridrato di d-glucosamina.

c) L'*acido acetico* venne riconosciuto direttamente nel liquido di digestione enzimatica per mezzo della reazione del nitrato di lantanio e jodio. Abbiamo rinunciato alla sua determinazione quantitativa per il fatto che la maggior parte dei metodi proposti a questo scopo prescrivono una distillazione da operarsi sulla soluzione acidificata, il che poteva di per sè esser causa di liberazione di acido acetico dal substrato.

d) L'*acido solforico* venne determinato, sul liquido preventivamente spogliato delle sostanze proteiche per trattamento con acido acetico, per precipitazione a caldo con acetato di bario. Abbiamo trovato, dopo 5 giorni di azione enzimatica, una scissione pari al 95 % della quantità totale di acido solforico legato con estere.

In concordanza coi dati di Levene, abbiamo noi pure constatato che l'acido mucoitin-solforico non presenta composizione costante. Il contenuto in solfo varia da 1,23 a 3,20 %.

Oltre che dal funicolo ombelicale, abbiamo preparato dell'acido mucoitin-solforico dal corpo vitreo e dalla cornea dell'occhio bovino. Anche questi composti si rivelarono suscettibili di idrolisi da parte del predetto fermento. Ci siamo a questo riguardo limitati alla constatazione della comparsa in copia di sostanze riduttrici e della abbondante separazione di solfati.

Abbiamo naturalmente istituito, parallelamente ad ogni esperienza, una prova di controllo. Nelle condizioni sperimentali dette di tempo e di temperatura, i substrati non subirono di per sè idrolisi alcuna. Il preparato enzimatico diede luogo alla separazione di quantità assai piccole di solfati e di sostanze riduttrici, di cui si è tenuto conto nelle varie determinazioni analitiche. Non diede però di per sè nè acido glucuronico nè aminozuccheri.

Le esperienze qui riferite furono compiute con fermenti di origine batterica. Era altamente interessante il provare se anche nell'organismo animale fosse presente un enzima attivo su questi substrati. Gli estratti acquosi di cartilagini di setto nasale di maiale, così come quelli delle cartilagini costali del vitello, si sono rivelati attivi. Fu manifesta la comparsa di sostanze riduttrici; ma sino ad ora non abbiamo osservato separazione di solfati, o soltanto in tracce. Gli estratti ottenuti dalle cartilagini in cui è presente acido condroitin-solforico, dànno di per sè luogo, per digestione, alla formazione

di sostanze riduttrici, provenienti dai sali dell'acido condroitin-solforico passati in soluzione. Comportamento analogo hanno gli estratti di cartilagini costali, dai quali si originano però sostanze riduttrici in minore misura. Il potere riduttore di questi estratti è lieve; esso aumenta considerevolmente per aggiunta di acido condroitin-solforico.

Chimica. — *Reazione cromatica fra nitroprussiato e solfiti (Reazione di Bödeker)* [1]. Nota [2] di G. Scagliarini, presentata dal Socio M. Betti.

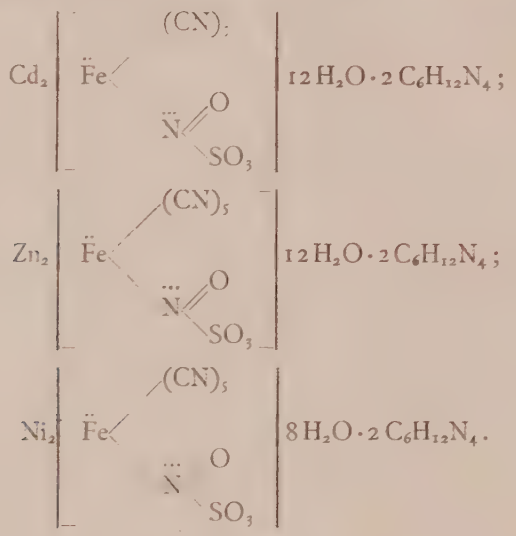
C. Bödeker [3] aggiungendo una soluzione di nitroprussiato ad una di solfito alcalino ottenne un liquido di colore rosso che diveniva più intenso per aggiunta di solfato di zinco e che con ferrocianuro potassico dava luogo ad un precipitato pure di color rosso. Hoffmann [4] più tardi mescolando soluzioni di solfito e nitroprussiato sodico ebbe pure la nota colorazione rosso intensa e mantenendo il liquido nel vuoto, su acido solforico, vide che a mano a mano che esso andava decolorandosi, si separava oltre a solfato sodico un composto giallo chiaro corrispondente alla formula $Na_5\left[\ddot{F}e\begin{matrix}(CN)_5\\SO_3\end{matrix}\right]$ cioè al solfito-pentacianuro sodico. Questo si può ottenere assai più puro dall'acquo-ferro-pentacianuro sodico con solfito sodico.

I solfito-pentacianuri danno pertanto soluzioni colorate in giallo e non già in rosso e perciò la reazione di Bödeker deve evidentemente dipendere dalla formazione di un altro complesso che poi decomponendosi conduce alla formazione di solfito-pentacianuro. D'altra parte come ho potuto riconoscere, l'acquo-ferripentacianuro sodico con solfito sodico si riduce decolorandosi da violetto a giallo verdastro e dando alla fine solfito-pentacianuro. È appunto in questo modo che L. Cambi [5] preparò il sale potassico.

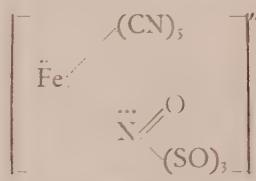
Non è dunque al ferro che il gruppo SO_3 si lega per dare la colorazione rossa di Bödeker, bensì al gruppo NO del nitroprussiato. Tuttavia non ho potuto ottenere allo stato solido il composto rosso, né precipitando il prodotto della reazione fra solfiti e nitroprussiati per mezzo dell'alcool metilico o etilico (come succede in genere per quasi tutti i pentacianuri che sono poco solubili in questi solventi) né sostituendo, per doppio scambio, al sodio metalli bivalenti come lo zinco, il cadmio ecc. Soltanto intervenendo sulle soluzioni di questi ultimi sali con un reattivo isolante come l'esame-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chinica generale della Università di Ferrara.
(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1935.
(3) « Ann. Pharm. », *117*, 193 (1861).
(4) « Zeit. Anorg. Ch. », *11*, 31 (1896).
(5) « Gazz. Chim. It. », *41*, I, 164 (1911).

tilentetrammina, di cui già altra volta mi ero servito, ho potuto ottenere sali stabilissimi, di colore rosso sangue se umidi e rosso-violetto allo stato secco, ai quali, in base ai risultati analitici e per le ragioni suesposte, attribuisco la costituzione:



Questi sali contengono perciò l'anione colorato:



analogo a quello solfonitroprussico [1] da cui, per blanda ossidazione ho anche tentato di ottenerli ma con risultati fino ad ora negativi.

Non potendosi realizzare in questo caso un elettrodo reversibile agli ioni $(SO_3)''$, non si può dimostrare che essi entrano a fare parte dello ione complesso solfitonitroprussico; così pure determinazioni conduttometriche non hanno dato risultati sicuri sulla formazione del complesso. Ecco invece come si è potuto giungere allo scopo.

La reazione dovuta allo ione $(SO_3)''$ del solfito alcalino si può schematicamente rappresentare così:

$$[\ddot{F}e(CN)_5\ddot{N}O]'' + SO_3 + 2\theta = [\ddot{F}e(CN)_5\ddot{N}OSO_3]''''.$$

Avendosi in questa reazione la variazione di valenza di un ione, e precisamente il salto di valenza dello ione nitroprussico bivalente a ione solfitonitroprussico

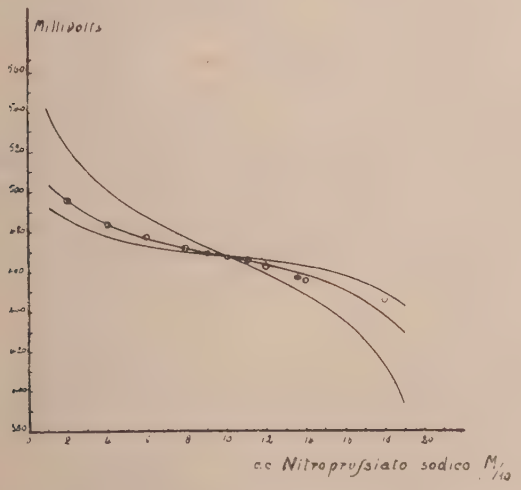
(1) Questi « Rendiconti » (6°), VIII (1928), p. 75.

tetravalente, a spese di due elettroni ceduti dallo ione $(SO_3)''$, doveva essere possibile mettere in evidenza, mediante un elettrodo indifferente, il potenziale di ossido–riduzione che si origina da questo passaggio di elettroni. Ho sperimentato con un elettrodo di mercurio in corrente di azoto giacchè in corrente di idrogeno il sale complesso si altera rapidamente.

Misure eseguite in atmosfera di azoto, con elettrodo di mercurio puro, collegato ad un elettrodo a calomelano saturo, hanno dato per il potenziale di ossido–riduzione normale il valore di 0,468 volt a 21°, per soluzioni M/10 dei due reagenti.

Allo scopo di misurare il salto di valenza dello ione nitroprussico furono determinati i valori del potenziale di ossido–riduzione a diverse concentrazioni delle sostanze reagenti. Si usavano soluzioni M 10 delle due sostanze versando volumi misurati di solfito sodico in un volume noto di nitroprussiato sodico. La temperatura era mantenuta costante a 21°. I valori di queste differenze di potenziali sono dati dalla nota formula:

$$\Pi = \frac{RT}{ZF} \log \frac{[C_n]}{[C_{stn}]} + \Pi_0$$



dove $[C_n]$ e $[C_{stn}]$ sono le concentrazioni ioniche del nitroprussiato e del solfito–nitroprussiato. Il valore di Π_0 viene ricavato sperimentalmente quando $[C_n] = [C_{stn}]$ cioè quando il volume del solfito aggiunto al nitroprussiato raggiunge la metà del volume di questo preso per l'esperienza. Dando a z valori successivi a partire dalla unità furono costruite le diverse curve dei potenziali di ossido riduzione corrispondenti al passaggio degli ioni nitroprussico dalla bivalenza a valenza successiva. Le curve mostrano naturalmente un flesso quando $[C_n] = [C_{stn}]$. I valori trovati per Π cadono con buona approssimazione (vedi diagramma) sulla curva calcolata in base alla assunzione di

due elettroni, vale a dire in base al passaggio della bivalenza dello ione $[\ddot{F}e(CN)_5\ddot{N}O]''$ alla tetravalenza dello ione $[\ddot{F}e(CN)_5\ddot{N}OSO_3]''''$; si discostano sensibilmente dalle altre curve calcolate in base al passaggio a valenze differenti. Resta così dimostrata la formazione dello ione complesso tetravalente solfitonitroprussico nella reazione di Bödeker.

Preparazione dei solfito–nitroprussiati. - A soluzioni acquose concentrate di nitroprussiato e di solfito sodico (in quantità equimolecolari) vengono aggiunte soluzioni pure concentrate e fredde di acetato di zinco (o di cadmio, o di nichel) (una molecola) e di urotropina (2 molecole). Si ottengono così subito dei precipitati che al microscopio si mostrano costituiti da cristallini omogenei colorati intensamente in rosso–sangue allo stato umido e in rosso violetto allo stato secco. Raccolti su filtro alla pompa e lavati ripetutamente con acqua, nella quale sono praticamente insolubili, si pongono ad asciugare all'aria fra carta da filtro e quindi si analizzano.

Solfito–nitroprussiato di cadmio e urotropina.

$$Cd_2\left[\ddot{F}e\begin{matrix}(CN)_5\\ \\ \ddot{N}OSO_3\end{matrix}\right]\cdot 12\,H_2O\cdot 2\,C_6H_{12}N_4.$$

Il ferro venne determinato tanto per pesata quanto volumetricamente dopo aver distrutto con acido solforico il complesso: lo solfo col metodo di Carius; l'azoto col metodo della microanalisi di Pregl: l'acqua dalla perdita che subisce il composto tenuto in stufa a 100° in corrente di azoto. Il cadmio venne determinato come solfato dopo l'eliminazione del ferro.

Calcolato %		Trovato %	
Cd	22.10	21.50	21.95
Fe	5.49	5.44	5.04
N	19.27	19.27	19.37
S	3.15	3.15	3.28
H_2O	21.24	21.10	

Solfito–nitroprussiato di zinco e urotropina.

$$Zn_2\left[\ddot{F}e\begin{matrix}(CN)_5\\ \\ \ddot{N}OSO_3\end{matrix}\right]\cdot 12\,H_2O\cdot 2\,C_6H_{12}N_4.$$

Lo zinco venne determinato come pirofosfato. Gli altri elementi come è stato detto precedentemente.

Calcolato %		Trovato %	
Zn	14.18	14.62	14.52
Fe	6.05	6.61	6.71
N	21.25	21.80	21.42
S	3.46	3.60	
H_2O	23.40	22.96	

Solfito–nitroprussiato di nichel e urotropina.

$$Ni_2\left[\begin{matrix} & & (CN)_5 \\ & \ddot{Fe}\langle & \\ & & \dddot{N}OSO_3 \end{matrix}\right] 8H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4 .$$

Il nichel venne dosato tanto come ossido quanto per mezzo dell'acetildiossima. Gli altri elementi come è stato detto precedentemente.

Calcolato %		Trovato %	
Ni	14.02	14.65	14.42
Fe	6.67	7.24	
N	23.42	23.77	
S	3.82	3.95	
H_2O	17.19	16.68	

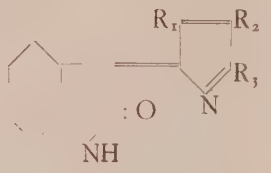
Chimica. — *Sulla reazione fra pirrolo e isatina. (Sui Bleu di pirrolo)* [1]. Nota III [2] di P. Pratesi e A. Zanetta, presentata dal Socio M. Betti.

La reazione fra pirrolo e isatina, fatta avvenire in soluzione acquosa o acetica in opportune condizioni ed in presenza di acido solforico, conduce a due materie coloranti che Liebermann e Häse [3] distinsero col nome di Bleu di pirrolo A e B. Il Bleu di pirrolo B si distingue nettamente dall'altro per la bella lucentezza metallica che mostra allo stato solido e per la sua molto minore solubilità nell'acido acetico e nella piridina. Al Bleu di pirrolo B venne attribuita da Liebermann e Krauss [4] la composizione $C_{24}H_{16}N_4O_2$ e al Bleu A la composizione $C_{24}H_{16}N_4O_3$.

Ora il Bleu di pirrolo B, che noi abbiamo ripreparato seguendo le indicazioni di Liebermann e Häse e che ci ha fornito all'analisi gli stessi valori

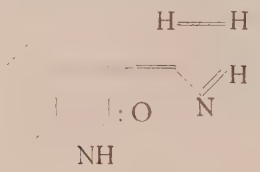
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1935.
(3) «Ber.», *38*, 2847 (1905).
(4) «Ber.», *40*, 2492 (1907).

ottenuti dagli Autori, mostra caratteri fisici e chimici straordinariamente rassomiglianti a quelli dei prodotti di condensazione fra isatina e C–alchil-pirroli per i quali uno di noi (P) ha dimostrato in precedenti ricerche [1] la costituzione di 5 [pirrolenil–] β isatine

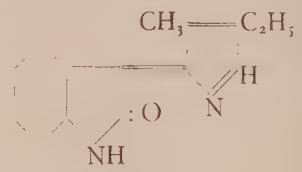


(I)

Quindi, con estrema probabilità, anche al prodotto B di reazione fra isatina e pirrolo dovrà competere analoga costituzione e precisamente quella della semplice 5 [pirrolenil–] β isatina (form. II)

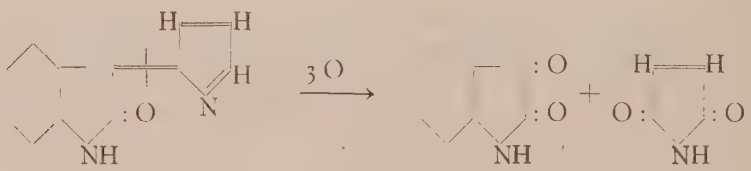


(II)



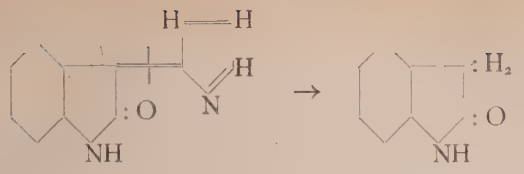
(III)

la cui formula ($C_{12}H_8ON_2$) è esattamente la metà di quella proposta da Liebermann e Krauss e che rappresenterebbe così la sostanza madre dei Bleu di pirrolo. Le ricerche che esponiamo nella presente Nota confermano pienamente questo punto di vista. L'ossidazione del Bleu di pirrolo B mediante CrO_3 in soluzione acetica ha fornito come prodotti finali isatina e maleinimide:



In condizioni del tutto analoghe, per ossidazione con CrO_3 o con pedrolo in soluzione acetica, il Bleu di opsopirrolo (formula III), la cui costituzione è stata dimostrata nelle ricerche precedenti, ha fornito isatina e metil–etil–maleinimide. Per decomposizione pirogenica nel vuoto dal Bleu di pirrolo B abbiamo ottenuto con buoni rendimenti ossindolo:

(1) Questi «Rendiconti», *17*, 954 (1933); *18*, 53 (1933); «Liebigs Ann.», *504*, 258 (1933); «Ann. Chim. appl.», *25*, 195, 203 (1935).



Con questo resta dimostrato direttamente, e per la prima volta, che l'isatina impegna nella condensazione col pirrolo il carbonile in β, confermando quanto uno di noi aveva già ammesso per i Bleu degli alchilpirroli. Nel caso infatti che il carbonile impegnato fosse stato quello in α, si sarebbe dovuto ottenere l'isomero indossile.

D'altra parte la costituzione di 5 [pirrolenil–] β isatina semplice per il Bleu di pirrolo B è in perfetto accordo con l'analogia nel comportamento chimico che il Bleu di pirrolo B ha col Bleu di opsopirrolo. Soluzioni (acetiche o piridiche) del Bleu di pirrolo B e del Bleu di opsopirrolo si colorano in un bel rosso violetto stabilissimo per aggiunta di piccole quantità di acqua ossigenata, di acido nitrico, di acido perbenzoico e anche di tracce di bromo; aumentando le quantità dei primi due ossidanti la colorazione sparisce per dar luogo a quella gialla dell'isatina, prodotto finale dell'ossidazione. Invece i bleu di 2·3·dimetilpirrolo (Form. I; $R_1 = H$, $R_2 = R_3 = CH_3$), di 2·3·4·trimetilpirrolo (Form. I; $R_1 = R_2 = R_3 = CH_3$) e di 2·4·dimetil–3·etilpirrolo (Form. I; $R_1 = R_3 = CH_3$, $R_2 = C_2H_5$) in soluzione si scolorano lentamente, ossidandosi, con i primi tre reattivi ed il bromo agisce su di essi dando luogo a dei bromoderivati le cui soluzioni sono colorate in bleu–verde.

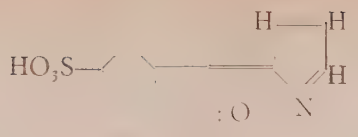
Il comportamento dei Bleu di pirrolo B e di opsopirrolo è dovuto con ogni probabilità al fatto che in questi due composti esiste un nucleo pirroleninico avente un gruppo metinico in α non sostituito.

Stabilita la costituzione del Bleu di pirrolo B ci premeva di fissare quella del corrispondente acido solfonico, che si ottiene con buon rendimento per solfonazione diretta del bleu [1] e che, riducendo a metà la formula doppia assegnatagli da Liebermann e Krauss, avrebbe la composizione di un acido monosolfonico $C_{12}H_7(SO_3H)N_2O$.

L'ossidazione del derivato solfonico mediante bicromato potassico e acido solforico ha condotto allo stesso acido isatin–5–solfonico che si ottiene per ossidazione dell'acido indigotindisolfonico. Resta quindi fissata l'entrata e la posizione del gruppo solfonico nel nucleo dell'isatina e di conseguenza la costituzione del derivato solfonico come quella dell'acido 5 [pirrolenil–] β–isatin–5–solfonico (Form. IV) [2].

(1) Liebermann e Häse, loc. cit., p. 2852.

(2) Sono in corso esperienze per studiare le possibilità di impiego di questo colorante nella tecnica di microscopia istologica, poichè da ricerche preliminari sembra di vantaggiosa applicazione.



(IV)

In base a queste e alle precedenti ricerche, a tutti quei coloranti che si formano dal pirrolo e isatine sostituite in seguito a semplice eliminazione di acqua e che Liebermann ha compreso con la denominazione di Bleu di pirrolo di tipo B, spetta formula semplice e costituzione di pirrolenil–isatine.

Sembra anzi, da un recente lavoro di Grassmann e v. Arnim [1], che la condensazione del pirrolo con composti nucleo–carbonilici debba essere suscettibile di generalizzazione.

Nella presente Nota descriviamo anche la preparazione del Bleu di 2·3·4·trimetilpirrolo (5[2·3·4·trimetil–pirrolenil–] β isatina).

Quanto al Bleu di pirrolo A, Liebermann e Häse (l. c.) dettero questo nome al prodotto da loro ottenuto per azione del pirrolo sopra una soluzione acquosa di isatina acida per acido solforico. Il prodotto aveva composizione assai vicina a quella del colorante ottenuto per la prima volta da Victor Meyer [2] in condizioni analoghe e da Ciamician e Silber [3] per riscaldamento dei due componenti in soluzione acetica.

Facendo reagire isatina e pirrolo in soluzione acetica, nelle condizioni descritte nella parte sperimentale di questa Nota, noi siamo riusciti ad ottenere il colorante allo stato nettamente cristallino. All'analisi esso ha dato valori coincidenti con quelli trovati da V. Meyer e da Ciamician e Silber per i loro prodotti. Quasi certamente si tratta sempre della stessa sostanza e noi crediamo di dover ricondurre le divergenze dei dati analitici di Liebermann e Häse alla non assoluta purezza dei loro preparati, dovuta al contatto troppo prolungato dei reattivi in presenza dell'acido solforico. In queste condizioni si formano sempre sostanze nerastre di difficile separazione. Aggiungasi ancora che il colorante non è insensibile agli acidi minerali e che Liebermann e Häse hanno sempre analizzato precipitati amorfi.

Malgrado che noi abbiamo potuto analizzare il colorante ripetutamente cristallizzato, pure ci asteniamo dallo scrivere una formula. È certo che non si tratta nè di un semplice prodotto di condensazione dell'isatina col pirrolo nel rapporto 1 : 1 nè di un prodotto di ossidazione del Bleu di pirrolo B, come ritennero Liebermann e Krauss (loc. cit.). La reazione deve essere più complicata tanto è vero che il prodotto, ossidato con peridrolo o con CrO_3

(1) « Ann. », *509*, 288, 1934.
(2) « Ber. », *16*, 2974 (1883); *17*, 1034 (1884).
(3) « Ber. », *17*, 142 (1884).

nelle condizioni seguite per gli altri Bleu, non fornisce isatina. Riscaldato a secco emette però vapori che arrossano il fuscello d'abete.

Parte sperimentale.

Bleu di 2·3·4·trimetil–pirrolo. (5[2·3·4·trimetil–pirrolenil–] β isatina). – A una soluzione di gr. 1.85 (1 Mol.) di isatina sciolta in 30 cc. di acido acetico glaciale bollente, filtrata a caldo, si aggiunsero gr. 1.35 (1 Mol.) di 2·3·4·trimetil–pirrolo in 15 cc. di acido acetico glaciale. Si fece bollire per qualche minuto e si lasciò in riposo per un giorno. Il prodotto di condensazione fu filtrato alla pompa, lavato più volte con acido acetico bollente, infine con alcool e con etere. Si presenta sotto forma di piccoli cristalli a riflessi metallici verdi, di aspetto assolutamente identico alle altre pirrolenil–isatine conosciute. Il prodotto fu seccato nel vuoto su P_2O_5 a 120° fino a peso costante.

Calc. per $C_{15}H_{14}ON_2$ (238) N °/₀ 11.76 Trov. N °/₀ 11.44

Ossidazione del Bleu di opsopirrolo con acqua ossigenata. – Una sospensione di 0.5 gr. di Bleu di opsopirrolo in 30 cc. di acido acetico glaciale, venne trattata su b. m. bollente con 20 cc. di acqua ossigenata al 30 °/₀. La miscela venne mantenuta ancora su bagno maria bollente per 15 minuti. Durante questo tempo il colore della soluzione passò dal bleu–azzurro al violetto e poi al rosso giallastro. Per distillazione del solvente nel vuoto si ottenne un residuo che fu ripreso con 100 cc. d'acqua; la soluzione fu esattamente neutralizzata con NaOH e poi estratta quattro volte con etere etilico. La soluzione eterea, seccata su cloruro di calcio e distillata a b. m., lasciò come residuo una miscela cristallina di isatina e metil–etil–maleinimide. Da questa miscela si separò la metil–etil–maleinimide per sublimazione nel vuoto ottenendola in begli aghi incolori dal caratteristico odore fenolico–jodoformico e p. f. 68°. Furono ottenuti 0.10 gr. di metil–etil–maleinimide corrispondenti al rendimento del 34 °/₀. Il residuo della sublimazione era costituito da isatina quasi pura. Lavata con etere fuse a 201°. P. F. misto con isatina pura 201°.

Ossidazione del Bleu di opsopirrolo con CrO_3. – Ad una sospensione di un grammo del Bleu in 30 cc. di acido acetico glaciale, riscaldata a b. m., vennero aggiunti a poco per volta gr. 1.2 di CrO_3 in 20 cc. dello stesso solvente. Il prodotto si sciolse completamente con colorazione rosso bruna in capo a 10 minuti. Per distillazione del solvente nel vuoto si ottenne un residuo che venne ripreso con acqua ed il liquido, neutralizzato esattamente con NaOH, fu poi estratto più volte con etere. Dalla soluzione eterea seccata e distillata si ottenne un residuo (gr. 0.34) dal quale venne isolata per

sublimazione nel vuoto la metil-etil-maleinimide che fondeva a 68°. L'isatina si ottenne per cristallizzazione dall'acqua bollente del residuo della sublimazione. P. F. 201°.

Ossidazione del Bleu di pirrolo B con CrO_3. – Il Bleu di pirrolo B venne preparato secondo le indicazioni di Liebermann e Häse (loc. cit., p. 2851) e purificato esaurendolo 5 volte con piridina bollente e infine 3 volte con alcool bollente. Dopo fatto essiccare a peso costante nel vuoto su P_2O_5 a 100° fu analizzato.

	Trovato	C %	73.05	H %	4.29	N % 14.16
per $C_{12}H_8ON_2$	Calcolato	»	73.46	»	4.08	» 14.28

Gr. 1.5 di Bleu B puro sospesi in 40 cc. di acido acetico glaciale vennero trattati a freddo con gr. 1.6 di CrO_3 (quantità calcolata per 3 atomi di ossigeno) sciolti in 30 cc. di acido acetico. Il liquido assunse un colore violetto che poi passò al rosso bruno. Venne lasciato a sè per 3 ore poi scaldato a 45° per mezz'ora. I prodotti dell'ossidazione: maleinimide (P. F. 93°) e isatina, vennero identificati come nel caso precedente.

Distillazione secca del Bleu di pirrolo B. – Gr. 0.6 di sostanza furono distillati nel vuoto a 300° per due ore in una provetta Pyrex che portava una strozzatura a un terzo circa dal fondo. Verso la fine dell'operazione si distillò scaldando a fiamma diretta. Nella parte fredda del tubo si raccolse una sostanza cristallizzata in aghetti incolori e un poco di un olio giallo. La sostanza cristallina fu nuovamente distillata nel vuoto collo stesso dispositivo ottenendola in bellissimi aghi incolori di P. F. 120° facilmente identificati per ossindolo. Cristallizza facilmente dall'acqua in aghi incolori P. F. 120°. La sua soluzione acquosa riduce il nitrato d'argento ammoniacale con formazione di specchio metallico.

Comportamento dei Bleu di pirrolo verso il bromo e verso alcuni altri ossidanti. – Aggiungendo qualche goccia di una soluzione acetica di bromo al 10 % a delle soluzioni acetiche dei Bleu di 2·3·dimetil-pirrolo, di 2·3·4·trimetilpirrolo e di criptopirrolo, il colore di questi vira al bleu verde. Agitando con la quantità calcolata di bromo delle sospensioni dei tre coloranti in acido acetico (2 Mo. di Bromo per ogni Mol. di colorante) si sono ottenuti dei derivati che dànno all'analisi valor molto vicini a quelli richiesti per dei bibromoderivati. Tracce di bromo ingenerano invece nelle soluzioni acetiche dei Bleu di opsopirrolo e di pirrolo B una intensa colorazione rosso-violetta pura stabilissima. La stessa colorazione si ottiene aggiungendo a soluzioni piridiche dei due ultimi Bleu piccole quantità di acido perbenzoico o di acqua ossigenata o aggiungendo a soluzioni acetiche qualche goccia di

acido nitrico diluito, mentre i tre primi Bleu vengono lentamente scolorati da questi reattivi, assumendo infine una colorazione giallastra (isatina).

Acido 5[pirrolenil–] β isatin–5·solfonico (formula IV). – È l'acido solfonico che si ottiene solfonando il Bleu di pirrolo B nelle condizioni descritte da Liebermann e Häse (loc. cit., p. 2850). Noi abbiamo reso il procedimento più rapido e pratico mediante centrifugazione dei precipitati e distillazione nel vuoto della soluzione acquosa finale del colorante, ottenendo un rendimento di 0.85 gr. di acido per un grammo di Bleu impiegato. Le soluzioni concentrate dell'acido solfonico sono colorate in violetto, quelle diluite in un bellissimo Bleu puro. L'ossidazione dell'acido solfonico per mezzo del bicromato potassico fu eseguita sopra un grammo di sostanza secondo il procedimento che si segue per il carminio d'indaco, al quale per brevità rimandiamo [1]. L'acido 5·isatinsolfonico prodottosi nell'ossidazione venne parimenti individuato e isolato per mezzo del caratteristico sale di bario poco solubile.

Bleu di pirrolo A. – Ad una soluzione quasi bollente di 29 gr. di isatina (1 Mol.) in 160 cc. di acido acetico glaciale vennero aggiunti lentamente 13 gr. di pirrolo (1 Mol.) sciolti in 20 cc. di acido acetico. Appena i due liquidi vengono in contatto si forma una intensa colorazione bleu; la reazione è assai vivace e ha portato qualche volta all'ebollizione dell'intera massa del liquido. Dopo due giorni di riposo il prodotto della reazione fu filtrato alla pompa, lavato sul filtro con poco acido acetico freddo e infine con alcool. Secco pesava 30 gr. Il colorante si lascia cristallizzare dall'acido acetico in piccoli prismi di color nero–bleu, che nell'acido acetico e nella piridina sono più solubili del Bleu B e che dànno una colorazione bleu stabilissima. Fu analizzato il prodotto cristallizzato due volte dall'acido acetico glaciale ed essiccato a 100° nel vuoto su KOH e su P_2O_5 fino a peso costante (la sostanza è igroscopica):

Trovato C °/₀ 70.99; 70.91 H °/₀ 4.11; 4.23 N °/₀ 12.16; 12.39.

Il colorante è insolubile in HCl anche concentrato, mentre passa lentamente in soluzione negli alcali a caldo dando colorazione bleu (differenza dal Bleu B).

Per ossidazione con peridrolo o con CrO_3 nelle condizioni descritte per il Bleu B e per il Bleu di opsopirrolo si ottenne sempre, con ottimi rendimenti, una sostanza giallo-bruna amorfa che non è certamente isatina e sulla quale ancora non possiamo dire niente di definito. Il colorante, scaldato a secco, svolge vapori che arrossano il fuscello d'abete bagnato di acido cloridrico. Distillando a secco la miscela del colorante con polvere di zinco si ottiene una notevole quantità di pirrolo.

(1) G. e A. Schlieper, « Ann. », *120*, 1 (1861).

Geologia. — *Rinvenimento « in situ » di un nuovo cranio di « Homo neanderthalensis » nel giacimento di Saccopastore (Roma).* Nota [1] di H. Breuil e A. C. Blanc, presentata dal Socio G. A. Blanc.

La mattina del 16 luglio 1935, durante una visita all'antica cava di ghiaia di Saccopastore (Roma) per esaminare le formazioni nelle quali era stato, alcuni anni or sono, rinvenuto il cranio di *Homo neanderthalensis*, noto per lo studio che ne ha fatto S. Sergi [2], abbiamo osservato, affiorante sul taglio di una sezione, e ancora parzialmente avvolto dal terreno *in situ*, una porzione di cranio umano, presentante i caratteri di indubbia antichità che caratterizzano i relitti ossei che in tale formazione si rinvengono.

La presenza di acqua nella parte inferiore della cava, abbandonata da vari anni, rende ora difficile l'accesso al piede delle scarpate, semi franate alla base, ed in alcune zone inaccessibili. La sezione visibile sui lati Nord, Ovest e Sud della cava, è limitata in basso dal pelo dell'acqua e da frane di limo sabbioso e argilloso, derivanti in gran parte dal dilavamento dei terreni soprastanti. Si possono distinguere due complessi stratigrafici: il più recente (strati da A a D) costituisce il riempimento di una profonda incisione nel complesso di strati più antichi (strati da E a I). Questo è quasi interamente di origine fluviale, mentre il primo è prevalentemente di origine subaerea.

La sezione presenta uno spessore visibile massimo di circa 6 m. e consta degli strati seguenti:

I Ghiaie inferiori molto arrotondate, stratificate, di dimensioni medie da 3 a 6 cm.

H Sulle scarpate Nord e Ovest, una larga concavità lasciata dalla superficie dello strato inferiore I è stata colmata da strati alternati di sabbia silicea ed argilla giallo bruna a stratificazione ondulata.

G Ghiaie di analoga natura di quelle componenti lo strato I, ma notevolmente più minute.

F Sabbia fine, argillosa-marnosa, non stratificata, contenente numerosissime piccole *Helix*, ricca, specie nella sua parte superiore, di zone ferruginose tendenti a concrezionarsi in lastrine e noduli limonitici. Queste

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1935.

(2) S. Sergi, *La scoperta di un cranio del tipo di Neandertal presso Roma.* « Riv. di Antropologia », XXVIII. Roma, 1929.

concrezioni avviluppano i frammenti ossei giacenti nello strato. Il cranio da noi scoperto, ed alcuni frammenti ossei di vertebrati, si trovavano nella parte superiore di esso, in prossimità di un angolo sporgente formato dalla scarpata Nord.

E Piccole ghiaie miste a sabbia, poco stratificate in alcune zone, dotate in altre di stratificazione obliqua, talvolta incrociata, con banchi di sabbia alternanti con le ghiaie, specie nei 2/3 superiori dello strato. Vi sono contenute delle *Helix*, più numerose nel terzo inferiore, e frammenti ossei.

Il cranio era anche parzialmente incluso in questo strato, in una zona ove non si nota alcun segno di stratificazione, e nel quale abbondano le piccole *Helix*.

D Limo argilloso–sabbioso, calcareo, con numerosissime traccie di vegetazione su tutto lo spessore, contenente grandi *Helix*, *Cyclostoma*, *Planorbis* ecc., e numerose concrezioni calcaree analoghe alle « poupées » del loess. Sul lato Ovest lo strato si abbassa notevolmente, fino a raggiungere lo strato H riempiendo una profonda incisione che interessa gli strati E, F, G, H.

C Sottili strati di sabbia e ghiaia alternati, intercalati, nella scarpata Sud, tra gli strati B e D.

B Argilla alternativamente rossastra o grigia, fessurata, contenente nella sua parte superiore dei gruppi di grosse « poupées ».

A Sabbia in parte rimaneggiata e terreno agricolo.

Il complesso di strati più antichi (da E a I) è dunque costituito da una serie di depositi di ghiaie, inferiori, medie e superiori, i cui elementi, principalmente calcarei, diminuiscono gradualmente di dimensioni verso l'alto. Lo strato E è intercalato nella sua parte mediana di strati sabbiosi, che predominano nella parte superiore. A due riprese questo complesso di ghiaie e sabbie è interrotto, sulla scarpata Nord, da formazioni di limo sabbioso o argilloso (strati H e F).

Il cranio giaceva a circa m. 2.75 sotto l'attuale superficie del terreno, con il lato destro immerso nello strato F, che ne riempie l'orbita e la cavità nasale. Esso si presentava come una coppa spezzata, il cui fondo era costituito da quanto sussiste della base del cranio e della regione occipitale. Delle azioni meccaniche antiche, e in parte forse anche recenti, hanno infatti demolito quasi interamente la volta e l'orbita sinistra. La parte superiore, esposta all'aria da tempo, era in parte riempita dalla ghiaietta dello strato E.

Data la posizione così esposta del fossile si imponeva l'estrema urgenza del salvataggio delle parti conservate. Dopo che il prof. G. A. Blanc, che ci accompagnò nel pomeriggio dello stesso giorno per assistere all'estrazione, ebbe controllato la posizione stratigrafica del fossile stesso, da noi fotografato *in situ*, abbiamo proceduto con le debite cautele al suo ricupero: questo

si è potuto effettuare in tre blocchi e qualche frammento, che si raccordano esattamente.

In un sommario esame del cranio, ancora parzialmente avvolto di ganga, abbiamo potuto osservare che l'arcata sopraorbitale destra, sensibilmente completa, si presenta molto accentuata, spessa e sporgente. La cavità orbitale è grande e subrotonda; larga e rotondeggiante è anche l'apertura nasale. La parte conservata della faccia, quasi intatta sul lato destro, è molto alta e piana, senza traccia di fossa canina. L'apofisi mastoidea è molto piccola.

Per tutti i suddetti caratteri, che ripetono quelli del primo cranio scoperto a Saccopastore, possiamo affermare che anche il nostro cranio appartiene alla razza di Neanderthal.

Abbiamo raccolto, in contatto con il cranio, una piccola scheggia di selce. Un'altra scheggia è stata raccolta in un blocco di ghiaia proveniente dalla base dello strato E, franato in vicinanza del cranio, ed una terza scheggia è stata rinvenuta sul terreno rimaneggiato presso la cava. Tutte e tre le scheggie presentano analoghe caratteristiche: sono cioè fornite di un piano di percussione unito e in due casi leggermente obliquo, con il bulbo spostato lateralmente.

Gli strati della cava di Saccopastore rappresentano fasi molto diverse nella storia della vallata dell'Aniene. Da depositi di carattere nettamente fluviale, con ghiaie relativamente voluminose, si passa, come abbiamo visto, a strati alternati di carattere fluvio–lacustre o nettamente subaereo. Mentre lo strato I presenta tutti i caratteri di un deposito attribuibile ad un corso

Schema della stratigrafia della cava di Saccopastore.

Vi sono riunite, sullo stesso piano, le sezioni visibili sulle scarpate Sud (sinistra), Ovest (centro) e Nord (destra).
La posizione del cranio è indicata, sulla destra, tra gli strati E ed F. Lo spessore massimo della sezione è di circa 6 m.

d'acqua la cui corrente era dotata di una capacità di trasporto notevole, lo strato H sembra già un deposito di acque pressochè stagnanti. Lo strato F non ha nessuno dei caratteri di un deposito fluviale e può essere originato per riempimento eolico di pozze d'acqua temporanee. Gli strati G ed F rappresentano delle lievi riprese di attività erosiva dei vicini depositi alluvionali più antichi, che ne hanno fornito gli elementi. Le acque in seno alle quali si è deposto lo strato E erano dotate di assai debole capacità di trasporto, come lo testimoniano le piccole dimensioni delle ghiaie e la presenza di numerose fragili *Helix* intatte fra le ghiaie stesse.

Il complesso stratigrafico I-E appartiene alla parte superiore dell'ultimo ciclo alluvionale pleistocenico. Le acque del Tevere e dei suoi affluenti, gradualmente private della loro capacità di trasporto dal sollevamento del livello di base, durante la trasgressione marina Tirreniana, hanno allora colmato le valli, trasformate spesso in vasti pantani, di ghiaie e di materiali terrigeni di dimensioni sempre più minute, con oscillazioni dovute a riprese temporanee di più attivo trasporto idrico.

Questi sedimenti, deposti in seno alle incisioni vallive prodotte nelle alluvioni più antiche e di quota più alta, sono certamente molto più recenti di queste. Come giustamente ha già fatto osservare G. A. Blanc [1] è escluso che l'amigdala da lui raccolta nelle alluvioni antiche a monte di Ponte Milvio, abbia la stessa età dei crani di Saccopastore. Si tratta infatti di uno strumento molto rotolato che appartiene ad un'età più antica dello stesso deposito che lo conteneva, mentre i cranii di Saccopastore appartengono evidentemente all'età di formazione di uno strato ormai ben definito di quel giacimento. Essi sono anche probabilmente coevi di una delle industrie a schegge ritoccate che si raccolgono in superficie delle alte terrazze formate dai depositi di ghiaie antiche, in seno ai quali è stata trovata la suddetta amigdala.

Il trovamento *in situ* di un cranio di Neanderthal a Saccopastore ci permette di precisare la posizione stratigrafica della razza stessa nella serie dei terreni quaternari del bacino del Tevere, il che, indipendentemente dall'importanza intrinseca di questo fossile umano così raro, assume un alto interesse geologico.

(1) Blanc G. A., *Comunicazione alla Società Romana di Antropologia*. 23 gennaio 1932.

Mineralogia. — *Sulla presenza della prehnite a Monte Loreto in Liguria.* Nota [1] di E. Sanero, presentata dal Corrisp. A. Pelloux.

Circa un anno fa il prof. Pelloux inviava in esame al dott. Fenoglio un singolare campione di un minerale di Monte Loreto, in piccoli globuletti fibroso–raggiati, da lui stesso raccolto e sulla cui natura era rimasto perplesso. Avendo alcune ricerche preliminari fatto sospettare al dott. Fenoglio trattarsi di prehnite, egli ritenne opportuno affidarmene lo studio, studio che intrapresi molto volentieri, poichè mi offriva occasione di occuparmi di un minerale appartenente ad un giacimento di datolite che studiai recentissimamente [2]. D'altra parte, per quanto mi risulta, è la prima volta che viene accertata la presenza della prehnite nei classici giacimenti di datolite della Liguria, mentre da molto tempo è nota negli altri similari di datolite dell'Appennino toscano ed emiliano.

Ciò premesso passo senz'altro a descrivere le condizioni di giacitura del nostro minerale, per riassumere subito dopo i risultati dello studio mineralogico.

La prehnite a M. Loreto, a mo' di globuletti finemente fibroso–raggiati, poggia su un'esilissima crosta di microscopici cristallini di quarzo, che tapezza a sua volta una roccia diabasica. Il diametro di questi globuletti è sempre inferiore a mezzo millimetro, il colore è grigio-verde pallidissimo, la lucentezza vitrea, tendente alla madreperlacea.

La preparazione del materiale, che doveva servire per l'analisi, fu laboriosa, e dirò subito che solo con molta difficoltà e grande pazienza ho potuto metterne assieme la quantità strettamente indispensabile [3], senza sacrificare intieramente il campione. I globuletti di prehnite isolati venivano dapprima osservati alla lente, e successivamente schiacciati ed accuratamente esaminati al microscopio. L'analisi, condotta su materiale, che così preparato risultò purissimo, ha dato i seguenti risultati:

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1935.

(2) E. Sanero, *Contributo allo studio della datolite di M. Loreto* (*Liguria*). « Periodico di Mineralogia », n. 1, 1934, p. 73.

(3) Era mio desiderio ricercare anche alcuni elementi: Na, K, Cu, che pur figurando nella prehnite in tenori generalmente esigui, sono tuttavia abbastanza frequenti, ma non mi fu possibile per mancanza di materiale.

SiO_2	43.50	0.724	3.02
Al_2O_3	24.45	0.240	1.00
Fe_2O_3	tr.	—	
CaO	27.05	0.482	2.01
MnO	tr.	—	
MgO	tr.	—	
H_2O	5.19	0.288	1.20
Somma	100.19		

A scopo di confronto riporto nella tabella che segue con i risultati della mia analisi (I), quelli trovati dal Corsi [1] e dal Gallitelli [2], analizzando rispettivamente la prehnite di Montecatini in Val di Cecina (II) e di Toggiano nel Modenese (III), non che i valori teorici (IV) calcolati dalla formula:

$$H_2Ca_2Al_2(SiO_4)_3 .$$

	I	II	III	IV
SiO_2	43.50	42.86	43.08	43.69
Al_2O_3	24.45	24.20	25.12	24.78
Fe_2O_3	tr.	0.99	tr.	—
CaO	27.05	27.03	27.08	27.16
MnO	tr.	—	—	—
MgO	tr.	—	—	—
H_2O	5.19	4.96	4.92	4.37
Somma	100.19	100.04	100.20	100.00

Dall'esame dei dati della tabella appare evidente che la composizione chimica del minerale di M. Loreto è in buon accordo, sia con la composizione chimica della prehnite di altri giacimenti analoghi, sia con i valori teorici richiesti dalla formula della prehnite.

Il peso specifico, determinato in liquido di Thoulet con la bilancia di Westphal, risultò uguale a 2.860 (a 26° C.), e quindi in ottimo accordo con quello (2.80–2.95) dato dai trattati [3].

(1) L. Corsi, *Su alcune prehniti della Toscana*. « Boll. R. Com. Geol. Ital. », vol. IX, 1878, p. 69.

(2) P. Gallitelli, *Sulla prehnite di Toggiano*. « Atti Soc. Tosc. di Sc. Nat. », vol. XXXVIII, 1928, p. 271.

(3) C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*. Band II, *Silicate und Titanate*, p. 471, Leipzig, 1897; C. Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, Band II, p. 915, Leipzig, 1917;

Sarebbe stato non privo di interesse poter fare l'esame ottico della prehnite di M. Loreto, poichè è risaputo che questo minerale presenta sovente notevoli anomalie ottiche, ma purtroppo ho dovuto rinunziarvi, poichè la estrema piccolezza e la imperfezione degli individui cristallini, costituenti i globuletti fibroso–raggiati, non permettevano assolutamente di eseguire determinazioni di una certa attendibilità. Infatti le laminette estremamente piccole, che si potevano ottenere da questi globuletti, non presentavano mai contorni ben netti, regolari, e più che laminette uniche, apparivano costituite dalla sovrapposizione di più elementi non perfettamente paralleli fra loro, come dimostrò la estinzione mai rigorosamente parallela all'allungamento, e sempre ondulata. L'allungamento è negativo. Del resto queste mie osservazioni concordano con quanto da molti anni ha notato Lacroix (1) nella prehnite a struttura fibroso-raggiata di altri giacimenti.

Concludendo, i caratteri e la composizione chimica del minerale di M. Loreto sono quelli di una tipica prehnite. L'accertamento della presenza della prehnite in un giacimento di datolite dell'Appennino Ligure assume particolare interesse, essendo la prima volta che essa viene segnalata in questo gruppo di giacimenti di datolite, i quali vengono così ad acquistare sempre più caratteri comuni con i giacimenti similari di datolite della formazione ofiolitica dell'Appennino Toscano ed Emiliano, in cui la presenza della prehnite è da grande tempo nota.

Per quanto riguarda infine le condizioni di giacitura, la prehnite di M. Loreto rientra nei giacimenti legati a rocce eruttive basiche, essendo stata rinvenuta in diabasi, e può geneticamente considerarsi come prodotto secondario.

E. S. Dana, *A Textbook of Mineralogy*, IV ed., p. 626, New York, 1932; A. Lacroix, *Mineralogie de la France*, tome I, p. 265, Paris, 1893-95; Niggli P., *Lehrbuch der Mineralogie. Spezielle Mineralogie*, p. 518. Berlin, 1926.

(1) A. Lacroix, *Sur la diagnostic des zéolithes en l'absence de formes cristallines déterminables.* « Bull. Soc. Min. de France », to. VIII, 1885, p. 326.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul modo di dosare la vitamina antineuritica* (B^1), *applicando la nozione del "quoziente beri-berico"* (Q_b) [1]. Nota [2] di G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Conviene ricordare ancora una volta i fatti principali, su cui si fonda la nozione di « quoziente beri-berico », da noi stessi fissata, sviluppata e documentata in precedenti note [3].

Noi ammettiamo – in base a numerose esperienze personali di revisione sull'argomento –, che il fattore antineuritico (vitamina B^1), pel colombo indispensabile ed esogeno, di necessità partecipa ai processi metabolici quotidiani, e inevitabilmente si usura (o si consuma, o resta impegnato, scomparendo comunque come sostanza antiberi-berica). Ammettiamo inoltre, che tale consumo o tale scomparsa avviene altresì in una determinata misura, che risulta proporzionale alla quantità delle sostanze nutritive metabolizzate, siano queste di origine alimentare e vengano attinte dai normali depositi (come nell'inanizione, ovvero nell'ipoalimentazione, e perciò pure nella fase di vomito o di rifiuto del cibo per gli animali a dieta priva di fattore antineuritico). Normalmente ogni animale si costituisce di vitamina B^1 una riserva, da utilizzare in casi di bisogno. Ma tale quota protettiva non può oltrepassare – per condizioni interne regolatrici – un dato livello o grado massimo (costante per ciascun colombo, e solo variabile entro determinati limiti dall'un colombo all'altro); nè può discendere al disotto di un dato livello o grado minimo, senza che insorgano i caratteristici disturbi beri-berici, come precisamente per effetto della dieta orizanica. Somministrando a colombi – per imbeccamento – opportune razioni giornaliere di riso brillato, i primi disturbi beri-berici di regola compaiono, solo quando il consumo totale (C) – ossia la somma di alimento effettivamente elaborato più i materiali nutritivi, attinti in fase di vomito dai normali depositi ed espressi dalla diminuzione del peso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935.

(3) G. Amantea, *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Rendic. d. R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 7-8, 1933; G. Amantea, *La determinazione del « quoziente beri-berico »* (Q_b). *Notizie di tecnica.* « Ibidem », vol. XVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 9, 1933; G. Amantea, V. Zagami, S. Baglioni, V. Famiani, G. Zanghì e L. Ravasini, « Ibidem », vol. XX, ser. 6ª, 2° sem. fasc. 3-4, 1934; G. Amantea, *Sulla nozione del « quoziente beri-berico » e sulle sue applicazioni allo studio del fattore antineuritico* B^1. « Quadernì della Nutrizione », vol. I, N. 3, 1934.

corporeo – è divenuto corrispondente in media almeno al 70 % del peso corporeo iniziale dell'animale (P), e ciò indipendentemente dalla dose quotidiana di riso offerta. Per *quoziente beri–berico* (Q_b) intendiamo precisamente il valore del rapporto $\frac{C}{P}$; cosicchè: $\frac{C}{P} = \frac{\text{riso elaborato} + \text{peso perduto}}{\text{peso corporeo iniziale}} = Q_b$.

Siccome l'esperienza per determinare il Q_b si chiude all'insorgere dei primi sintomi beri-berici netti, l'animale può essere a questo momento salvato, mercè adatti mezzi curativi, e destinato a prove successive. Ciò ha permesso di accertare, che il valore del Q_b, in più esperienze condotte con tecnica uniforme, si mantiene relativamente costante per lo stesso colombo; e abbiamo insistito nel fare rilevare, che, per tale comportamento, il Q_b si presta bene ad essere assunto quale indice molto vantaggioso, e di esattezza assai soddisfacente, in tutte le indagini sulla vitamina antineuritica B^1, che abbiano carattere di ricerche quantitative, o debbano eseguirsi con criterio comparativo, ed esigano comunque l'esclusione di possibili differenze individuali.

A parte per ora le rimanenti applicazioni, che può trovare la nozione del Q_b, fra le più utili è senza dubbio quella, che riguarda il dosaggio della vitamina B^1 e di cui vogliamo particolarmente occuparci nella presente Nota.

Tenendo conto di quanto è stato sopra ricordato, rimane agevole comprendere, come il valore del Q_b debba riflettere in sostanza l'entità della massima riserva protettiva di vitamina B^1, che l'animale ha a disposizione; e come le sue variazioni in più o in meno debbano a loro volta riflettere, in generale, condizioni o modalità diverse di usura della riserva medesima.

Se è presumibile che esistano fattori (da identificare), capaci di favorire la più pronta liquidazione di quest'ultima, è comunque sicuro, che essa rimane, in ogni caso, protetta dall'assunzione di vitamina B^1, dall'esterno con l'alimento, e che il Q_b si eleva in proporzione, finchè non sia raggiunto l'equilibrio.

Cosicchè, se si determina su un colombo opportunamente scelto il Q_b normale, cioè quello che si ottiene somministrandogli – dopo adatta preparazione – 30 gr. al giorno di riso brillato, fino ai primi sintomi beri–berici netti; e se quindi allo stesso animale – dopo averlo curato, lasciato per un tempo sufficiente ad alimentazione libera variata, e di nuovo preparato – si somministra, in una successiva esperienza, una razione pure di gr. 30 di alimento per giorno, ma costituita solo per una parte più o meno rilevante da riso brillato, e per il resto da altro materiale, che apporti una dose di vitamina B^1 comunque sempre inferiore a quella quotidiana di equilibrio, il Q_b in questo secondo caso risulterà più alto del precedente; e precisamente tanto più alto, quanto più prossima alla quota di equilibrio è stata quella di vitamina B^1, assunta con ciascuna razione alimentare. (È ovvio, che, se l'animale ne assumesse giornalmente una quantità superiore, o anche pari a quella di equilibrio, mancherebbe ogni accenno di turbe beri–beriche).

Questi fatti, che si potevano prevedere, hanno trovato piena conferma nei risultati di esperienze di accertamento all'uopo istituite; e si può dire, che già bastino da soli a far bene comprendere, dal punto di vista generale, in quale maniera, fondandosi sulla nozione del « quoziente beri-berico », si possa pervenire al dosaggio della vitamina B^1 negli alimenti, e anche in materiali non alimentari, che possano contenerla.

Gli accertamenti suaccennati ci hanno indotto a fare eseguire da allievi ricerche comparative (ancora inedite) sul contenuto in vitamina B^1 di diversi grani italiani: colombi a Q_b normale noto ricevevano, in questo caso, durante ciascuna delle prove successive, 28 gr. di riso brillato più 2 gr. del grano da esplorare, per giorno, fino ai primi sintomi beri-berici.

Anche V. Zagami [1], nel nostro Laboratorio, si è valso recentemente di questa medesima tecnica, per studiare il contenuto in vitamina B^1 di vari semi oleosi.

Così sperimentando, ci siamo formata la giustificata convinzione, che per la via seguìta si può in effetti pervenire a osservazioni più che soddisfacenti, e a utili confronti; ma abbiamo avuto anche modo di rilevare alcuni inconvenienti, che in seguito ci siamo poi sforzati a eliminare, perfezionando la tecnica, in guisa da poterla oggi presentare nella forma, che può considerarsi definitiva e, a nostro avviso, affatto adeguata allo scopo.

La sostituzione di 1,2 o più grammi della razione sperimentale giornaliera di riso con una eguale quantità di altro alimento o materiale, che apporti vitamina B^1 in dose sia pur subliminale, proteggendo la riserva interna dell'animale, ritarda anche in proporzione la comparsa dei primi disturbi beri-berici: l'esperienza, in altri termini, così di necessità si prolunga; ma talvolta il prolungamento è tale, da costituire per sè solo un inconveniente non trascurabile. Si aggiunga, che, quando si inizia la fase del vomito, insieme col riso viene rigurgitato in parte anche il materiale studiato; ed è molto discutibile, se convenga o non somministrarlo in più l'indomani. Inoltre, in esperienze comparative, data la loro possibile variazione di durata, somministrando giornalmente, e senza interruzione dal principio alla fine, la necessaria dose dei singoli materiali da saggiare, ci si può trovare sovente costretti a dovere in ultimo confrontare fra loro risultati, riferibili a quantità globali diverse, nei vari casi, dei suddetti materiali.

Si imponeva dunque senza dubbio la necessità di ovviare a siffatti inconvenienti.

Siamo riusciti ad eliminarli in un modo molto semplice, considerando che, per raggiungere lo scopo, sarebbe bastato semplicemente limitare il tempo di somministrazione del materiale da studiare, includendolo in dose opportuna nella razione sperimentale giornaliera *solo durante i primi 10 giorni* di ciascuna prova.

(1) V. Zagami, *Sul contenuto in vitamina antineuritica* (B^1) *di alcuni semi oleosi*. « Quaderni della Nutrizione », vol. I, n. 4, 1934.

Proponendosi dei buoni confronti, tutto dunque si riduce ad accertare in un primo tempo, il valore del Q_b normale del colombo prescelto, e ad eseguire poi su questo prove successive, in ciascuna delle quali l'animale riceve, *durante i primi 10 giorni*, l'adeguata dose del materiale studiato, più riso brillato, fino a raggiungere la razione quotidiana globale di 30 gr.; superata così la decima giornata, si prosegue somministrando 30 gr et giorno di solo riso brillato. Volendo un preciso dato di riferimento, si possono intercalare prove, eseguite con determinate quantità del campione internazionale per la vitamina B^1.

Anche sperimentando nelle suaccennate condizioni si possono ottenere netti spostamenti del Q_b. Riportiamo qui sotto, a titolo di esempio, i risultati forniti da esperienze, eseguite in collaborazione col dott. V. Famiani, e nelle quali si aggiunsero al riso – durante i primi 10 giorni – rispettivamente 2 gr., 3 gr., 4 gr. e 5 gr. di un medesimo grano Strampelli (il « Villa Glori »):

Colombo Nr.	Q_b normale	Q_b aggiungendo al riso per 10 giorni il grano, nella proporzione di			
		2 gr.	3 gr.	4 gr.	5 gr.
I	0.68	0.81			
II	0.73		0.94		
III	0.73			0.96	
IV	0.77				1.05

Adottando il metodo in questa seconda forma migliorata, è facile comprendere come e perchè debbano rimanere eliminati tutti gli inconvenienti, che prima si erano dovuti lamentare: la durata delle esperienze infatti non sarà mai eccessiva; se il vomito insorge prima della 10ª giornata, si potrà costringere senza difficoltà l'animale a elaborare nei giorni seguenti la porzione di materiale in esperimento, eventualmente rigurgitata; i risultati saranno sempre da riferire a quantità globali dei materiali studiati ben definite, e che possono anche essere mantenute eguali e corrispondenti fra loro.

Dovendo studiare il contenuto in vitamina B^1 su organi freschi, liquidi dell'organismo, materiali acquosi in genere, bisogna somministrarli dopo averli portati previamente a secco su bagnomaria.

Quando poi si saggia per la prima volta un dato materiale, e, per la dose impiegata, si ottiene un Q_b molto elevato, conviene sempre istituire altre prove successive di controllo con dosi minori.

Nella forma consigliata, il metodo ci ha reso già e continua a renderci assai utili servigi.

Fisiologia. — *Azione di alcune sostanze chimiche sul clono da stricninizzazione dei centri corticali sensitivo-motori* [1]. Nota [2] di F. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

È ormai ben noto, come, dopo le prime ricerche di Landois e di G. Gallerani e F. Lussana, relative all'azione di sostanze chimiche sui centri nervosi, questo genere di studi abbia assunto un rilevante sviluppo, sopra tutto per le indagini di S. Baglioni e di G. Amantea; ed è altrettanto nota la ricca messe di risultati, che ha fornito il metodo di esplorazione funzionale dei centri nervosi, mercè l'applicazione diretta e circoscritta di sostanze chimiche, appunto da S. Baglioni e G. Amantea [3] elaborato, proposto e largamente utilizzato. Facciamo a meno pertanto di diffonderci in eccessivi dettagli al riguardo, per cui preferiamo rimandare alle pubblicazioni originali dei suddetti sperimentatori [4]. Qui ci preme tuttavia rilevare, che il ricordato metodo di S. Baglioni e G. Amantea è derivato dalla osservazione di S. Baglioni e M. Magnini, i quali dimostrarono come l'applicazione diretta e circoscritta di stricnina, nonchè di picrotossina, su un centro corticale sensitivo-motore (rolandico) del cane, provoca contrazioni ritmiche del gruppo muscolare corrispondente. Dalle ricerche di G. Amantea [5] è stato provato, che gli eccitamenti afferenti esercitano su detta zona un rinforzo, un aumento di frequenza delle scosse, e che il fenomeno motore è preceduto e accompagnato anche da un'evidente modificazione sensoriale, per cui determinate aree cutanee, variabili a seconda dei centri stricninizzati, presentano più esaltata delle altre le capacità di risentire l'azione di stimoli tattili, dolorifici (aree iperestesiche riflessogene). G. Amantea [6] ha inoltre dimostrato, che nel 25 % circa dei cani (predisposti), i quali differiscono dagli altri (non predisposti) per un più alto grado di eccitabilità corticale, tali zone periferiche

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia e nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1935.

(3) S. Baglioni e G. Amantea, «Archivio di Farmac. Sper. e Scienze Affini», anno XII, vol. XVII, 1914; «Zeitschr. f. biolog. Technik u. Methodik», 1913.

(4) Per la bibliografia sull'argomento consultare: G. Amantea, «Fisiologia e Medicina», vol. VI, 1935; A. Busacca e A. Rizzolo, «Annali di Clinica Terapeutica», Anno III, vol. VI, 1926.

(5) G. Amantea, «Zentralbl. f. Physiologie», Bd. XXVI n. 5; «Arch. Farmac. Sper. Scienze affini», anno XI, vol. XIV, 1912; «Rendic. della R. Acc. dei Lincei», vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem. 1915; «Arch. Intern. de Physiologie», vol. XVIII, 1921.

(6) G. Amantea, «Bull. R. Accad. Med. di Roma», anno XLVI, 1920; «Policl., (sez. Med.)» 1920.

iperestesiche si comportano anche da epilettogene, da rendere possibile il fenomeno ormai ben noto della epilessia sperimentale riflessa.

L'applicazione di stricnina su d'un determinato centro sensitivo-motore, in un primo tempo produce un aumento della eccitabilità del centro istesso; quando tale aumento di eccitabilità diventa massimo, insorge il clono spontaneo, che deve perciò ritenersi nel suo determinismo connesso con la esaltazione della eccitabilità corticale. Assumendo come indice il clono da stricninizzazione corticale si è potuto studiare l'azione diretta di vari agenti fisici e chimici sui centri sigmoidei del cane (G. Amantea) [1]. Orbene, è stata richiamata la nostra attenzione anche sulla possibilità di utilizzare il fenomeno del clono sperimentale da esaltata eccitabilità corticale, come rilevatore dell'azione, che avrebbero potuto esercitare determinate sostanze chimiche somministrate per via orale, polmonare, sottocutanea ecc.

Nel nostro caso si sarebbe trattato dunque di applicare la stricnina su di un determinato centro sensitivo-motore (seguendo la tecnica descritta da S. Baglioni e G. Amantea), fino ad ottenere il clono del massimo grado possibile a carico del gruppo muscolare corrispondente, e di somministrare quindi all'animale (per iniezioni, inalazioni ecc.) la sostanza voluta, tenendo conto delle eventuali variazioni di frequenza e di intensità delle scosse. Una diminuzione di frequenza e di intensità del clono avrebbe deposto per un'azione deprimente della sostanza sul centro esplorato e perciò antagonistica a quella della stricnina; un esaltamento del clono avrebbe indicato una sommazione di effetti, e infine il persistere del clono uniforme e invariato avrebbe indicato la mancanza di azione della sostanza somministrata sul centro e la persistenza soltanto di quella diretta della stricnina. Tenendo inoltre conto di qualsiasi fenomeno apprezzabile e degno di nota, successivo alla somministrazione della sostanza in esame, si sarebbe potuto completare l'analisi ed eventualmente meglio lumeggiare il meccanismo di azione della sostanza stessa sui centri nervosi. Dal complesso delle nostre ricerche così condotte sarebbero dovuti emergere nuovi dati sull'azione delle sostanze studiate sui centri sensitivi-motori, la quale finora è stata esplorata solo utilizzando altre condizioni sperimentali.

Per le esperienze sono stati adoperati di regola cani normali, adulti e di piccola taglia. Per l'operazione, la ricerca del centro, l'applicazione della stricnina ecc., ci siamo fedelmente attenuti alle norme indicate da S. Baglioni e da G. Amantea.

Applicata la stricnina sul centro esattamente individuato, e comparso il clono, si aspettava che esso raggiungesse il grado di massima intensità e frequenza delle scosse. A questo punto, mentre, rinnovando di tempo in tempo la stricninizzazione, si cercava di mantenere il clono sempre al limite

(1) G. Amantea, «Arch. di Fisiol.», vol. XII, 1914; «Ibidem», vol. XVII, 1919; «Ibidem», vol. XXII, 1924; «Bull. R. Acc. di Roma», 1920-21 e 1923-24.

massimo raggiunto, si procedeva alla somministrazione della sostanza da saggiare. È stato studiato così l'effetto del cloroformio, dell'etere solforico, dell'alcool etilico, dell'idrato di cloralio, del bromuro di potassio, del solfato neutro di atropina e del cloridrato di ioscina. Il cloroformio e l'etere solforico furono somministrati per inalazione; tutte le altre sostanze per via sottocutanea. L'alcool etilico fu iniettato sotto cute, dopo averlo portato ad un titolo corrispondente al 50 %. Il titolo della soluzione variò a seconda dei casi per le altre sostanze. Ci attenemmo comunque a dosi forti per ottenere effetti più marcati. Solo per il bromuro di potassio fu eseguita anche una prova con somministrazione lenta per via gastrica. In questo caso particolare un cane di kgr. 3,700 ricevette, con l'alimento, per 15 giorni, gr. 1,50 di bromuro di potassio; quindi fu saggiata la eccitabilità del giro sigmoideo di sinistra e fu provata, col solito metodo, la stimolazione chimica. Guarito l'animale dalla prima operazione e scomparsi del tutto i sintomi gravi della bromurizzazione, che presentava, dopo 40 giorni, fu rioperato a destra, e anche da questo lato si determinò la soglia di eccitabilità e si provò la stimolazione chimica per ricavare i dati necessari al confronto stabilito. Meno che in questa, in tutte le altre esperienze, dopo aver somministrato la sostanza in esame, fu tenuto conto dell'eventuale variazione del clono nel senso d'un esaltamento o di un indebolimento, e quando si verificò la diminuzione fino alla scomparsa, si tenne conto della possibilità o meno di ottenere le stesse contrazioni in via riflessa, stimolando con stimoli tattili o dolorifici l'area riflessogena. Sono stati utilizzati n. 12 cani e sono state eseguite complessivamente n. 16 esperienze (alcuni cani servirono per due esperienze). I risultati ottenuti si possono riassumere come segue:

1° la inalazione di cloroformio ha determinato prontamente la scomparsa del clono spontaneo da stricninizzazione corticale; a scomparsa completa non è stato più possibile provocare il clono, neppure in via riflessa, stimolando la zona riflessogena corrispondente al centro stricninizzato. Sospesa la inalazione di cloroformio, dopo 7′, è stato possibile ottenere scosse in via riflessa, e dopo 10′ è ricomparso il clono spontaneo;

2° l'inalazione di etere solforico ha pure determinato la scomparsa completa del clono, ma essa è stata meno pronta e più fugace che per il cloroformio;

3° l'iniezione sottocutanea di alcool etilico, in dose tale da ottenere uno stato soporoso, ha fatto scomparire il clono spontaneo, ma le scosse si ripresentavano tutte le volte che, con stimoli di qualsiasi natura, si riusciva a destare, per così dire, dal sonno alcoolico l'animale;

4° l'idrato di clorario, iniettato sotto cute, ha fatto sempre scomparire il clono spontaneo, ma mentre per dosi molto forti è persistita la possibilità di provocare le scosse in via riflessa, per dosi forti essa è venuta meno insieme con quella di ottenere accessi epilettici per faradizzazione dell'area sensitiva–motrice scoperta.

pi il soldato mentre il generale, nella linea di una mano per la determinazione sottana una figura scomparsa della scena d'azione, che riprendermo dopo una nuova applicazione di cocaina sul cervo;

al il clandestino di cocaina, nella proporzione di cui i magri per kg. e la quella di vino i magri per kg. si è compromesso ulteriormente all origine;

m il prossimo potrebbe cuocere sotto cute nella programmazione di più magri per kg., una ma determinato a scomparsa comunque del clown sotto si è avuto una figura scomparsa, salvo un figurino indeterminato. Più esso in sempre ripreso, continuando anche dopo essere a occhi epidermici, ove si notarono in ogni caso vedere però cranio a una sedativa-mente scoperta. La somministrazione è avvenuta in presenza per via generica, normalmente per la gola. Ove ad ottenere un chiaro quadro di gravi fenomeni psichici, non va interrotta la somministrazione cocainica, ma si provvide a provocare acqua epidermica, paradossale l'acqua sensitivo-motrice portata di un uso. Un acqua però, non provocati. Potrebbe venire meno a medicamenti, non essendosi mai avuta la fase tonica epilettica particolare. Nulla invece avviene, in un secondo tempo, dopo la somministrazione di più dosi della predetta sostanza, si sono ottenute, con la somministrazione del detto sensitivo-motori cranici. Un'altra cosa, sempre dannose apparecchi più rumori e, con la paradossale di medicamenti, acqua epidermica comodi.

K. F.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1935 (Anno XIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Geometria. — *Sulle varietà di Veronese.* Nota [1] del Corrisp. G. SCORZA.

In più modi si può avviare mediante rappresentazioni geometriche lo studio delle proprietà di un'algebra regolare (reale o complessa) d'ordine n^2: giacchè si può riferirne gli elementi a punti di un S_{n^2} euclideo o alle altezze di un S_n siffatto, che ne tengono fermo un punto: oppure si può riferirne i sistemi d'ordine n ai punti di un S_{n^2-1} proiettivo o alle omografie di un tale S_{n^2-1} – tutti questi spazi essendo definiti naturalmente nel campo (reale o complesso) nel quale si suppone data l'algebra presa in considerazione [2] –.

Avendo fatto ricorso alla prima delle rappresentazioni ora indicate per caratterizzare gli insiemi degli automoduli di un'algebra regolare mi sono

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1935.

(2) Così ad es., il ricorso alla rappresentazione dei sistemi d'ordine n sui punti di un S_{n^2-1} proiettivo nella Nota di S. Sampinato: *Sulle corrispondenze di un'algebra reale* (« Rend. e Memorie di Matematica e Fisica Catania », vol. 2, 1931) e invece a quella sulle omografie di un S_{n^2-1} proiettivo nella Nota, comparsa in quello stesso volume, di S. Sampinato: *Le varietà delle trasformazioni di un sistema lineare in sè semplicemente infinito e le loro relazioni colla struttura delle algebre lineari*.

La rappresentazione sui punti di uno spazio euclideo, e non per le sole algebre reali, fa ricorso invece lo SAMPINATO nelle sue ricerche sistematiche sulle funzioni analitiche in un'algebra complessa con modulo.

Della rappresentazione dell'algebra regolare d'ordine n^2, cioè della totalità delle matrici a n righe e n colonne dei punti di un S_{n^2} euclideo, Ω, si avvale pure G. ANDREOLI in una sua recente pubblicazione [*Sulla funzione di composizione di matrici*, « Atti della R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli », vol. XX, ser. 2ª, n. 10] alla quale sono da muovere appunti numerici e non lievi.

Una e tutta importante sopra ogni menzione della quale il sig. Andreoli si vale è

imbattuto per le varietà di Segre, rappresentanti le coppie di punti estratte da due S_r, in un teorema del tutto analogo a quello che per la superficie di Steiner fu enunciato dal Lie e per la superficie di Veronese fu riconosciuto valido dal Berzolari [1].

Ciò mi ha indotto a presumere che codesto teorema del Lie fosse addirittura estendibile a tutte le varietà di Veronese; e qui – rimandando ad

tempo – quella cioè di « varietà di Volterra »; – ma è un poco difficile concedere che vadano d'accordo le varie affermazioni che su di essa vengono enunciate.

Così (per brevità di discorso suppongo di rivolgermi ad un lettore che abbia sott'occhio la Memoria ora citata) a p. 3 si dice: « chiamando V (X) la varietà di Volterra relativa ad X, ···, se X_1 è contenuto in V (X) ed X_2 è contenuto a sua volta in V (X_1), esso X_2 sarà contenuto anche in V (X) »; di guisa che se X_1 appartiene a V (X), tutta la V (X_1) sta in V (X). Già, ma cinque righe più sotto si trova scritto: « Se X_1 è contenuto in V (X), allora V (X_1) avrà certamente una parte comune con V (X) ».

Definito (p. 3) come spazio fondamentale di Ω uno spazio « composto esclusivamente di elementi due a due permutabili », si afferma che « dato un elemento X, ovviamente resta da esso definito uno spazio fondamentale Φ (X) »; e ciò ben lungi dall'essere ovvio, è falso, come vede subito chi ricordi dagli elementi di geometria proiettiva che data un'omologia piana di centro S e asse s (non passante per S) le omografie permutabili con essa si distribuiscono in ∞^2 reti, quelle di una stessa rete essendo permutabili fra loro a due a due ed avendo per punti uniti comuni S e due punti di s.

Ancora a p. 3 si definisce come « varietà di Volterra associata ad una matrice X la varietà costituita da tutti i punti rappresentativi di matrici commutabili con X e fra loro »; e poco più sotto si soggiunge che: « una varietà di Volterra risulta costituita dall'insieme (*sic*) di spazi fondamentali ». Ma matrici rispondenti a punti di spazi fondamentali diversi non è detto che debbano essere permutabili fra loro.

Nè miglior luce su queste così dette varietà di Volterra si può dedurre dall'esempio « più perspicuo » che si indica a p. 14. Ivi si considera l'insieme delle matrici di ordine n per ognuna delle quali sono nulli gli elementi al disopra della diagonale principale e si asserisce che esso è « una varietà di Volterra, in quanto due di esse permutabili ad una terza, sono permutabili fra loro: *purchè gli elementi diagonali non siano nulli* » (dove il corsivo non è mio).

Poichè fra quelle matrici vi è la matrice identica, se fosse esatta l'affermazione dell'autore bisognerebbe che nel detto insieme le matrici - sia pure con gli elementi diagonali tutti diversi da zero - fossero permutabili a due a due. E ciò è falso: il lettore rifletta che, se, per es., $n = 3$, l'insieme delle matrici considerate dall'Andreoli può riguardarsi come l'insieme delle matrici rispondenti alle omografie di un piano che ne tengono fermi un punto e una retta assegnati, appartenentisi; dopo di che egli vedrà subito qual conto sia da fare della sua affermazione. Essa è quasi esatta per $n = 2$, e la ragione è, geometricamente, evidente; ma anche in tal caso perchè possa essere accettata senza obbiezioni va enunciata come segue:

Nella totalità delle matrici di 2° ordine del tipo $\left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{matrix} \right\|$ *due matrici permutabili con una terza - per la quale non sia* $\beta = 0$ *e* $\alpha = \gamma$ *- sono permutabili fra loro;*

e non come vorrebbe il corsivo di cui sopra.

(1) Cfr. A. Brambilla, *Estensione di una proprietà della superficie di Steiner.* (« Rendic. della R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli », 1898). Per una estensione in altro senso del teorema in discorso veggasi N. Spampinato, *A proposito di un teorema del Lie.* (Questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XXVIII, 1919, pp. 380–384, 405–407).

altra Nota l'esposizione del teorema riguardante le varietà di Segre - mostro appunto che tale estensione è possibile con un ragionamento del tutto simile a quello di cui si valse il Rosati per dimostrare il teorema del Berzolari [1].

1. Consideriamo le $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$ quadriche–inviluppo di un S_r, che diremo Σ, e riferiamole biunivocamente, mediante un'omografia Φ, ai punti di uno spazio Σ', ad $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni: alle totalità delle quadriche–inviluppo di Σ specializzate almeno $1, 2, \cdots, o\ r$ volte risponderanno in Σ' delle varietà $F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots, F^{(r)}$ delle quali qui non interessa considerare che la prima e l'ultima.

Quella è un'ipersuperficie dell'ordine $r+1$, questa è una varietà di dimensione r e ordine 2^r, che per $r = 2$ coincide con la ben nota superficie di Veronese e che, appunto perciò, tempo fa proposi di chiamar *varietà di Veronese di indice r* [2].

Come è ben noto, $F^{(r)}$ è il luogo dei punti r–pli di $F^{(1)}$ ed $F^{(1)}$ a sua volta è il luogo degli S_{r-1} r–secanti di $F^{(r)}$.

2. Ciò posto dimostriamo che:

In Σ' la corrispondenza fra un punto e il relativo iperpiano polare rispetto ad $F^{(1)}$ è generalmente biunivoca.

Supponiamo, com'è lecito, che alla quadrica–inviluppo rappresentata in Σ dall'equazione

$$(1) \qquad \sum_{i,j}^{1\cdots r+1} \alpha_{i,j}\,\xi_i\,\xi_j = 0 \qquad (\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i})$$

corrisponda in Σ' il punto con le coordinate $\alpha_{i,j}\ (i \leq j)$, queste essendo disposte in un ordine fissato una volta per tutte.

Allora in Σ' la $F^{(1)}$ sarà rappresentata dall'equazione

$$(2) \qquad f = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r+1,1} & \alpha_{r+1,2} & \cdots & \alpha_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Se $A_{i,j}$ è l'aggiunto di $\alpha_{i,j}$ nella matrice $\| \alpha_{i,j} \|$, si ha

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i,j}} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{, se } i = j \\ 2\,A_{i,j} & \text{, se } i \neq j; \end{cases}$$

(1) C. Rosati, *Sulle superficie di Veronese e di Steiner.* (« Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino », vol. 35, 1899), p. 12 e sgg.

(2) G. Scorza, *Le varietà di Veronese e le forme quadratiche definite.* (« Rend. della R. Accad. delle Sc. fis. e mat. di Napoli », 1915).

e quindi l'equazione dell'iperpiano polare, rispetto ad $F^{(1)}$, del punto $(\alpha_{i,j})$ è, nelle coordinate correnti $x_{i,j}$,

$$(4) \qquad \sum_{i,j}^{1\cdots r+1} A_{i,j}\, x_{i,j} = 0 \qquad (x_{j,i} = x_{i,j}).$$

Se l'aggiunto di $A_{i,j}$ nella matrice $\| A_{i,j} \|$ si indica con $\alpha'_{i,j}$, si ha per un ben noto teorema

$$(5) \qquad \alpha'_{i,j} = \delta^{r-1}\, \alpha_{i,j},$$

dove δ è il determinante $| \alpha_{i,j} |$; dunque, se le $A_{i,j}$ sono date, i mutui rapporti delle $\alpha_{i,j}$ sono in generale individuati. Il che significa precisamente che la corrispondenza fra un punto e il relativo iperpiano polare rispetto ad $F^{(1)}$ è generalmente biunivoca.

3. Si osservi che la quadrica-inviluppo (1) è r volte specializzata, cioè si riduce a un punto doppio con le coordinate $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+1}$, se è $\alpha_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$; e dunque se si pone

$$(6) \qquad x_{i,j} = x_i\, x_j \qquad (i, j = 1, \cdots, r+1),$$

queste saranno in Σ', con i parametri $x_1, \cdots, x_{r+1}$, le equazioni parametriche di $F^{(r)}$.

Mediante le (6) la $F^{(r)}$ si trova rappresentata su Σ, punto per punto, senza eccezioni; e, in codesta rappresentazione, la sezione di $F^{(r)}$ con l'iperpiano

$$(7) \qquad \sum_{i,j}^{1\cdots r+1} \lambda_{i,j}\, x_{i,j} = 0 \qquad (\lambda_{j,i} = \lambda_{i,j})$$

ha per immagine in Σ la quadrica-luogo rappresentato dall'equazione

$$(8) \qquad \sum_{i,j}^{1\cdots r+1} \lambda_{i,j}\, x_i\, x_j = 0.$$

Come è ben noto, e come, del resto, si vede subito, la corrispondenza (omografica) Ψ che così viene a stabilirsi fra gli iperpiani di Σ' e le quadriche-luogo di Σ è legata a quella, Φ, fra i punti di Σ' e le quadriche-inviluppo di Σ così che un punto e un iperpiano di Σ' si appartengono quando le quadriche, inviluppo e luogo, ad essi corrispondenti sono *coniugate* od *armoniche*.

4. Badando a ciò che or ora è stato detto e osservando che in Σ l'equazione della quadrica-luogo *aderente* alla quadrica-inviluppo (1) – supposta non degenere o semplicemente degenere – è

$$\sum_{i,j}^{1\cdots r+1} A_{i,j}\, x_i\, x_j = 0,$$

si ha che:

Un punto di Σ' *che non sia multiplo per* $F^{(1)}$ *e il relativo iperpiano polare rispetto ad* $F^{(1)}$ *hanno per corrispondenti in* Σ *una quadrica-inviluppo e la quadrica-luogo ad essa aderente.*

Nel seguito, per comodità di discorso, un punto e un iperpiano si diranno *polo* e *polare rispetto ad* $F^{(r)}$, se sono tali rispetto ad $F^{(1)}$.

5. In Σ consideriamo un iperpiano π.

Ai punti di π risponderanno su $F^{(r)}$ quelli di una varietà di dimensione $r-1$ che indicheremo con $G_\pi^{(r-1)}$; dico che:

Essa è una varietà di Veronese di indice $r-1$.

E infatti un iperpiano di Σ' contiene $G_\pi^{(r-1)}$, se, e soltanto se, la quadrica-luogo ad esso omologa in Ψ è coniugata a tutte le quadriche-inviluppo costituite dai punti di π contati ciascuno due volte, cioè si spezza in π e in un iperpiano residuo; dunque per $G_\pi^{(r-1)}$ passano $r+1$ - e non più - iperpiani indipendenti di Σ', ossia $G_\pi^{(r-1)}$ appartiene intanto a uno spazio π' della dimensione

$$\frac{r(r+3)}{2} - (r+1) = \frac{(r-1)(r+2)}{2}.$$

Un punto di Σ' sta in π' se la quadrica-inviluppo di Σ che ad esso corrisponde mediante Φ è coniugata a tutte le quadriche-luogo spezzate in π e in un iperpiano residuo, ossia ha in π un iperpiano doppio; dunque nell'omografia Φ ai punti di π' rispondono le quadriche-inviluppo di Σ con un iperpiano doppio in π - cioè le quadriche-inviluppo di Σ specializzate almeno una volta che hanno per *nuclei* le quadriche-inviluppo (non degeneri o degeneri) di π -; e l'omografia Φ induce fra i punti di π' e le quadriche-inviluppo di π una corrispondenza φ che, al pari di Φ, è un'omografia.

Ora in Φ ai punti di $G_\pi^{(r-1)}$ corrispondono le quadriche-inviluppo di Σ costituite dai punti di π contati ciascuno due volte, dunque in φ ai punti di $G_\pi^{(r-1)}$ corrispondono le quadriche-inviluppo di π costituite ciascuno da un punto contato due volte; e per conseguenza $G_\pi^{(r-1)}$ è, come volevasi, una varietà di Veronese d'indice $r-1$, la quale si trova con π e φ nelle stesse relazioni in cui $F^{(r)}$ trovasi con Σ e Φ.

Notisi che ai punti della sezione di $G_\pi^{(r-1)}$ con un iperpiano di Σ', che non la contenga, cioè con un iperpiano di π', rispondono, mediante φ i punti di una quadrica-luogo di π, sezione di π con la quadrica-luogo di Σ rispondente in Ψ al considerato iperpiano di Σ'; quindi sorge fra gli iperpiani di π' e le quadriche-luogo di π una corrispondenza omografica ψ avente per $G_\pi^{(r-1)}$ il significato che Ψ ha per $F^{(r)}$. In particolare:

Un punto e un iperpiano di π' *sono polo e polare rispetto a* $G_\pi^{(r-1)}$, *se ad essi rispondono in* φ *e* ψ, *rispettivamente, una quadrica-inviluppo di* π *e la quadrica-luogo ad essa aderente.*

Avvertasi che, per analogia a casi consimili, rispetto a $G_\pi^{(r-1)}$ si dirà *polo* di un *iperpiano di* Σ' il polo dell'intersezione di detto iperpiano con π'.

6. Al variare di π in Σ, $G_\pi^{(r-1)}$ varia su $F^{(r)}$ descrivendo su di essa una schiera ∞^r che diremo Γ.

Ebbene dico che:

Se σ' *è un iperpiano di* Σ', *cui risponda in* Σ, *mediante* Ψ, *una quadrica-luogo non degenere, il luogo dei poli di* σ' *rispetto alle singole varietà della schiera* Γ *è una varietà di Veronese di indice* r, *trasformata di* $F^{(r)}$ *nell'omologia che ha per centro il polo di* σ' *rispetto ad* $F^{(r)}$, *per asse* σ' *e per invariante* $-r$.

Si indichi con Q la quadrica-luogo di Σ corrispondente a σ', con π un iperpiano di Σ, con $G_\pi^{(r-1)}$ la corrispondente varietà di Γ, con K la quadrica-inviluppo di Σ aderente a Q, con q l'intersezione di Q e π, con k la quadrica-inviluppo aderente a q (certo non indeterminata, perchè q non può essere più che semplicemente degenere). Infine sia S' il polo di σ' rispetto ad $F^{(r)}$, X' il polo di σ' rispetto a $G_\pi^{(r-1)}$.

Ad S' e X' corrispondono, in Φ e φ, rispettivamente, K e k; quindi se K_1 è la quadrica-inviluppo di Σ avente per nucleo k, ad S' e X' in Φ corrispondono K e K_1. Nella schiera individuata da K e K_1, avente per varietà base l'insieme – contato due volte – degli iperpiani tangenti a Q nei punti di q, cioè degli iperpiani tangenti a Q passanti per il polo P di π, l'unica ulteriore quadrica-inviluppo degenere è quella costituita dal punto doppio P; dunque la retta S' X' taglia ulteriormente $F^{(1)}$ in un punto di $F^{(r)}$.

Segue, evidentemente, che il luogo di X' si ottiene proiettando $F^{(r)}$ da S' su $F^{(1)}$; e allora basta tener presente un'osservazione nota [1] per riconoscere la verità del teorema enunciato [2], il quale costituisce appunto l'estensione che qui si aveva in vista.

(1) Comunicata da C. Segre al Rosati (veggasi la Nota di quest'ultimo dianzi citata).

(2) Occorre appena avvertire che le considerazioni esposte nel testo suggeriscono spontaneamente una serie di problemi che forse non sarebbe inutile risolvere.

Come è noto ad $F^{(r)}$ sono collegate non solo le varietà di punto $F^{(1)}, \cdots, F^{(r-1)}$ ma anche delle varietà di iperpiani $\Phi^{(1)}, \cdots, \Phi^{(r)}$, delle quali la prima è l'insieme degli iperpiani tangenti ad $F^{(r)}$, l'ultimo l'insieme degli iperpiani ognun dei quali tocca $F^{(r)}$ nei punti di una sua $G_\pi^{(r-1)}$. Si potrebbero indagare le relazioni reciproche delle varietà di punti o iperpiani collegate ad $F^{(r)}$ con quelle collegate alla varietà riempita dai poli di un iperpiano a norma del teorema del n. 6. Così si troverebbe in particolare che quest'ultima è toccata dagli iperpiani di $\Phi^{(r)}$.

Ancora. Sulla $F^{(r)}$, accanto alla schiera delle varietà di Veronese di indice $r-1$, rispondente alla totalità degli iperpiani di Σ, vi sono altre $r-2$ schiere di varietà di Veronese, degli indici $1, 2, \cdots, r-2$, rispondenti agli insiemi di $S_1, S_2, \cdots, S_{r-2}$ di Σ. Si potrebbero dunque studiare i luoghi dei poli di un iperpiano di Σ' rispetto alle varietà di queste singole schiere.

Fisica. — *Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova Metrologia elettrica.* Nota[1] del Socio L. Puccianti.

Seconda Parte[2].

Scopo di questa Parte è principalmente di precisare per sommi capi in che consista la « moderna concezione dei fenomeni elettrici » accennata nella introduzione, specialmente per quel che concerne la corrente elettrica di spostamento, l'unicità del campo elettrico sia che si presenti come prodotto da cariche elettriche, sia da induzione elettrodinamica, le relazioni con la teoria relativistica della esperienza di Fizeau, mostrando come l'adozione del sistema a quattro unità fondamentali conferisca chiarezza alla trattazione.

Adopriamo ancora le solite notazioni, senza seguire la cosiddetta razionalizzazione, per quel che riguarda il coefficente 4π[2].

Ora è opportuno però distinguere con caratteri diversi gli enti vettoriali da quelli scalari, o considerati semplicemente come scalari: useremo nel primo caso carattere grassetto, nel secondo carattere comune, e quando occorre, la stessa lettera in due caratteri diversi.

Fissate così le notazioni possiamo volta per volta risparmiare molte parole di spiegazione.

§ 1 Campo elettrostatico.

Potenziale elettrico nel vuoto:

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{\rho}{r} \, d\tau .$$

Formula di Poisson:

nel vuoto

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\rho ,$$

nel mezzo di costante dielettrica ε_p

$$\operatorname{div} \varepsilon_p \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\rho .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1935.

(2) Ciò non per prendere posizione contro la « razionalizzazione », ma per seguire quello che per ora è l'uso più comune.

Teorema di Coulomb:
nel vuoto (al limite di un corpo conduttore)

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\sigma ,$$

nel mezzo corporeo di costante dielettrica ε_p

$$\varepsilon_p E = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\sigma ;$$

ε_p è (nel caso statico) sempre > 1; il campo è indebolito da una densità superficiale $-\sigma'$, prodotta alla superficie del corpo dielettrico dallo spostamento delle cariche in esso presenti (reale spostamento da non confondersi con l'ipotetico spostamento secondo Maxwell), la quale neutralizza parzialmente la densità σ che risiede alla superficie del conduttore.

Dunque

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi (\sigma - \sigma') = \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\sigma$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma}$$

da cui

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\varepsilon_p} (\varepsilon_p - 1)$$

onde

$$4\pi\sigma' = \varepsilon_0 E (\varepsilon_p - 1) .$$

§ 2. Campo elettrodinamico prodotto da una corrente lineare di intensità I, nel vuoto

$$\mathbf{H} = \text{grad } \mathscr{V}$$

con

$$\mathscr{V} = \mu_0 I (\Omega \pm p 4\pi)$$

potenziale polidromo; Ω è l'angolo solido sotto cui si vede il circuito dal punto potenziato, p un numero intero.

Nel mezzo indefinito di permeabilità magnetica μ_p al campo $\mathbf{H}$ si aggiunge quello $\mathbf{H}_A$ delle correnti di Ampère (ad esso parallelo nel caso di isotropia); ne risulta:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_A = \mu_p \mathbf{H} .$$

Per correnti non lineari (cioè non portate da fili sottili, ma costituenti un campo vettoriale) indicando con $\boldsymbol{i}$ il vettore della corrente in un conduttore non magnetico ($\mu_p = 1$)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mu_0 4\pi \boldsymbol{i} .$$

Se il conduttore non è chiuso, il campo di $\boldsymbol{i}$ non è solenoidale come quello di **rot H**, ma alla superficie limitante il conduttore esso è connesso con la derivata rispetto al tempo del campo elettrico, cosicchè nel vuoto è il campo di questa derivata che subentra ad $\boldsymbol{i}$ nella relazione con **rot H**. Infatti per la componente normale vale

$$i_n = \frac{d\sigma}{dt}$$

onde, al limite tra conduttore e spazio vuoto:

$$4\pi i_n = \varepsilon_0 \frac{d\mathrm{E}}{dt} \text{ (1)}.$$

Ciò induce a scrivere la equazione seguente che salva, in tutto il campo, il carattere solenoidale del vettore rotazionale:

$$\mathbf{rot\ H} = \mu_0 \left(4\pi \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right).$$

L'aggiunta del secondo termine, divinato dal genio di Maxwell come « corrente di spostamento », appare così suggerita da una pura considerazione matematica; l'esperienza ha fornito indirettamente ampie conferme della verità contenuta, piuttosto che nelle parole, nelle equazioni.

Se sono presenti cariche elettriche con densità ρ, moventisi con velocità $\boldsymbol{v}$, si aggiunge un termine rappresentante tale corrente di convezione, completando l'equazione così:

$$\mathbf{rot\ H} = \mu_0 \left(4\pi \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\rho \boldsymbol{v} \right).$$

Ma in verità *sappiamo* che la corrente stessa di conduzione ($\boldsymbol{i}$) è convettiva; cosicchè, in linea teorica, potremo sempre scrivere semplicemente

$$\mathrm{rot\ H} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} + 4\pi\rho \boldsymbol{v} \right).$$

Considerando il caso che siano presenti cariche positive e negative frammiste, moventisi in versi opposti (per esempio ciò avviene negli elettroliti), è manifesto che per ρ non si deve intendere la densità statistica

(1) Non avendo scritto derivazioni rispetto alle coordinate spaziali (le quali verrebbero fuori se in seguito si sviluppassero **rot** e *div*) non ho creduto necessario usare per queste, e le altre derivate rispetto al tempo, la notazione speciale con i ∂ torti; il lettore comprende però che concettualmente trattasi di una derivazione parziale, se si pensa che la forza elettrica e gli altri enti sono anche funzioni del punto.

Ho ritenuto poi superfluo, per questa Nota sommaria, analizzare il caso che, per notevole resistività del conduttore, esista una componente tangenziale del campo elettrico.

corrispondente alla somma algebrica delle cariche nell'unità di volume, ma che si usa così una notazione abbreviata, perchè la corrente convettiva dovrebbe scindersi in due termini, i quali risultano concordi, movendosi le cariche dei due segni in versi opposti: a tutto rigore si dovrebbe scrivere:

$$\rho_+ \boldsymbol{v}_+ - \rho_- \boldsymbol{v}_-.$$

Se si tratta di un mezzo corporeo dielettrico, questi termini convettivi rappresentano la *reale* corrente di spostamento (che non deve confondersi con la *ipotetica* corrente di spostamento maxwelliana, di cui non è che una parte), e siccome questa nostra corrente di spostamento sussiste solo al variare del campo, terminando con la formazione o scomparsa dalla densità σ', essa risulta parallela e di densità proporzionale a

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

e il coefficente di proporzionalità si determina considerando il valore al limite con il conduttore, ove è

$$\rho \boldsymbol{v} = \frac{d\sigma'}{dt}$$

dunque

$$4\pi\rho \boldsymbol{v} = 4\pi\varepsilon_0 (\varepsilon_p - 1) \frac{d\mathbf{E}}{dt}.$$

Cosicchè nel mezzo corporeo isolante potremo, aggruppando i due termini del secondo membro, scrivere

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_p \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

e questo aggruppamento coincide ora in valore con la corrente di spostamento secondo Maxwell.

Nel vuoto manca naturalmente la corrente di spostamento reale (cioè convettiva), e scriveremo semplicemente

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}.$$

§ 3. A questa equazione elettromagnetica aggiungiamo l'altra magnetoelettrica

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E}' = -\frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

la quale, in seguito alla definizione elettrodinamica che abbiamo dato di **H** (e avendo accettato il concetto amperiano del magnetismo, non ne potremmo dare una diversa), non contiene la costante μ_0; del resto si potrebbe dire

che essa equazione è l'espressione in termini infinitesimali della definizione stessa di **H**.

L'apice è *provvisoriamente* messo per avvertire che questo campo elettrico indotto non si presenta come identico con l'altro, che figura nella prima equazione e proviene dalle leggi della elettrostatica.

Per ora, a tutto rigore, dovremmo pensare a due diversi campi elettrici, uno **E** coulombiano e uno **E'** faradayiano, la cui risultante sarebbe il totale campo elettrico.

Però essendo il primo lamellare, può indifferentemente essere aggiunto all'altro nella seconda equazione.

Che nella prima equazione possa essere aggiunto il secondo campo, o meglio che anche essa si riferisca a tutto il campo elettrico (che indicheremo semplicemente **E**), qualunque ne sia la causa, è suggerito dall'analogia e ammesso qui come *postulato*.

Questo postulato (che si può dire della *unicità del campo elettrico*), è in sostanza equivalente all'ipotesi di Maxwell della corrente di spostamento, è anzi la stessa ipotesi liberata dalla considerazione di enti fittizii, quali un fluido elettrico o un fluido induttore, esistenti nel vuoto.

Le equazioni maxwelliane si scrivono dunque, riferendoci al sistema di misure con quattro unità fondamentali, nella seguente forma che non presenta la tradizionale simmetria:

$$\mathbf{rot\ H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

$$\mathbf{rot\ E} = -\frac{d\mathbf{H}}{dt} .$$

§ 4. È questo un punto, a mio avviso, assai interessante, perchè mostra i vantaggi, e anche gli svantaggi del sistema a quattro unità.

Cominciamo da questi: francamente il sistema di unità misto (elettrostatico per il campo elettrico, elettromagnetico per il campo magnetico, quali si usano comunemente) ha il vantaggio di essere più direttamente appropriato a esprimere l'energia contenuta nell'unità di volume, come la somma di due termini analoghi; e ciò lo rende, vorrei dire, particolarmente suggestivo per trattare i problemi della radiazione. E da questo punto di vista formale, il sistema a quattro unità presenta uno svantaggio con la scomparsa della simmetria.

Ma tale mancanza di simmetria non è uno svantaggio dal punto di vista strettamente logico; in quanto che la analogia tra fenomeni elettrici e magnetici, tra campo elettrico e magnetico, tanto usata (e vorrei dire: abusata) dai trattatisti, è formale, parziale, artificiale; perchè in realtà il campo elettrico è sostanzialmente diverso dal campo magnetico; e non esiste quindi una vera ragione perchè le equazioni siano simmetriche.

§ 5. Ad ogni modo, aggiunte a queste due equazioni vettoriali maxwelliane le due laplaceiane

$$div\,\mathbf{E} = 0 \quad , \quad div\,\mathbf{H} = 0$$

e col solito notissimo procedimento, si giunge ugualmente alla propagazione delle onde nel vuoto, con la velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

rispetto a *qualunque* riferimento inerziale.

La cosa è diversa se si tratta di un mezzo materiale con costanti ε_p e μ_p. Allora scriveremo:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_p\,\frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mu_p\,\frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

e si giunge pure alle onde con velocità di propagazione, data ora da

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon_p\,\mu_p}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_p\,\mu_p}} = \frac{c}{n}\,.$$

Ma in questo caso il mezzo corporeo costituisce sì un riferimento privilegiato, e la velocità si presenta a questo relativa; che se tale non fosse, non sarebbe possibile la nota interpretazione della classica esperienza di Fizeau, secondo la teoria della relatività; nella quale questa velocità si compone con la velocità v dell'acqua mediante la formula

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{\frac{c}{n}\cdot v}{c^2}}$$

la quale dà c' come velocità di propagazione della luce riferita all'apparecchio interferenziale.

Ricordiamo che è:

$$\lim_{n \to 1} c' = c$$

e ciò esprime analiticamente che la velocità del corpo influisce su quella delle onde che in esso si propagano, sempre meno, quanto meno esso è rifrangente.

Ma forse più significativo è il comportamento della derivata di c' rispetto a v, la quale è indice della dipendenza della velocità di propagazione da quella del mezzo rifrangente, dipendenza che fu in passato interpretata come « trascinamento dell'etere »

$$\frac{\partial c'}{\partial v} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{v}{nc}\right)^2} \text{ (1)};$$

ne segue:

$$\lim_{n \to 1} \frac{\partial c'}{\partial v} = 0$$

e ciò mette in maggior rilievo lo svincolamento della velocità della luce dal riferimento corporeo, allo svanire delle proprietà ottiche (cioè elettriche) del corpo che lo costituisce.

Errata corrige alla prima parte.

Al § 2 righe 7ª e 8ª si corregga:
adottando il sistema elettrostatico vengono abolite le dimensioni di ε, e figurano per μ le dimensioni $[L^{-2} T^2]$.

(1) Naturalmente allora non si scriveva il denominatore, ma si poneva

$$c' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$$

onde si può ricavare

$$\frac{\partial c'}{\partial v} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Fisica. — *Considerazioni generali sul Momento e i Poli magnetici, la Intensità di magnetizzazione e la Suscettività, e sulle rispettive misure in un sistema a quattro unità fondamentali.* Nota [1] del Socio L. Puccianti.

La presente Nota si riferisce a quella intitolata *Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova Metrologia elettrica*, recentemente comparsa in due parti su questi « Atti », e alla mia Memoria *Teoria del Magnetismo secondo Ampère* [2].

In questa Memoria, avendo io adottato il sistema di misure elettromagnetico, rimane *nascosta* (perchè posta implicitamente = 1) la costante universale elettrodinamica μ_0 (altrimenti e, secondo me, impropriamente detta « induttività del vuoto »). In altri termini, siccome il sistema di misure usato parte dalla misura dei poli fondata sulla legge di Coulomb, così non può risultare pienamente chiarita la relazione tra l'elettrodinamica e questa legge, appunto perchè tale relazione è anch'essa *nascosta* nella convenzione metrica adottata.

L'adozione di un sistema a quattro unità (una di natura elettrica) si presta meglio a chiarire come la classica Magnetostatica, si possa inquadrare nella moderna Elettrodinamica; e in particolare permette di precisare utilmente, secondo tale concezione, i concetti e le misure dei principali enti magnetici: Momento, Polo, Intensità di magnetizzazione, Suscettività.

§ 1. È opportuno premettere una osservazione di indole storica.

Il polo magnetico è stato inizialmente concepito come analogo a una carica elettrica e a una massa gravitante, e si è infatti troppo spesso chiamato « massa magnetica ».

Orbene tale concezione, ormai superata, ha avuto origine da proprietà speciali, straordinarie, di alcuni corpi, principalmente dell'acciaio, messe in grande rilievo dall'importanza del più antico e celebre tra gli strumenti fisici, la Bussola. Appunto fili di acciaio, magnetizzati uniformemente secondo tutta la loro lunghezza, hanno permesso di ridurre quasi puntiformi le regioni estreme in cui la magnetizzazione si manifesta all'esterno, dando così l'apparenza di centri di forza, e di un campo di forza newtoniano; cioè permettendo a Coulomb di precisare la sua fondamentalissima legge.

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1935.

(2) « Nuovo Cimento », ser. 6ª, to. 9, 1915.

Nel far ciò, si considera ciascun polo come a sè stante; cioè si prescinde dal fatto di capitale importanza, che la lunghezza del filo permette sì di allontanare i poli eteronimi, ma non di distaccarli, l'uno dall'altro.

Questa concezione newtoniana si è conservata e sviluppata a lungo; ma si tratta ormai da tempo di una sopravvivenza fittizia, sorretta dalla sofistica distinzione del « magnetismo libero » dal « magnetismo vero » (che è sempre nullo).

Nella mia Memoria del 1915 credo di aver mostrato il vantaggio che si ha, nella descrizione e interpretazione del campo magnetico e dei vettori e scalari ad esso attinenti, se ci si libera da quella superata concezione.

§ 2. Ma ciò non significa che si debba abolire il « polo magnetico ». Sebbene il concetto di momento magnetico sia indubbiamente più positivo, meglio definito quantitativamente (basti in proposito ricordare il classico metodo di Gauss per la misurazione del campo terrestre, il cui insigne pregio deriva appunto da ciò, che esso si basa sul momento anzi che sui poli), e soprattutto sia più aderente alla realtà, pure il concetto di polo magnetico resta; e può restare legittimamente, a condizione che si abbandoni la illusoria analogia con la massa agente, e si accetti piuttosto l'altra (meglio conforme al significato comune della parola polo) con l'estremo di un asse di rotazione.

Seguendo la concezione elettrodinamica, siamo dunque impegnati a inquadrare esattamente in essa la nozione di polo magnetico e la legge di Coulomb.

Mentre nella classica teoria magnetostatica si procede dal polo al momento, nella teoria elettrodinamica si procede inversamente: dal momento al polo. E ciò non presenta difficoltà, perchè ci si riferisce a quel tipo semplice di magnete (solenoide lungo e sottile), che appunto è con buona approssimazione realizzato nelle esperienze, che, nella storia della scienza, hanno servito a stabilire il concetto e la misura del polo, e per il quale dunque tale concetto ha valore concreto. È quasi superfluo ripetere che l'altro tipo semplice (la lamina magnetica), non approssimabile con l'esperienza, non è un ente concreto, e possiede solo le proprietà attribuitele dai teorici che l'hanno immaginata.

§ 3. *Concetto e misura elettrodinamici del momento e dei poli di un solenoide* (supposto per semplicità rettilineo).

Indichiamo con:

L la lunghezza

a l'area (piccola) di ciascuna spira

n_1 L il numero totale delle spire

I l'intensità della corrente in esse circolante.

Il momento avrà la misura *elettrodinamica*

$$\mathfrak{M}_e = a \mathrm{L} n_1 \mathrm{I}.$$

L'intensità di ciascun polo la misura pure *elettrodinamica*

$$P_e = an_1 I$$

cui si potrà attribuire il segno + o — secondo le solite convenzioni.

Ottenuta questa espressione, essa può essere utilizzata per ridurre in forma della somma di quattro termini l'espressione dell'energia mutua di due solenoidi, stabilita come prodotto dell'intensità I′ della corrente in uno di essi per il flusso del vettore $\mu_0 \operatorname{grad} \Omega I''$ prodotto dall'altro, e risolvere così la interazione meccanica in quattro interazioni tra i due poli dell'uno e i due poli dell'altro solenoide. Il risultato del calcolo (che non presenta nè difficoltà nè novità) è espresso dalla seguente legge per ciascuna di queste interazioni:

$$F = \mu_0 \frac{P'_e P''_e}{r^2}$$

ove P'_e e P''_e indicano le misure *elettrodinamiche* di due poli appartenenti l'uno al primo l'altro al secondo solenoide, r la distanza.

La legge così scritta, per il fatto che μ_0 vi figura al numeratore, non si accorda con quella di Coulomb, quale si scrive, da quando si è preso a tener conto dell'influenza del mezzo ambiente ponendo l'induttività di questo al denominatore; e quindi, per il vuoto, pure al denominatore la costante μ_0.

Invero in queste mie Note si tratta del significato di μ_0, non della sua posizione nelle formule fondamentali, che non può essere oggetto di discussione.

Ecco dunque un punto che deve essere chiarito.

§ 4. A tal fine cominciamo dal precisare, secondo la teoria elettrodinamica, l'influenza dell'induttività di un mezzo (corporeo) ambiente, distinguendo i casi, che esso invada o non invada lo spazio tubulare compreso entro le spire di filo infinitamente sottile che formano il solenoide, cioè distinguendo il solenoide *aperto* dal solenoide *cieco*, il quale secondo, non il primo, può esser considerato come perfettamente equivalente a un filo di acciaio magnetizzato [1], perchè il mezzo ambiente non penetra nell'acciaio.

E non avrò che da modificare ciò che è esposto nella mia Memoria *Teoria del Magnetismo secondo Ampère*, solo in quanto ora si suppone di adottare un sistema di misure a quattro unità, e in quanto ora ci si riferisce ai poli.

Si presentano tre casi:

(*a*) *Due solenoidi aperti.*

(1) Si ammette idealmente che esso sia dotato di perfetta *rigidità magnetica*, cioè assoluta invariabilità del suo stato magnetico così come si ammette costante la corrente circolante nel solenoide cieco.

Siccome il mezzo induttivo invade tutto lo spazio ambiente, l'interazione sarà direttamente proporzionale a μ_p; cioè si potrà considerare come l'effetto del campo del vettore

$$\mathbf{B}' = \mu_p \mathbf{H}'$$

prodotto dal primo solenoide sull'altro.

Per l'interazione tra due poli la legge sarà:

$$F = \mu_p \mu_0 \frac{P_e' P_e''}{r^2}$$

(*b*) *Un solenoide cieco e uno aperto.*

Se il primo solenoide è cieco, mancando nel suo interno le correnti di Ampère, ivi sarà

$$\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$$

ma $\mathbf{B}'$ (essendo solenoidale) non presenta divergenza agli estremi polari; dunque anche nel mezzo esterno il valore di $\mathbf{B}'$ sarà (*caeteris paribus*) quello del caso (*a*) diviso per μ_p, e l'interazione risulterà indipendente da μ_p.

Tale indipendenza è propria delle azioni elettromagnetiche. Risulta dunque confermata l'equivalenza del solenoide cieco col magnete filiforme.

La legge dell'interazione tra due poli è ora:

$$F = \mu_0 \frac{P_e' P_e''}{r^2}.$$

(*c*) *Due solenoidi ciechi.*

Per passare dal caso precedente a questo basta pensare l'interazione come effetto sul primo solenoide del campo prodotto dal secondo, e questo pure cieco. Il valore di $\mathbf{B}''$ sarà quello del caso (*b*) diviso per μ_p; l'interazione risulterà inversamente proporzionale a μ_p (interazione magnetica).

La legge dell'interazione tra due poli è:

$$F = \frac{\mu_0}{\mu_p} \frac{P_e' P_e''}{r^2}.$$

§ 5. Facciamo ora la posizione:

(*) $$P = \mu_0 P_e = \mu_0 4\pi a n_1 I$$

e la legge prende la forma desiderata:

$$F = \frac{1}{\mu_p \mu_0} \frac{P' P''}{r^2}.$$

Consideriamo il significato di questa trasformazione, la quale a prima vista può parere un giuoco formale. Essa invece conclude il passaggio logico

dalla Elettrodinamica per l'Elettromagnetismo alla Magnetostatica, che sostituisce, invertendolo, quello storico dalla Magnetostatica per l'Elettromagnetismo alla Elettrodinamica.

La posizione si deve fare quando si tratta di magneti, dico vere e proprie calamite, filiformi, considerati come solenoidi ciechi; nei quali dunque

$$n_1 \, I = i_A$$

è la densità equivalente delle correnti di Ampère (vedi la mia Memoria citata).

P assume così il significato di misura *magnetica* del polo, e la (*) quello di *condizione di equivalenza tra correnti e magneti;* la quale prende il posto di quella riferita alla lamina magnetica, che è criticata nella mia Memoria. Ne prende il posto, aggiungo, vantaggiosamente; perchè non figurandovi l'induttività del mezzo, essa determina una *autentica* equivalenza. Infatti la legge che lega l'intensità P del polo col flusso del vettore **B** per esso uscente o entrante, ha in qualunque mezzo la solita espressione

$$4\pi P = \Phi(\mathbf{B}).$$

Non ho scritto P_m, ma semplicemente P, perchè questa misura magnetica del polo si assume ora come definitiva.

Analogamente per il momento di un magnete filiforme assumiamo come definitiva la misura magnetica

$$\mathfrak{M} = \mu_0 \mathfrak{M}_e .$$

Ricordando ora la relazione

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}_A .$$

modificheremo, in conseguenza del cambiato sistema di misure, la relazione tra $\mathfrak{H}_A$ e la densità equivalente delle correnti di Ampère scrivendo:

$$\mathfrak{H}_A = \mu_0 \, 4\pi \, n_1 \, I = \mu_0 \, 4\pi \frac{\mathfrak{M}_e}{La} = \mu_0 \, 4\pi \, \mathfrak{I}_e$$

ove $\mathfrak{I}_e$ indica la misura elettrodinamica della intensità di magnetizzazione; la quale si elimina ponendo ancora:

$$\mathfrak{I} = \mu_0 \, \mathfrak{I}_e .$$

E ricadiamo così finalmente sulla relazione:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{I}$$

e su quella:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi$$

in cui χ è la suscettività (numero puro).

§ 6. Un'ultima osservazione sulla misura e l'unità dei campi di forza.

In generale questi, essendo enti astratti, si sono sempre definiti dalla azione meccanica su un ente fisico concreto, usato come *esploratore* di ciascuno di essi. Così si fa per il campo gravitazionale, così per quello elettrico. In tal modo si stabilisce la relazione tra le unità di misura, assumendo come intensità unitaria quella che corrisponde all'azione meccanica unitaria sull'*esploratore* unitario.

Per il campo magnetico, nella concezione elettrodinamica, l'ente concreto esploratore è la *corrente elettrica*. Con questo concetto risulta nel vuoto definito il vettore **H** e la sua misura (vedi Nota precedente).

Ma il campo è anche in relazione con l'ente concreto che lo produce omogeneo all'esploratore; rispettivamente *massa*, *carica elettrica*, *corrente elettrica*. In questa seconda relazione (sempre nello spazio vuoto) compare la rispettiva costante universale: per la gravitazione, con un sistema meccanico a tre unità, la costante di gravitazione; per il campo elettrico e per il magnetico, quando si adotti il sistema a quattro unità, le costanti ε_0 e μ_0:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{4\pi q}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{H} = \mu_0 \operatorname{grad} I\Omega .$$

Non vi sarebbe coerenza metodica dunque, se si togliesse μ_0 da questa relazione, e si facesse invece comparire in quella in cui la corrente figura come esploratore.

È interessante però osservare che il vettore

$$\operatorname{grad} I\Omega$$

corrisponde a quello che si potrebbe definire come campo di forza, assumendo come esploratore il polo magnetico P, mentre il polo P_e (in misura elettrodinamica), darebbe naturalmente ancora **H**.

Ma l'adozione del polo magnetico come esploratore pertiene alla classica Magnetostatica, e non sarebbe conforme al razionale impianto di un sistema di misure, nel quale si introduca una quarta unità fondamentale di una specie *elettrica*, che può essere appunto la corrente, o, altrimenti, un'altra specie con questa direttamente connessa.

Ciò se toglie valore concettuale al vettore $\operatorname{grad} I\Omega$, non esclude che esso possa essere usato come ausiliario, e possa ad esso venire assegnato un nome e una unità.

Questa mia Nota e la precedente non contengono che una esposizione sommaria di concetti, nei quali non saprei io stesso ormai distinguere nettamente ciò che è conoscenza comune da ciò che è elaborazione personale.

Penso che la pubblicazione appaia giustificata dalla relazione che questi concetti, del tutto generali, hanno con l'importante attuale rinnovamento nel campo della Metrologia.

Meccanica. — *Una questione relativa alle onde elettromagnetiche armoniche.* Nota [1] del Socio G. A. Maggi e di B. Finzi.

In alcune recenti ricerche [2] si considerano le seguenti soluzioni armoniche delle equazioni di Maxwell in un mezzo omogeneo isotropo:

$$(1) \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cos\varphi + \mathbf{E}_2 \sin\varphi \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \cos\varphi + \mathbf{H}_2 \sin\varphi \, ,$$

nelle quali $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ sono i vettori elettromagnetici, φ è la fase ed $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ sono vettori funzioni del posto.

Le (1), come soluzione delle equazioni di Maxwell nel mezzo considerato, corrispondono ad onde parallele avanzanti normalmente con una determinata velocità costante, e debbono soddisfare sulla fronte d'onda alle condizioni di Love.

In una Nota dell'Istituto Veneto [3] il prof. Sona afferma che una sua precedente dimostrazione [4] della non esistenza di tali onde, regolari in tutta la regione esterna ad una superficie convessa assegnata, non è rigorosa, perchè le relazioni da lui tratte dalle condizioni di Love fra i vettori che fungono in (1) da coefficienti di $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$ valgono soltanto per i vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{H}_1$, mentre nulla si può concludere per $\mathbf{E}_2$ ed $\mathbf{H}_2$. Egli ritiene quindi necessario procedere ad una nuova laboriosa dimostrazione della sua tesi precedente, sia pur limitatamente al caso delle onde sferiche.

Anteriormente all'ultima pubblicazione del Sona, in una Nota presentata all'Istituto Lombardo [5], noi ci siamo valsi di entrambe le relazioni che si possono trarre dalle condizioni di Love, e cioè sia delle relazioni riguardanti

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1935.

(2) G. A. Maggi, *Sul problema della riflessione e della rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche di forma qualsivoglia.* «Rend. Ist. Lombardo», LXVI, 1933; G. A. Maggi, *Nuovi complementi alla Nota: Riflessione e rifrazione* ecc. «Rend. R. Acc. dei Lincei», XIX, 1934; L. Sona, *Sul problema della riflessione e della rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche.* «Rend. R. Acc. dei Lincei», XIX, 1934; L. Sona, *Un'osservazione riguardante la propagazione delle onde elettromagnetiche.* «Idem»; G. A. Maggi e B. Finzi, *Condizioni di esistenza delle onde elettromagnetiche armoniche.* «Rend. Ist. Lombardo», LXVII, 1934; G. A. Maggi, *Onde elettromagnetiche armoniche.* «Rend. Seminario mat. e fis.», Milano, IX, 1935.

(3) L. Sona, *Sulle vibrazioni elettromagnetiche di carattere armonico semplice.* «Atti Ist. Veneto», XCIV, 1935.

(4) L. Sona, *Un'osservazione riguardante* ecc., loc. cit.

(5) G. A. Maggi e B. Finzi, loc. cit.

i coefficienti di $\cos\varphi$ che di quelle riguardanti i coefficienti di $\sin\varphi$. Ciò ci appariva ovvio, dato il modo con il quale erano fisicamente interpretate le soluzioni armoniche (1) nel problema considerato. Ora, dalla ricordata eccezione del prof. Sona, nella più recente sua Nota, benchè riguardante la propagazione che avviene all'esterno di una superficie assegnata, risulta esplicitamente contestata la legittimità del nostro procedimento. Essa ci induce quindi ad aggiungere un brevissimo complemento alla nostra ricerca, per mostrare come, nel problema da noi trattato, dalle condizioni di Love scendano sia le relazioni riguardanti i vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{H}_1$ che le relazioni riguardanti i vettori $\mathbf{E}_2$ ed $\mathbf{H}_2$.

Difatti, scriviamo, con il consueto significato dei simboli, le equazioni di Maxwell nel caso in esame:

$$(2) \qquad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad , \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} ;$$

e scriviamo pure le condizioni di Love, valevoli sulla fronte d'onda, il cui versore normale diciamo $\boldsymbol{n}$:

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E} = -\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{H} \quad , \quad \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{H} = \boldsymbol{n} \wedge \mathbf{E} .$$

Si vuole che i vettori $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ dati da (1) soddisfacciano alle (2), in ogni istante ed in ogni punto dello spazio, e soddisfacciano alle (3), in ogni istante t, in ogni punto P della superficie σ, che, all'istante t, funge da fronte d'onda. Nelle (1) la fase φ dipende dal punto e dal tempo nel modo seguente: considerata una superficie d'onda Σ ed una superficie fissa qualsivoglia parallela a Σ (superficie base), se n è la misura comune delle intercette delle normali a Σ, comprese fra la superficie base e la superficie Σ, se a è la costante che rappresenta la velocità di avanzamento delle onde ed α è pure una costante, è:

$$(4) \qquad \varphi = \alpha\left(\frac{n}{a} - t\right).$$

Osserviamo ora che, mentre le (2) e le (3), dato il loro significato intrinseco, sono invarianti rispetto al riferimento di tempo e di spazio, e *non dipendono* dalla particolare scelta della base, mantenendo pienamente il loro valore quando si muti la base, tale fatto *non* sussiste per la soluzione (1). Più particolarmente, le condizioni di Love (3), una volta fissati un istante t ed una superficie σ, che funge nell'istante considerato da fronte d'onda, sono sempre le stesse in ogni punto P di σ, qualunque sia la base; non così la soluzione (1), perchè, mentre i vettori $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, dipendendo soltanto da P, sono anch'essi indipendenti dalla scelta della base, la

fase φ, data da (4), assume sulla fissata fronte d'onda un valore costante k, e questo valore dipende precisamente dalla scelta della base: per ogni particolare base si ha un particolare valore per k.

Lasciando dunque arbitraria la base, le (1) vengono formalmente a rappresentare famiglie di soluzioni di (2) e (3), dipendenti appunto dalla costante arbitraria k.

Ma si vuole che queste soluzioni soddisfacciano alle (3), che, ripetiamolo, non dipendono dalla scelta della base: queste ultime debbono dunque essere verificate dalle (1), qualunque sia k.

Ponendo allora (1) in (3) e scrivendo che le equazioni così ottenute sono vere qualunque sia k, si ricavano immediatamente [1] le relazioni:

$$(5) \qquad \mathbf{E}_i = -\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{H}_i \quad , \quad \mathbf{H}_i = \boldsymbol{n} \wedge \mathbf{E}_i ,$$

valide *sia per* $i = 1$, *sia per* $i = 2$.

Le (5) sussistono nei punti P della fronte d'onda, ma, essendo esse indipendenti dal tempo, debbono pure manifestamente verificarsi, a qualunque tempo, in ogni punto del campo, a monte della fronte d'onda.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria). — *L'elemento lineare proiettivo e l'applicabilità proiettiva di nuovi reticolati dello spazio ordinario.* Nota [2] di G. Palozzi, presentata dal Socio G. Fubini.

1. È noto [3] che due sistemi di curve tracciate su una superficie di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni si dicono costituire un reticolato quando: 1° da ogni punto della superficie (o di una sua regione) esce una curva di ciascun sistema; 2° le rigate aventi per generatrici le tangenti alle curve di un sistema, nei punti in cui queste sono incontrate da una curva dell'altro, sono sviluppabili. In particolare, quindi, un reticolato piano si compone di due sistemi di curve di un piano tali che da ogni punto del piano (o di una sua regione) esca una curva di ciascun sistema; alle quali poi s'impone l'ulteriore condizione che abbiano direzioni fra loro distinte, per escludere i reticolati degeneri [4].

(1) Cfr. la Conferenza di G. A. Maggi, in «Rend. Seminario mat. e fis. di Milano», citata a nota 2, § 8.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1935.

(3) V., p. es., G. Tzitzéica, *Géométrie différentielle projective des reséaux*. Bucarest, Académie Roumaine, 1923.

(4) V. G. Fubini et E. Čech, *Introduction a la Géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

In uno studio sulla rappresentazione intrinseca ed invariante (per collineazioni) dei reticolati piani (non degeneri), G. Fubini [1], prendendo come punto di partenza la definizione di questi reticolati, ne ha suggerito due nuove generalizzazioni. La generalizzazione che si presenta più ovvia, nel passare dal piano allo spazio ordinario, consiste nel sostituire i due sistemi di curve con tre sistemi di superficie tali che per ogni punto dello spazio (o di una sua regione) passi una superficie di ciascun sistema coi piani tangenti in quel punto distinti fra loro e non facenti fascio.

Con la presente Nota inizio lo studio di questi reticolati, definendo l'elemento lineare proiettivo e trattando il problema dell'applicabilità proiettiva.

2. Se $x\,(=x^i\,;\,i=1\,,2\,,3\,,4)$ indicano coordinate proiettive omogenee di un punto dello spazio, uno dei reticolati definiti al numero precedente può essere rappresentato da equazioni del tipo

$$x = x\,(u\,,v\,,w) \tag{1}$$

tali che

$$\Delta = |\,x_u\,,x_v\,,x_w\,,x\,| \neq 0\,,$$

giusta la condizione relativa ai piani tangenti alle tre superficie passanti per uno stesso punto dello spazio. Ne segue che le x debbono soddisfare al sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{uu} = px_u + gx_v + bx_w + h_1 x & x_{uv} = \mu x_u + lx_v + \gamma x_w + k_1 x \\ x_{vv} = cx_u + qx_v + ex_w + h_2 x & x_{vw} = \alpha x_u + \nu x_v + mx_w + k_2 x \\ x_{ww} = fx_u + ax_v + rx_w + h_3 x & x_{wu} = nx_u + \beta x_v + \lambda x_w + k_3 x \end{array}\right. \tag{2}$$

ove

$$\begin{array}{llll} p = |\,x_{uu}\,,x_v\,,x_w\,,x\,| : \Delta & , & g = |\,x_u\,,x_{uu}\,,x_w\,,x\,| : \Delta\,, \\ b = |\,x_u\,,x_v\,,x_{uu}\,,x\,| : \Delta & , & h_1 = |\,x_u\,,x_v\,,x_w\,,x_{uu}\,| : \Delta\,, \\ \mu = |\,x_{uv}\,,x_v\,,x_w\,,x\,| : \Delta & , & l = |\,x_u\,,x_{uv}\,,x_w\,,x\,| : \Delta\,, \\ \gamma = |\,x_u\,,x_v\,,x_{uv}\,,x\,| : \Delta & , & k_1 = |\,x_u\,,x_v\,,x_w\,,x_{uv}\,| : \Delta\,; \end{array}$$

e gli altri coefficienti si deducono da questi mediante la rotazione delle lettere $u\,,v\,,w\,;\,p\,,q\,,r\,;\,e\,,f\,,g\,;\,a\,,b\,,c\,;\,h_1\,,h_2\,,h_3\,;\,\lambda\,,\mu\,,\nu\,;\,l\,,m\,,n\,;\,\alpha\,,\beta\,,\gamma\,;\,k_1\,,k_2\,,k_3$.

Questi coefficienti non mutano sottoponendo le x ad una sostituzione lineare omogenea a determinante non nullo; ma si alterano per effetto di una trasformazione del tipo

$$x = \rho x' \quad , \quad \rho = \rho\,(u\,,v\,,w) \tag{3}$$

(1) V. la Nota di questo Autore: *Sur la Géométrie projective des reséaux plans* «Compositio Mathematica», to. I.

o di un cambiamento di parametri della forma

$$(4) \qquad u = u(\bar{u}) \qquad v = v(\bar{v}) \qquad w = w(\bar{w}),$$

con che invece non muta il reticolato.

3. Sia $S(v, w)$ la superficie, passante per il punto x corrispondente a valori generici dei parametri u, v, w, definita dalle (1) quando si tiene fisso u e si lasciano variare v e w. Il piano osculatore in x alla linea u uscente da questo punto ha per equazione

$$|X, x, x_u, x_{uu}| = 0$$

ed un punto di $S(v, w)$ infinitamente vicino a x ha per coordinate $x + x_v\,dv + x_w\,dw$; perciò quel piano sega questa superficie secondo una curva la cui tangente nel punto x è definita da

$$|x_v\,dv + x_w\,dw, x, x_u, x_{uu}| = 0$$

cioè, per le (2), da

$$b\,dv - g\,dw = 0.$$

Ne segue che la forma

$$F' = b\,dv - g\,dw$$

si altererà, per effetto delle trasformazioni (3) e (4), tutt'al più per un fattore, per conoscere il quale basterà esaminare come si altera, per effetto di queste trasformazioni, un termine di F'.

Ora si ha

$$b' = b \quad , \quad \bar{b} = b\frac{u'^2}{w'}\,(1)$$

da cui risulta che $b\dfrac{du^2}{dw}$ e quindi anche

$$F_1 = F'\frac{du^2}{dv\,dw}$$

è intrinseca ed invariante.

Lo stesso dicasi di

$$F_2 = F''\frac{dv^2}{dw\,du} \quad , \quad F_3 = F'''\frac{dw^2}{du\,dv}$$

ove il significato di F'', F''' è evidente; sicchè sarà intrinseca ed invariante anche la forma $F = F_1 + F_2 + F_3$ cioè

(1) Nelle quali il significato di b' e $\bar{b}$ è ovvio

$$F = \frac{(b\,dv - g\,dw)\,du^3 + (c\,dw - e\,du)\,dv^3 + (a\,du - f\,dv)\,dw^3}{du\,dv\,dw}$$

che dirò l'*elemento lineare proiettivo* del reticolato.

Questa forma è indeterminata solo quando $b = g = c = e = a = f = 0$. Ma le condizioni $b = 0$ ed $e = 0$, per esempio, esprimono che le linee u e v delle superficie $S(u, v)$ hanno i piani osculatori che coincidono con i piani tangenti a queste superficie; onde: *i soli reticolati per i quali risulta indeterminato l'elemento lineare proiettivo sono quelli le cui linee* u, v, w *sono asintotiche delle superficie* $S(u, v)$, $S(v, w)$, $S(u, w)$.

4. Siano ora R e $\overline{R}$ due reticolati in corrispondenza biunivoca. Supponendo questa definita da valori uguali dei parametri, si potranno rappresentare R e $\overline{R}$ rispettivamente mediante le equazioni

$$x = x(u, v, w) \qquad \overline{x} = \overline{x}(u, v, w)$$

tali che

$$|x_u, x_v, x_w, x| \neq 0 \qquad |\overline{x}_u, \overline{x}_v, \overline{x}_w, \overline{x}| \neq 0.$$

Allora al punto O di coordinate $x(u_o, v_o, w_o)$ corrisponderà il punto $\overline{O}$ di coordinate $\overline{x}(u_o, v_o, w_o)$; e ad una curva C per O appartenente ad una delle superficie che passano per questo punto, per esempio alla superficie $S(u, v)$, e quindi di equazioni

$$x = x(u(t), v(t), w_o)$$

corrisponderà la curva $\overline{C}$ di $\overline{S}(u, v)$

$$\overline{x} = \overline{x}(u(t), v(t), w_o).$$

La corrispondenza fra R e $\overline{R}$ si dirà un'*applicabilità proiettiva impropria* se, per ogni coppia di punti omologhi O, $\overline{O}$, esiste una proiettività tale che porti O in $\overline{O}$, ogni curva C per O appartenente ad una delle superficie passanti per questo punto in una curva avente in $\overline{O}$ un contatto del primo ordine (almeno) con la curva $\overline{C}$ omologa di C e che le trasformate delle linee

$$x = x(u, v_o, w_o) \quad , \quad x = x(u_o, v, w_o) \quad , \quad x = x(u_o, v_o, w),$$

che sono intersezioni di due qualunque delle tre superficie passanti per O, abbiano in $\overline{O}$ un contatto del secondo ordine con le omologhe.

Io dico che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè* R e $\overline{R}$ *si corrispondano in una applicabilità proiettiva impropria è che i loro elementi lineari proiettivi siano proporzionali.*

5. Conviene premettere che, se Γ e $\bar{\Gamma}$ sono due curve definite dando coordinate non omogenee x, y, z e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dei loro punti in funzione di due parametri t e $\bar{t}$ rispettivamente, le condizioni perchè in un punto comune a Γ e $\bar{\Gamma}$ queste abbiano un contatto del primo ordine sono date dalle

$$x = \bar{x} \quad , \quad x_t = C\bar{x}_{\bar{t}} \qquad (C = \text{cost.}) \tag{5}$$

e dalle relazioni analoghe che si ottengono sostituendo successivamente x con y e z [2]; e le condizioni perchè il contatto sia del secondo ordine sono date dalle (5) e da

$$x_{tt} = C^2 \bar{x}_{\bar{t}\bar{t}} + C' \bar{x}_{\bar{t}} . \tag{6}$$

Passando a coordinate omogenee x^i $(i = 1, 2, 3, 4)$, si riconosce che le precedenti equivalgono a

$$x = \sigma\bar{x} \quad , \quad x_t = \tau\bar{x}_{\bar{t}} + \omega\bar{x} \tag{5'}$$

$$x_{tt} = \frac{\tau^2}{\sigma} \bar{x}_{\bar{t}\bar{t}} + \chi\bar{x}_{\bar{t}} + \psi\bar{x} . \tag{6'}$$

Se $t = \bar{t}$, fra i punti di Γ e $\bar{\Gamma}$ viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca qualora si considerino come omologhi punti individuati dallo stesso valore di t. In tal caso, se nelle (5) è $C = 1$ o nelle (6) $C = 1$ e $C' = 0$, le due curve hanno a comune due o tre punti infinitamente vicini omologhi l'uno dell'altro nella corrispondenza suddetta, e il contatto si dice *analitico*. Per il contatto analitico le (5') e (6') si riducono a

$$x = \sigma\bar{x} \quad , \quad x_t = \sigma(\bar{x}_t + \Lambda\bar{x}) \tag{5''}$$

$$x_{tt} = \sigma(\bar{x}_{tt} + 2\Lambda\bar{x}_t + \Omega\bar{x}). \tag{6''}$$

6. Ciò premesso, supponiamo che R e $\bar{R}$ si corrispondano in una applicabilità proiettiva impropria. Fissati i valori $u = u_0, v = v_0, w = w_0$, si potrà trovare una trasformazione lineare omogenea T sulle x a coefficienti costanti e a determinante non nullo tale che per quei valori sia

$$Tx = \sigma\bar{x} \tag{7}$$

$$Tx_u = \tau'\bar{x}_u + \omega'\bar{x} \ , \ Tx_v = \tau''\bar{x}_v + \omega''\bar{x} \ ; \ Tx_w = \tau'''\bar{x}_w + \omega'''\bar{x} \ [3]. \tag{8}$$

Ma per ogni curva C di $S(u, v)$ dev'essere pure

$$Tx_t = \tau\bar{x}_t + \omega\bar{x}$$

(1) V. Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale*. Bologna, Zanichelli, to. I, § 3.
(2) Che qui e nel seguito s'intenderanno sempre sottintese.
(3) Ove $Tx, \cdots$ sta ad indicare il trasformato di $x, \cdots$ mediante T.

cioè

$$T(x_u u' + x_v v') = \tau(\bar{x}_u u' + \bar{x}_v v') + \omega\bar{x};$$

perciò $\tau' = \tau'' = \tau$, e la prima e la seconda delle (8) si potranno scrivere

$$(8') \qquad Tx_u = \tau\bar{x}_u + \omega'\bar{x} \quad , \quad Tx_v = \tau\bar{x}_v + \omega''\bar{x}.$$

Ragionando analogamente per le curve C appartenenti ad una qualunque delle altre due superficie $S(v, w)$ o $S(u, w)$, si trova che la terza delle (8) può scriversi

$$(8'') \qquad Tx_w = \tau\bar{x}_w + \omega'''\bar{x}.$$

Inoltre nel punto u_0, v_0, w_0 dev'essere

$$(9) \qquad \begin{cases} Tx_{uu} = \dfrac{\tau^2}{\sigma}\bar{x}_{uu} + \chi'\bar{x}_u + \psi'\bar{x} \\ Tx_{vv} = \dfrac{\tau^2}{\sigma}\bar{x}_{vv} + \chi''\bar{x}_v + \psi''\bar{x} \\ Tx_{ww} = \dfrac{\tau^2}{\sigma}\bar{x}_{ww} + \chi'''\bar{x}_w + \psi'''\bar{x}. \end{cases}$$

Ma, per essere i coefficienti delle (2) invarianti per collineazioni, si ha dalle (2) stesse

$$(10) \qquad Tx_{uu} = pTx_u + gTx_v + bTx_w + h_1 Tx$$

e quindi per le (7), (8'), (8'')

$$Tx_{uu} = \tau p\bar{x}_u + \tau g\bar{x}_v + \tau b\bar{x}_w + (\omega' p + \omega'' g + \omega''' b + \sigma h_1)\bar{x}.$$

D'altra parte, se

$$\bar{x}_{uu} = \bar{p}\bar{x}_u + \bar{g}\bar{x}_v + \bar{b}\bar{x}_w + \bar{h}_1\bar{x}, \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sono le equazioni analoghe a (2) a cui soddisfano le $\bar{x}$, si ha

$$\frac{\tau^2}{\sigma}\bar{x}_{uu} + \chi'\bar{x}_u + \psi'\bar{x} = \left(\frac{\tau^2}{\sigma}\bar{p} + \chi'\right)\bar{x}_u + \frac{\tau^2}{\sigma}\bar{g}\bar{x}_v + \frac{\tau^2}{\sigma}\bar{b}\bar{x}_w + \left(\frac{\tau^2}{\sigma}\bar{h}_1 + \psi'\right)\bar{x}.$$

Perciò dalla prima delle (9) si ricava che per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ dev'essere

$$(12) \qquad g = \frac{\tau}{\sigma}\bar{g} \quad , \quad b = \frac{\tau}{\sigma}\bar{b}.$$

Analogamente si trova che dev'essere

$$(12') \qquad e = \frac{\tau}{\sigma_0}\bar{e} \quad , \quad c = \frac{\tau}{\sigma}\bar{c} \quad ; \quad f = \frac{\tau}{\sigma}\bar{f} \quad , \quad a = \frac{\tau}{\sigma}\bar{a}$$

e quindi anche, detto $\overline{F}$ l'elemento lineare proiettivo di $\overline{R}$,

$$F = \Phi \overline{F} \quad \text{ove} \quad \Phi = \frac{\tau}{\sigma}. \tag{13}$$

Viceversa, supponiamo che per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ valga la (13) e quindi le (12) e (12′). Indicate con X, Y, Z ; $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ le coordinate non omogenee $\frac{x^1}{x^4}, \cdots$; $\frac{\overline{x}^1}{\overline{x}^4}, \cdots$, si consideri una qualunque proiettività $\mathcal{S}$ che porti i punti definiti dai valori di

$$X, Y, Z \quad ; \quad X_u, Y_u, Z_u \quad ; \quad X_v, Y_v, Z_v;$$
$$X_w, Y_w, Z_w \quad \text{per} \quad u = u_0, v = v_0, w = w_0$$

rispettivamente nei punti definiti da

$$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \quad ; \quad \Phi\overline{X}_u, \Phi\overline{Y}_u, \Phi\overline{Z}_u \quad ; \quad \Phi\overline{X}_v, \Phi\overline{Y}_v, \Phi\overline{Z};$$
$$\Phi\overline{X}_w, \Phi\overline{Y}_w, \Phi\overline{Z}_w \quad \text{per} \quad u = u_0, v = v_0, w = w_0.$$

Se $(\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}}, \overline{\overline{Z}})$ è il trasformato di (X, Y, Z) mediante $\mathcal{S}$ si avrà dunque per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X} \quad , \quad \overline{\overline{X}}_u = \Phi\overline{X}_u \quad , \quad \overline{\overline{X}}_v = \Phi\overline{X}_v \quad , \quad \overline{\overline{X}}_w = \Phi\overline{X}_w$$

e le relazioni analoghe con Y e Z al posto di X; e quindi anche

$$\frac{\overline{\overline{Y}}_{uu}\overline{\overline{X}}_u - \overline{\overline{Y}}_u\overline{\overline{X}}_{uu}}{\overline{\overline{X}}_u^3} = \frac{\overline{Y}_{uu}\overline{X}_u - \overline{Y}_u\overline{X}_{uu}}{\overline{X}_u^3}, \tag{14}$$

perchè questa equivale a

$$\frac{\overline{\overline{g}}(\overline{\overline{Y}}_v\overline{\overline{X}}_u - \overline{Y}_u\overline{\overline{X}}_v) + \overline{\overline{b}}(\overline{\overline{Y}}_w\overline{\overline{X}}_u - \overline{\overline{X}}_w\overline{\overline{Y}}_u)}{\overline{\overline{X}}_u^3} = \frac{\overline{g}(\overline{Y}_v\overline{X}_u - \overline{Y}_u\overline{X}_v) + \overline{b}(\overline{Y}_w\overline{X}_u - \overline{X}_w\overline{Y}_u)}{\overline{X}_u^3}$$

cioè a

$$\frac{\overline{\overline{g}}(\overline{\overline{Y}}_v\overline{\overline{X}}_u - \overline{Y}_u\overline{\overline{X}}_v) + \overline{\overline{b}}(\overline{\overline{Y}}_w\overline{\overline{X}}_u - \overline{\overline{X}}_w\overline{\overline{Y}}_u)}{\Phi\overline{X}_u^3} = \frac{\overline{g}(\overline{Y}_v\overline{X}_u - \overline{Y}_u\overline{X}_v) + \overline{b}(\overline{Y}_w\overline{X}_u - \overline{X}_w\overline{Y}_u)}{\overline{X}_u^3}$$

che è vera in virtù delle (12), in cui si tenga conto che $\overline{\overline{g}} = g, \overline{\overline{b}} = b$. Ma la (14) ci dice che per le curve

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}(u, v_0, w_0) \quad , \quad \overline{X} = \overline{X}(u, v_0, w_0)$$

vale per $u = u_0$ la

$$\frac{d^2\overline{\overline{Y}}}{d\overline{\overline{X}}^2} = \frac{d^2\overline{Y}}{d\overline{X}^2}.$$

cioè che queste due curve hanno in $\overline{O}$ un contatto del secondo ordine. Lo stesso dicasi per le altre due coppie di curve analoghe.

7. Risulta immediatamente da quanto precede che se una corrispondenza biunivoca fra due reticolati R e $\overline{R}$ è una applicabilità proiettiva impropria, sulle superficie $S(u,v)$, $\overline{S}(u,v)$, $[S(v,w), \overline{S}(v,w); S(u,w), \overline{S}(u,w)]$ si corrispondono le linee inviluppate dalle tracce dei piani osculatori alle linee $w(u;v)$ uscenti dai punti di S e $\overline{S}$. Questa condizione, che dunque è necessaria per l'applicabilità proiettiva impropria, non è sufficiente; ma si può aggiungere ad essa un'ulteriore condizione che, in unione a quella, caratterizza l'applicabilità proiettiva impropria. Perciò introdurrò un invariante proiettivo, relativo ad una tangente in O alla superficie $S(u,v)$, o ciò che è lo stesso, ad ogni punto di una curva C di questa superficie.

Sia C una curva di $S(u,v)$ uscente da O in direzione $\frac{dv}{du}$ e O′ un punto di C distinto da O; e siano O'_1 e O'_2 i punti in cui le linee u e v di S uscenti da O′ incontrano rispettivamente le linee v e u di S uscenti da O, che avranno per coordinate

$$x'_1 = x + x_v\,dv + \frac{1}{2}x_{vv}\,dv^2 + \cdots$$

$$x'_2 = x + x_u\,du + \frac{1}{2}x_{uu}\,du^2 + \cdots$$

La retta $O'_1O'_2$ incontra il piano tangente a S in O nel punto Q di coordinate $X = x'_1 + \tau x'_2$ tale che $|X, x, x_u, x_v| = 0$ cioè con $\tau = -\frac{e}{b}\frac{dv^2}{du^2} + \cdots$

Sia infine T un punto qualunque della stessa retta $O'_1O'_2$ la cui posizione limite, quando O′ tende ad O su C, sia distinta da O; sicchè T avrà per coordinate $x'_1 + \tau x'_2$ con $\tau = -1 + \cdots$

Il termine principale del birapporto $(O'_1O'_2QT)$ *vale*

$$I = \frac{e}{b}\left(\frac{du}{dv}\right)^2.$$

Condizione necessaria sufficiente affinchè R *e* $\overline{R}$ *si corrispondano in una applicabilità proiettiva impropria è che sulle superficie* $S(u,v)$, $\overline{S}(u,v)$ $[S(v,w), \overline{S}(v,w), S(u,w), \overline{S}(u,w)]$ *si corrispondano le linee inviluppate dalle tracce dei piani osculatori alle linee* $w(u;v)$ *uscenti dai punti di* S *e* $\overline{S}$, *e che per esse l'invariante* I *abbia, in punti omologhi, valori eguali.*

8. Passiamo ora a definire l'*applicabilità proiettiva propria* di due reticolati R e $\overline{R}$. La definizione è analoga a quella, data al n. 4, per l'applicabilità proiettiva impropria; e, precisamente, si ottiene da questa cambiando le parole

« applicabilità proiettiva impropria » in « applicabilità proiettiva propria » e « contatto » in « contatto analitico ».

Per l'applicabilità proiettiva propria di due reticolati vale il teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinchè i reticolati* R *e* $\overline{\mathrm{R}}$ *si corrispondano in una applicabilità proiettiva propria è che i loro elementi lineari proiettivi siano uguali.*

Infatti, se R e $\overline{\mathrm{R}}$ si corrispondono in una applicabilità proiettiva propria, fissati i valori u_0, v_0, w_0, si potrà trovare una T tale che sia

$$\begin{aligned} \mathrm{T}x = \sigma\bar{x} \quad , \quad \mathrm{T}x_u &= \sigma(\bar{x}_u + \Lambda'\bar{x}) \quad , \quad \mathrm{T}x_{uu} = \sigma(\bar{x}_{uu} + 2\Lambda'\bar{x}_u + \Omega'\bar{x}) \\ \mathrm{T}x_v &= \sigma(\bar{x}_v + \Lambda''\bar{x}) \quad , \quad \mathrm{T}x_{vv} = \sigma(\bar{x}_{vv} + 2\Lambda''\bar{x}_v + \Omega''\bar{x}) \\ \mathrm{T}x_w &= \sigma(\bar{x}_w + \Lambda'''\bar{x}) \quad , \quad \mathrm{T}x_{ww} = \sigma(\bar{x}_{ww} + 2\Lambda'''\bar{x}_w + \Omega'''\bar{x}) \end{aligned}$$

e allora, come al n. 6 si concluse che, per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$, è

$$b = \bar{b} \quad , \quad g = \bar{g} \quad ; \quad c = \bar{c} \quad , \quad e = \bar{e} \quad ; \quad a = \bar{a} \quad , \quad f = \bar{f}$$

e quindi

$$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{F}}.$$

Viceversa, supponiamo che per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ valgano queste relazioni. Scelti i fattori di proporzionalità delle coordinate omogenee, com'è sempre possibile, in modo che sia

$$|x_u, x_v, x_w, x| = |\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{x}_w, \bar{x}|,$$

sarà anche

$$x_u, x_v, x_w, x| = |\bar{x}_u + \frac{1}{2}(p - \bar{p})\bar{x}, \bar{x}_v + \frac{1}{2}(q - \bar{q})\bar{x}, \bar{x}_w + \frac{1}{2}(r - \bar{r})\bar{x}, \bar{x}|$$

e quindi si potrà con una collineazione unimodulare trasformare R in un $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}}_{uu} &= \bar{p}\overline{\overline{x}}_u + \bar{g}\overline{\overline{x}}_v + \bar{b}\overline{\overline{x}}_w + \bar{h}_1\overline{\overline{x}} \quad , \quad \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad , \quad \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

tale che per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ sia: $\overline{\overline{x}} = \bar{x}$;

$$\overline{\overline{x}}_u = \bar{x}_u + \frac{1}{2}(p - \bar{p})\bar{x} \quad , \quad \overline{\overline{x}}_v = \bar{x}_v + \frac{1}{2}(q - \bar{q})\bar{x} \quad , \quad \overline{\overline{x}}_w = \bar{x}_w + \frac{1}{2}(r - \bar{r})\bar{x},$$

che si possono anche scrivere, essendo $p = \bar{\bar{p}}, q = \bar{\bar{q}}, r = \bar{\bar{r}}$,

$$\overline{\overline{x}}_u = \bar{x}_u + \frac{1}{2}(\bar{\bar{p}} - \bar{p})\bar{x} \quad , \quad \overline{\overline{x}}_v = \bar{x}_v + \frac{1}{2}(\bar{\bar{q}} - \bar{q})\bar{x} \quad , \quad \overline{\overline{x}}_w = \bar{x}_w + \frac{1}{2}(\bar{\bar{r}} - \bar{r})\bar{x}; \tag{16}$$

$\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \overline{\mathrm{F}}$ cioè $\bar{\bar{b}} = b$, $\bar{\bar{g}} = \bar{g}$; $\bar{\bar{c}} = \bar{c}$, $\bar{\bar{e}} = \bar{e}$; $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$.

Dalle (11) e (15) risulta allora

$$\bar{\bar{x}}_{uu} - \bar{x}_{uu} = (\bar{\bar{p}} - \bar{p})\bar{x}_u + \frac{1}{2}\{\bar{\bar{p}}(\bar{\bar{p}} - \bar{p}) + \bar{\bar{g}}(\bar{\bar{q}} - \bar{q}) + \bar{\bar{b}}(\bar{\bar{r}} - \bar{r}) + 2(\bar{\bar{b}}_1 - \bar{b}_1)\}\bar{x}$$

e analoghe; le quali in unione a $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ e alle (16) provano, giusta le (5″) e (6″), che le linee u, v, w di $\bar{\bar{\mathrm{R}}}$ e $\bar{\mathrm{R}}$ hanno in $\bar{\mathrm{O}}$ il richiesto contatto analitico del secondo ordine.

Per finire, osserviamo che il contatto analitico del secondo ordine lungo le linee u, v, w porta di conseguenza il contatto analitico del primo ordine lungo ogni coppia di curve omologhe, e che perciò: *condizione necessaria sufficiente affinchè due reticolati* R *e* $\bar{\mathrm{R}}$ *si corrispondano in un'applicabilità proiettiva propria è che per ogni coppia di punti omologhi* O, $\bar{\mathrm{O}}$ *esista una proiettività tale che porti* O *in* $\bar{\mathrm{O}}$ *e che le trasformate delle linee* u, v, w *di* R *uscenti da* O *abbiano in* $\bar{\mathrm{O}}$ *un contatto analitico del secondo ordine rispettivamente con le linee omologhe di* $\bar{\mathrm{R}}$.

Matematica (Analisi). — *Sulle serie di potenze di una variabile, in un'algebra.* Nota [1] di S. Cherubino, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

La condizione perchè una serie di potenze

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

con a_m e z elementi di un'algebra complessa a più unità, dotata di modulo, converga in un elemento z di assegnate radici della sua equazione minima è stata per la prima volta raggiunta dallo Spampinato [2] nello stabilire le nozioni fondamentali per una teoria delle funzioni di una variabile in una algebra.

Questa condizione fu dal Chiaro Autore conseguita nella Memoria citata [2] con procedimento molto laborioso, sì da lasciar desiderare una dimostrazione più semplice.

Una assai breve, valevole per tutte le algebre regolari, l'ho già data in una Nota recente [3]. Qui estendo la dimostrazione ora mentovata al caso generale delle algebre complesse qualunque, dotate di modulo.

Il risultato si raggiunge mercè una nota osservazione e con lieve modifica di questo stesso ragionamento. L'enunciato definitivo amplia la portata del teorema dello Spampinato, onde, anche per questo, dev'essere sottolineato [4].

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1935.
(2) « Rend. Pal. », to. 57 e to. 58, p. 31 della Memoria I.
(3) *Sulle funzioni di matrici* [« Boll. dell'Acc. Gioenia ». Catania, 1935].
(4) L'ampliamento sta nell'estendere la convergenza della serie a tutti gli elementi

1. Sia A un'algebra complessa ad $n > 1$ unità dotata di modulo u. Com'è noto [1] essa è *equivalente* a ciascuna delle due algebre formate con le matrici destre o con le trasposte delle matrici sinistre dei suoi elementi, sottoalgebre dell'algebra costituita dalla totalità delle matrici (quadrate) complesse di ordine n. In ciascuna di queste, al modulo u di A corrisponde la matrice identica I.

Fissiamo una delle due sottoalgebre predette, ad es. quella A* delle matrici destre ζ^* degli elementi ζ di A. Poichè ad u corrisponde I, all'elemento $\zeta = \alpha u$ di A corrisponde [2] l'elemento $\zeta^* = \alpha \mathrm{I}$ di A*.

Inoltre [3], l'equazione minima di ζ in A coincide con quella del corrispondente elemento ζ^* in A*, che a sua volta è l'equazione minima di ζ^* nell'algebra di tutte le matrici complesse di ordine n. L'equazione minima di $\zeta = \alpha u$ in A è dunque quella di $\zeta^* = \alpha \mathrm{I}$ in quest'algebra regolare, onde ha come sola radice (caratteristica) α.

Di qui segue senz'altro che, affinchè la serie di potenze

$$(1) \qquad \mathrm{P}_0(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m$$

con a_m e ζ elementi di A sia convergente per ogni elemento di A, le cui radici dell'equazione minima figurino fra i ρ numeri $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\rho$, è necessario che (1) converga pei ρ elementi di A

$$(2) \qquad \alpha_1 u, \alpha_2 u, \cdots, \alpha_\rho u.$$

2. Per l'equivalenza di A con A*, alla considerazione della (1) può sostituirsi quella della serie

$$(1)^* \qquad \mathrm{P}_0^*(\zeta^*) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* \cdot \zeta^{*m}$$

dove a_m^* e ζ^*, elementi di A*, sono i corrispondenti di a_m e ζ di A.

La condizione necessaria del numero precedente si muta così nella convergenza di (1)* per le ρ matrici di A*

$$(2)^* \qquad \alpha_1 \mathrm{I}, \alpha_2 \mathrm{I}, \cdots, \alpha_\rho \mathrm{I}.$$

I coefficienti a_m^*, essendo matrici di ordine n, si scrivono

$$a_m^* = \| a_m^{rs} \| \qquad r, s = 1, 2, \cdots, n$$

dell'algebra che han le radici dell'equazione minima *comprese fra* (anzichè *coincidenti con*) i ρ numeri complessi assegnati $\alpha_1, \cdots, \alpha_\rho$.

(1) G. Scorza, *Corpi numerici ed algebre.* [Messina, Principato (1921)], p. II, cap. V, n. 192 *b*), p. 295.

(2) *Ibidem*, n. 186, p. 290.

(3) *Ibidem*, n. 208, p. 312.

onde la convergenza di (1)* per le ρ matrici (2)* non è che quella delle n^2 serie

$$(3) \qquad f_{rs}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{r,s} t^m \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n)$$

della variabile complessa t, nei ρ punti $t = \alpha_1, t = \alpha_2, \cdots, t = \alpha_\rho$ del piano complesso.

È questa la condizione che bisognerà supporre verificata per esaminarne la sufficienza.

3. Indichiamo con

$$(4) \qquad f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$$

una arbitraria delle n^2 serie (3) della variabile complessa t e consideriamo una qualunque matrice ζ^* appartenente ad A* ed avente come radici caratteristiche (cioè della sua equazione minima) tutti o parte dei numeri $\alpha_1, \cdots, \alpha_\rho$.

Fissata ζ^* esiste sempre qualche matrice x, dello stesso ordine n e non degenere, appartenente o no ad A*, per la quale si ha

$$(5) \qquad x^{-1} \cdot \zeta^* \cdot x = D + J = C$$

essendo D una matrice diagonale e J una matrice avente nulli tutti gli elementi meno certi $r \leqq n - 1$, della prima parallela di destra alla diagonale principale, che sono eguali ad uno.

Questa J è pseudonulla [1] di un certo rango $p \leqq r + 1 \leqq n$, cosicchè si ha

$$(6) \qquad J^{p+h} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots)$$

e perciò può porsi

$$(7) \qquad C^m = \sum_{h=0}^{p-1} \binom{m}{l} D^{m-l} J^l \quad , \quad \binom{m}{l} = 0 \quad \text{per} \quad l > m .$$

Dopo di che, la serie *scalare* di potenze della matrice C

$$(8) \qquad p_0(C) = b_0 + b_1 C + b_2 C^2 + \cdots + b_m C^m + \cdots$$

si scrive

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_0(C) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{l=0}^{p-1} \binom{m}{l} D^{m-l} J^l \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} J^l \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{l} b_m D^{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} \frac{I}{l!} f^{(l)}(D) \cdot J^l . \end{aligned} \right.$$

(1) Cfr. S. Cherubino, *Sul rango delle matrici pseudonulle.* [« Boll. U. M. I. », 1935].

In quest'ultima relazione abbiam posto

$$(10) \qquad \frac{1}{l!} f^{(l)}(D) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{l} b_m D^{m-l} \qquad l = 0, 1, \cdots, p-1$$

mentre si ha

$$(11) \qquad \frac{1}{l!} f^{(l)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{l} b_m t^{m-l} \qquad l = 0, 1, \cdots, p-1$$

$f^{(l)}(t)$ essendo la derivata l^{ma} della funzione $f(t)$ definita dalla (4).

È manifesto che la convergenza della (8) equivale a quella delle p serie (10) e che queste, a lor volta, convergono allora e solo che le (11) convergono per t eguale agli elementi della diagonale principale di D, cioè alle radici caratteristiche di z^*.

Se dette radici sono *interne* al cerchio di convergenza di $f(t)$, in esse convergono anche tutte le (11), quindi converge la (8). Ma se qualcuna di queste radici, ad es. α_i, è sulla circonferenza del cerchio di convergenza di $f(t)$, la convergenza di tutte le (11), per $t = \alpha_i$, non segue necessariamente da quella di $f(t)$, onde occorre assicurarsi della convergenza delle p serie (11), per il che basta verificare quella della sola ultima, cioè la convergenza della derivata $(p-1)$-ma di $f(t)$.

4. Dalla convergenza della (8), poichè può scriversi

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{*m} = x \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} b_m C^m \right\} x^{-1},$$

segue senz'altro quella del primo membro di quest'eguaglianza, cioè la congruenza di tutte le serie

$$(12) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{r,s} \cdot z^{*m} \qquad r, s = 1, 2, \cdots, n.$$

Se ora si indicano con $u_{r,s}$ le matrici aventi tutti gli elementi nulli meno quello di posto r, s, che è uno [1], si ha

$$(13) \qquad a_m^* = \sum_{rs}^{1 \cdots n} a_m^{r,s} \cdot u_{rs}$$

onde, moltiplicando le n^2 serie (12), tutte a sinistra o tutte a destra, per u_{rs} e sommando si ha

$$(14)^* \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* z^{*m} \quad , \quad \sum_{m=0}^{\infty} z^{*m} \cdot a_m^*$$

(1) Le u_{rs} costituiscono un gruppo di unità dell'algebra, di ordine n^2, di tutte le matrici complesse di ordine n.

e queste 2 serie di potenze, la prima a sinistra la seconda a destra, della matrice z^* riescono entrambe convergenti.

Convergono perciò anche, nell'algebra A, le due serie di potenze

$$(14) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \quad , \quad \sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot a_m .$$

La convergenza di queste (14) [1], per $z = \alpha_1 u , \cdots , z = \alpha_\varrho u$ è dunque non solo necessaria ma anche sufficiente perchè convergano entrambe le (14) in ogni elemento z di A avente le radici dell'equazione minima fra i numeri $\alpha_1 , \cdots , \alpha_\varrho$ *purchè* questi numeri capitino tutti all'interno del cerchio di convergenza di ciascuna delle serie (12).

5. Il procedimento esposto al numero precedente deriva da uno, analogo, di C. C. Mac Duffee [2] nel quale si tien conto anche delle molteplicità delle radici per la equazione caratteristica di z^* (non per la equazione minima). Se α_i è una di queste radici e ν_i è la corrispondente molteplicità e se inoltre α_i giace sulla circonferenza del cerchio di convergenza di $f(t)$, le serie (11) che devon convergere per $t = \alpha_i$ son soltanto le prime ν_i, onde basta che converga la derivata $(\nu_i - 1)$-*ma* di $f(t)$.

Basta invero osservare che, se $\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_\varrho$ son le radici *caratteristiche* di z^*, C è somma diretta di ϱ matrici $C_1 , C_2 , \cdots , C_\varrho$ di ordine $\nu_1 , \nu_2 , \cdots , \nu_\varrho$, che $C_i = \alpha_i I_i + J_i$ con I_i matrice identica di ordine ν_i e J_i pseudonulla di rango ν_i e che $f(C)$ risulta somma diretta di

$$f(C_1) , \cdots , f(C_\varrho) .$$

Per ogni radice α_i che giaccia sulla circonferenza del cerchio di convergenza di qualcuna delle serie (3) occorre dunque considerare la massima molteplicità di α_i, diciamola μ_i, per le equazioni caratteristiche degli elementi di A* aventi le radici dell'equazione minima in $\alpha_1 \cdots \alpha_\varrho$, ed assicurarsi della convergenza, per $t = \alpha_i$, della derivata $(\mu_i - 1)$-*ma* di quella o quelle serie (3).

In definitiva, possiamo enunciare che:

Affinchè (una, quindi) entrambe le serie di potenze

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \quad , \quad \sum_{m=0}^{\infty} z^m a_m ,$$

con a_m e z elementi dell'algebra complessa A *di ordine $n > 1$ e dotata di modulo u, sian convergenti per tutti gli elementi z le cui radici dell'equa-*

(1) Basta anzi considerarne una sola poichè, passando da queste alle (14)*, la convergenza di una qualunque delle due per $z^* = C$ equivale sempre a quella di tutte le (12) per t radice caratteristica di z^*, ossia dell'equazione minima di z.

(2) *The theory of matrix.* [Berlin, Springer (1933)], p. 98.

zione minima coincidono con tutti o parte di ρ *numeri complessi assegnati* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ *occorre e basta che le serie stesse convergano nei* ρ *elementi* $z = \alpha_i u \ (i = 1, 2, \cdots, \rho)$ *di* A.

La convergenza può aver luogo anche quando qualche radice, ad es. α_i, *capiti sulla circonferenza del cerchio di convergenza di qualcuna delle serie* $f_{rs}(t)$ *assegnate dalle* (3). *In tal caso, detta* μ_i *la massima molteplicità di* α_i *per le equazioni caratteristiche delle matrici destre (o sinistre) degli elementi di* A *le cui radici dell'equazione minima sono nel gruppo* $\alpha_1, \cdots, \alpha_\varrho$, *occorre e basta assicurarsi che converga per* $t = \alpha_i$ *la derivata* $(\mu_i - 1)$*–ma di quella (o quelle) serie* $f_{rs}(t)$.

Matematica. — *Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali.* Nota [1] di T. Boggio, presentata dal Socio C. Somigliana.

Il prof. Sobrero ha dimostrato, in una Nota recente, un teorema relativo a certi sistemi di equazioni differenziali, che egli aveva già esposto in una seduta della riunione di Napoli (ottobre 1934) della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (alla quale non potei intervenire) e, successivamente, in una conferenza al « Seminario matematico » della R. Università di Roma.

In questa Nota faccio vedere come il teorema del prof. Sobrero sia una conseguenza immediata di un risultato che ho dimostrato in una mia Nota del 1902 e poi in una Memoria del 1903 (citata dal prof. Sobrero), e inoltre come il teorema in questione sia esplicitamente stabilito anche in un'altra mia Nota del 1909 (che è sfuggita al prof. Sobrero).

In seguito, a proposito di certe equazioni differenziali studiate di recente dal prof. Ghermanesco, faccio osservare che già una trentina di anni fa, io mi sono occupato di questioni consimili, anzi assai più complesse di quelle esaminate dal Ghermanesco, le quali richiedono solo la conoscenza della ordinaria funzione di Green, mentre quelle da me studiate richiedono la determinazione della funzione m–armonica di Green.

1. Siano A e B due operatori differenziali lineari, in due variabili indipendenti x, y, con coefficienti costanti, cioè degli operatori del tipo:

$$(1) \qquad A = \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} \quad , \quad B = \sum_{r,s} b_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s},$$

ove i coefficienti a_{rs} e b_{rs} sono costanti, e le $\sum_{r,s}$ si intendono estese a tutte quelle coppie di valori interi, positivi o nulli, di r, s per i quali la somma $r + s$ non supera m per l'operatore A, e non supera n per l'operatore B.

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1935.

Fra tali coppie vi è pure la coppia $r = s = 0$, nel qual caso i termini corrispondenti degli operatori A e B si riducono semplicemente ad a_{00} e b_{00}.

Ciò premesso, se si suppongono gli operatori A e B *primi fra loro* (cioè non aventi fattori comuni), se $v(x, y)$ è una funzione data delle variabili x, y, affinchè esista una funzione $\varphi(x, y)$ che verifichi le due equazioni differenziali lineari, degli ordini m ed n:

$$A\varphi = 0 \quad , \quad B\varphi = v , \tag{2}$$

è necessario e sufficiente che la funzione data v verifichi l'equazione [che può chiamarsi *condizione di compatibilità* delle (2)]:

$$Av = 0 . \tag{3}$$

Questo teorema generale si trova dimostrato in una mia Nota del 1902 e poi in una Memoria del 1903 [1], ove ne ho anche fatto l'applicazione all'integrazione di vari tipi di equazioni differenziali.

2. Se invece del sistema (2) si considera il sistema, apparentemente più generale,

$$A\varphi = u \quad , \quad B\varphi = v , \tag{4}$$

ove u, v sono date funzioni di x, y si trova che per l'esistenza di una funzione φ, che verifichi le (4), è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione di compatibilità espressa da:

$$Av = Bu . \tag{5}$$

Questa proprietà è stata stabilita in una Nota recentissima del prof. Sobrero [2].

Ma è importante mostrare che il sistema (4) si può subito ricondurre al sistema (2), cioè, in altre parole, *la condizione* (5) *è immediata conseguenza della* (3).

Infatti, sia φ' una funzione che soddisfa all'equazione:

$$A\varphi' = u , \tag{6}$$

allora, ricordando la prima delle (4) ne segue:

$$A(\varphi - \varphi') = 0 ,$$

(1) Boggio, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali.* (« Rendiconti R. Accademia dei Lincei », ser. 5ª, vol. XI, 1° sem. 1902); Boggio, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.* (« Annali di Matematica », ser. III, to. VIII, 1903).

(2) Sobrero, *Un teorema relativo ai sistemi differenziali.* (« Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 6ª, vol. XXI, marzo 1935).

e se si pone:

$$\psi = \varphi - \varphi', \tag{7}$$

si ha:

$$A\psi = 0, \tag{8}$$

inoltre $B\psi = B\varphi - B\varphi'$, od ancora, per la seconda delle (4):

$$B\psi = v - B\varphi'. \tag{9}$$

La funzione ψ soddisfa pertanto al sistema (8), (9), che è del tipo (2).

La condizione di compatibilità (3), ci fornisce l'analoga condizione, che è espressa, per la (9), da:

$$A(v - B\varphi') = 0, \qquad \text{ossia} \qquad Av = AB\varphi',$$

ma $AB\varphi' = BA\varphi' = Bu$, in virtù della (6), perciò si ha:

$$Av = Bu,$$

che è precisamente la (5); c. v. d.

Una volta ottenuta la funzione ψ, la (7) ci dà poi la funzione φ che soddisfa alle (4).

È anche utile aggiungere che in una Nota del 1909 [1] ho dato un'altra dimostrazione del mio teorema del 1902, e che la condizione (3) vi è stabilita nel caso in cui gli operatori A e B, e la funzione data v, contengono un numero qualunque di variabili indipendenti.

In questa Nota ho pure dato la condizione di compatibilità (5), per sistemi differenziali del tipo (4).

3. Indichiamo con C un altro operatore differenziale del tipo (1), cioè:

$$C = \sum_{r,s} c_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s},$$

ed essendo u, v, w date funzioni di x, y, cerchiamo in quale caso esiste una funzione $\varphi(x, y)$ tale da soddisfare alle equazioni differenziali:

$$A\varphi = u \quad , \quad B\varphi = v \quad , \quad C\varphi = w. \tag{10}$$

Si vede subito che è *necessario* che siano soddisfatte le condizioni di compatibilità:

$$\begin{cases} Av = Bu, \\ Bw = Cv, \\ Cu = Aw. \end{cases} \tag{11}$$

(1) Boggio, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali.* (« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 1909, to. LXVIII, par. 2ª).

Infatti, dalle prime due delle (10) si ha:

$$BA\varphi = Bu \quad , \quad AB\varphi = Av ,$$

e poichè i primi membri sono eguali, ne segue la prima delle (11); analogamente per le altre due.

Il sistema (10) può ridursi a una forma assai più semplice.

Sia φ' una funzione che verifichi le due equazioni:

$$A\varphi' = u \quad , \quad B\varphi' = v ;$$

tale funzione esiste, in virtù di quanto si è detto nel numero precedente, supposto che A e B siano primi fra loro, perchè è soddisfatta la prima delle (11).

Di qui, e dalle (10), segue:

$$A(\varphi - \varphi') = 0 \quad , \quad B(\varphi - \varphi') = 0 \quad , \quad C(\varphi - \varphi') = w - C\varphi',$$

e ponendo:

$$\psi = \varphi - \varphi' \quad , \quad w' = w - C\varphi',$$

si ha il sistema:

$$(12) \qquad A\psi = 0 \quad , \quad B\psi = 0 \quad , \quad C\psi = w'.$$

Le condizioni necessarie (11) si riducono ora alle seguenti:

$$(13) \qquad Aw' = 0 \quad , \quad Bw' = 0 .$$

Queste condizioni [e quindi anche le (11)] sono indubbiamente, in generale, anche *sufficienti* [1]. E ciò si può dedurre dalle formule stabilite nella mia Nota del 1909 per lo studio del sistema (2).

4. In una Nota di due anni fa il prof. Ghermanesco [2], dopo avere affermato che il metodo delle approssimazioni successive di Picard (o meglio di Peano–Picard) è stato generalizzato a varie equazioni differenziali, ma sempre di secondo ordine, passa alla determinazione, in un'area circolare, della funzione u che soddisfa all'equazione

$$\Delta_{2m} u = f\left(x , y , u , \frac{\partial u}{\partial x} , \frac{\partial u}{\partial y} , \cdots , \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial y^{2m-1}}\right),$$

(1) Oltre alla condizione, già posta, che A , B siano primi fra loro, occorre l'analoga, che anche A e C siano primi fra loro, e inoltre che gli operatori A , B , C , considerati come polinomi in $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$, abbiamo i risultanti (rispetto a $\partial/\partial x$) fra A e B, e fra A e C primi fra loro.

(2) GHERMANESCO, *Sur l'analyticité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles, non linéaire.* (« Rendiconti R. Accademia Lincei », ser. 6ª, vol. XVII, 1º sem. 1933).

(essendo Δ_2 il solito operatore di Laplace) supposto che sul contorno del cerchio siano noti i valori di u, $\Delta_2 u$, $\Delta_4 u$, $\cdots$ $\Delta_{2m-2} u$.

Egli determina la funzione u (che richiede solo la conoscenza dell'ordinaria funzione di Green per il cerchio), col metodo delle approssimazioni successive, per un cerchio sufficientemente piccolo.

Ora vorrei qui fare osservare che la riportata affermazione di Ghermanesco non è esatta, perchè in una mia Memoria di circa trenta anni fa [1], ho precisamente studiato l'integrazione dell'equazione:

$$\Delta_{2m} u = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial y^{2m-2}}\right), \tag{14}$$

in un'area piana semplicemente connessa, quando sul contorno si conoscono i valori della funzione u e delle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini.

Questa questione è assai più complicata di quella trattata dal Ghermanesco, perchè richiede la determinazione della funzione m–armonica di Green.

Anch'io ho adoperato il metodo delle approssimazioni successive, che conduce alla soluzione se l'area è sufficientemente piccola.

Nella mia Memoria ho pure risolto questioni analoghe per una sfera.

Questo mio lavoro, evidentemente, è sfuggito al prof. Ghermanesco.

Mi sia infine consentita un'ultima osservazione. L'integrazione dell'equazione (14) è pure stata studiata recentemente da A Rosenblatt [2], il quale ha ottenuto – egli dice – delle condizioni più convenienti di quelle da me poste nella mia Memoria citata.

Nel corso dei calcoli egli ha adoperato (come pure avevo fatto io) la funzione m–armonica di Green per il cerchio, funzione che egli attribuisce a Lauricella; ora ciò non corrisponde al vero, perchè il Lauricella ha determinato soltanto la funzione biarmonica di Green. La funzione m–armonica (anche per n variabili) si trova determinata in un'altra mia Memoria [3], ove ne ho fatto lo studio approfondito, appunto in vista dell'integrazione dell'equazione (14), e dell'analoga per il caso di una sfera.

(1) Boggio, *Risoluzione del problema dei valori al contorno per alcune classi di equazioni alle derivate parziali.* («Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», to. XXI, 1906).

(2) Rosenblatt, *Sur les équations m–harmoniques non linéaires à deux variables indépendantes.* («Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», 1e sém. 1934).

(3) Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m.* («Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», to. XX, 1905).

Matematica. — *Sur l'intégration des substitutions linéaires.* Nota [1] di B. Hostinský, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Soit u une quantité qui varie entre s et t $(s < u < t)$, $\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ et considérons le système d'équations intégrales

$$\Phi_{ik}(s,t) = \varepsilon_{ik} + \int_s^t \left[\sum_1^r a_{ij}(u)\, \Phi_{jk}(s,u) \right] du \qquad (1)$$

où $a_{ik}(u)$ $(i,k = 1,2,\cdots,r)$ sont fonctions données bornées et intégrables, et $\Phi_{ik}(s,t)$ fonctions inconnues qui satisfont aux conditions $\Phi_{ik}(u,u) = \varepsilon_{ik}$ $(i,k = 1,2,\cdots,r)$.

Pour obtenir la solution du système (1) supposons d'abord que t soit infiniment voisin de s; les valeurs de $\Phi_{ik}(s,t)$ où k est fixe et où $i = 1,2,\cdots,r$ s'obtiennent alors en appliquant aux quantités $\Phi_{ik}(s,s)$ $(i = 1,2,\cdots,r)$ une substitution linéaire infinitésimale. Les valeurs de $\Phi_{ik}(s,t)$ pour t quelconque s'obtiennent en opérant une suite infinie de transformations infinitésimales appliquées successivement; $\Phi_{ik}(s,t)$ sont les éléments de la substitution nommée par Volterra [2] *intégrale gauche* de la substitution dont les éléments sont $a_{ik}(u)$. Les fonctions $\Phi_{ik}(s,t)$ s'expriment au moyen de la série infinie suivante:

$$\Phi_{ik}(s,t) = \varepsilon_{ik} + \int_s^t a_{ik}(u)\, du + \qquad (2)$$

$$+ \sum_2^\infty {}^n \int_s^t \int_s^{u_n} \cdots \int_s^{u_2} \sum_1' {}^\alpha \sum_1' {}^\beta \cdots \sum_1' {}^\lambda a_{i\alpha}(u_n)\, a_{\alpha\beta}(u_{n-1}) \cdots a_{\lambda k}(u_1)\, du_1\, du_2 \cdots du_n .$$

Ici $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ sont $n-1$ indices de sommation. Désignons par D_n le domaine d'intégration par rapport aux variables $u_2, u_2, \cdots, u_n$ dans la dernière intégrale; il est défini par le inégalités $s < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < t$.

Substituons le second membre de (2) à la place de Φ_{ik} dans les équations (1); nous vérifions alors qu'elles sont satisfaites.

2. Pour obtenir la valeur de $\Phi_{ik}(t,s)$ (en supposant toujours $s < t$) il faut échanger s avec t dans toutes les formules précédentes. Nous avons ainsi

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1935.

(2) V. Volterra, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* (« Memorie della Società italiana delle Scienze », ser. 3ª, to. VI, n. 8, 1887).

$$(2') \qquad \Phi_{ik}(t,s) = \varepsilon_{ik} - \int_s^t a_{ik}(u)\,du +$$

$$+ \sum_2^\infty{}^n (-1)^n \int_s^t \int_{u_n}^t \cdots \int_{u_2}^t \left[\sum_1^r{}^\alpha \sum_1^r{}^\beta \cdots \sum_1^r{}^\lambda a_{i\alpha}(u_n)\, a_{\alpha\beta}(u_{n-1}) \cdots a_{\lambda k}(u_1) \right] du_1\, du_2 \cdots du_n$$

ou bien, en écrivant u_i au lieu de u_{n-i+1}

$$(2\,bis) \qquad \Phi_{ik}(t,s) = \varepsilon_{ik} - \int_s^t a_{ik}(u)\,du +$$

$$+ \sum_2^n{}^n (-1)^n \int_s^t \int_{u_1}^t \cdots \int_{u_{n-1}}^t \left[\sum_1^r{}^\alpha \sum_1^r{}^\beta \cdots \sum_1^r{}^\lambda a_{i\alpha}(u_1)\, a_{\alpha\beta}(u_2) \cdots a_{\lambda k}(u_n) \right] du_1\, du_2 \cdots du_n .$$

Le domaine d'intégration E_n relatif à l'intégrale n–uple dans la formule (2′) est defini par $s < u_n < u_{n-1} < \cdots < u_1 < t$ tandis que ce lui relatif à l'intégrale n–uple dans (2 *bis*) n'est autre chose que D_n.

3. Le système d'équations intégrales

$$\varphi_{ik}(s,t) = \varepsilon_{ik} + \int_s^t \left[\sum_1^r{}^j \varphi_{ij}(s,u)\, a_{jk}(u,t) \right] du$$

avec les conditions $\varphi_{ik}(u,u) = \varepsilon_{ik}$ admet la solution

$$(3) \qquad \varphi_{ik}(s,t) = \varepsilon_{ik} + \int_s^t a_{ik}(u)\,du +$$

$$+ \sum_2^\infty{}^m \int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{m-1}} \left[\sum_1^r{}^\mu \sum_1^r{}^\nu \cdots \sum_1^r{}^\omega a_{i\mu}(u_1)\, a_{\mu\nu}(u_2) \cdots a_{\omega k}(u_m) \right] du_1\, du_2 \cdots du_m ;$$

$\mu, \nu \cdots \omega$ sont $(m-1)$ indices de sommation et d'intégration relatif à l'intégrale m–uple précédente n'est autre chose que E_m. Les fonctions $\varphi_{ik}(s,t)$ $(i,k = 1,2 \cdots r)$ sont les éléments de la substitution nommée *intégrale droite* (voir Volterra, loc. cit.) de la substitution aux éléments $a_{ik}(u)$.

4. Les formules (2 *bis*) et (3) montrent que

$$(4) \qquad \Phi_{ik}(t,s) = \overline{\varphi}_{ik}(s,t)$$

où $\overline{\varphi}_{ik}(s,t)$ désigne l'élément de l'intégrale droite de la substitution dont les éléments sont $-a_{ik}(u)$.

5. Les fonctions $\Phi_{ik}(s,t)$ et $\varphi_{ik}(s,t)$ satisfont aux équations suivantes :

$$(5)\quad \Phi_{ih}(s,t) = \sum_{1}^{r^j} \Phi_{ij}(u,t)\Phi_{jh}(s,u) \quad , \quad \varphi_{ik}(s,t) = \sum_{1}^{r^j} \varphi_{ij}(s,u)\varphi_{jk}(u,t).$$

Pour démontrer, par exemple, la première équation (5), supposons d'abord que l'on ait $s < u < t$. En posant

$$\Psi_{ik}(s,t) = \Phi_{ik}(s,t) - \varepsilon_{ik}$$

on trouve que la première équation (5) est équivalente à

$$(5\,bis)\quad \Psi_{ik}(s,t) = \Psi_{ik}(s,u) + \Psi_{ik}(u,t) + \sum_{1}^{r^j} \Psi_{ij}(u,t)\,\Psi_{jk}(s,u).$$

Pour montrer que le premier membre de $(5\,bis)$ est égal au second employons le procédé suivant : Multiplions la série infinie qui donne $\Psi_{ij}(u,t) = \Phi_{ij}(u,t) - \varepsilon_{ij}$ (formule (2)) avec celle qui donne $\Psi_{ik}(s,u)$ et faisons la somme par rapport à j ; l'ensemble de termes ainsi obtenus et qui sont de degré N par rapport aux quantités $a_{pq}(u)$ est égal à une intégrale N-uple. Ajoutons encore les deux premiers termes du second membre de $(5\,bis)$; l'ensemble de tous les termes qui figurent au premier membre de $(5\,bis)$ et qui sont du N$^{\text{ième}}$ degré en $a_{pq}(u)$ sera une intégrale N–uple avec le domaine d'integration égal à

$$\sum_{0}^{N^n} D(n,N) = D_N$$

où $D(n,N)$ réprésente le domaine défini par les inégalités

$$s < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u \quad , \quad u < u_{n+1} < u_{n+2} < \cdots < u_N < t.$$

Il résulte de cela que le premier membre de $(5\,bis)$ est égal au second et par conséquent que la première équation (5) est exacte.

6. Supposons maintenant que l'on ait $s = t$. Les équations (5) se réduisent alors à

$$(6)\quad \sum_{1}^{r^j} \Phi_{ij}(u,t)\Phi_{jk}(t,u) = \varepsilon_{ik} \quad , \quad \sum_{1}^{r^j} \varphi_{ij}(t,u)\varphi_{jk}(u,t) = \varepsilon_{ik}.$$

Pour démontrer, par exemple, la première équation (6), il suffit de démontrer la suivante qui lui est équivalente

$$(7)\qquad \Psi_{ik}(u,t) + \Psi_{ik}(t,u) + \sum_{1}^{r^j} \Psi_{ij}(u,t)\,\Psi_{jk}(t,u) = 0$$

u et t étant deux valeurs arbitraires. Or si l'on exprime $\Psi_{ik}(u, t)$ et $\Psi_{ik}(t, u)$ (pour $u < t$) par des séries qui ont respectivement la forme (2) et (2'), on trouve que, dans le premier membre de (7), l'ensemble des termes qui sont de degré N par rapport aux $a_{pq}(u)$ est égal à une intégrale N-uple avec le domaine d'intégration exprimé par la formule

$$(8) \qquad \sum_{0}^{N}{}^{n} \mathrm{E}(n, \mathrm{N}) \cdot (-1)^n$$

où $\mathrm{E}(n, \mathrm{N})$ réprésente le domaine

$$s < u_1 < u_2 < \cdots < u_n \quad , \quad s < u_{\mathrm{N}} < u_{\mathrm{N}-1} < \cdots < u_{n+1} < t .$$

Il faut réunir les domaines $\mathrm{E}(n, \mathrm{N})$ qui correspondent à n pair et d'en retrancher le domaine qui résulte par la réunion de ceux qui correspondent à n impair; on trouve que le domaine total (8) ainsi obtenu est égal à zéro ce qui donne la démonstration de (7) et de la première équation (6).

Il résulte de cela et de ce que nous avons dit au n. 5 que les équations (5) sont valables pour des valeurs quelconques de s, u et t.

7. Pour avoir une limite supérieure de la différence de l'intégrale $\Phi_{ik}(s, t)$ et de l'intégrale $\Phi'_{ik}(s, t)$ d'une autre substitution aux éléments $a'_{ik}(u)$ supposons que

$$a'_{ik}(u) - a_{ik}(u) = b_{ik}(u) \quad , \quad |a_{ik}(u)| < a \quad , \quad |b_{ik}(u)| < b .$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (2) est plus petit en valeur absolue que $r^{n-1} a^n \dfrac{(t-s)^n}{n!}$, par conséquent

$$|\Phi'_{ik}(s, t) - \Phi_{ik}(s, t)| < b(t-s) + \sum_{2}^{\infty}{}^{n} [(a+b)^n - a^n] r^{n-1} \frac{(t-s)^n}{n!}$$

ou

$$(9) \qquad |\Phi'_{ik}(s, t) - \Phi_{ik}(s, t)| < \frac{1}{r} e^{a(t-s)} [e^{b(t-s)} - 1] .$$

8. La relation (4) entre l'intégrale gauche et entre l'intégrale droite, les relations équivalentes à (5), les formules (6) qui montrent que l'intégrale d'une substitution entre les limites t et u donne la substitution inverse de celle que l'on obtient en intégrant de u à t, ainsi qu'une inégalité voisine de (9) ont été données (pour $r = 2$) dans le travail cité de Volterra. Volterra n'emploie pas les séries infinies que je donne ici; l'emploi de ces

séries est utile surtout dans la recherche des transformations fonctionnelles linéaires qui s'obtiennent en faisant croître indéfiniment le nombre r de variables.

9. Dans le cas particulier où le second membre de (1) est dérivable par rapport à t le système d'équations (1) est équivalent au système différentiel

$$\frac{d\Phi_{ik}}{dt} = \sum_1^r a_{ij}(t)\,\Phi_{ik}(s,t), \qquad i = 1, 2 \cdots r.$$

Les fonctions $\Phi_{ik}(s,t)$ $(i = 1, 2 \cdots r)$ forment la $k^{\text{ième}}$ solution de ce système différentiel; en prenant successivement $k = 1, 2 \cdots r$ on obtient le système fondamental d'intégrales qui satisfait aux conditions initiales $\Phi_{ik}(s,s) = \varepsilon_{ik}$.

Matematica (Geometria). — *Sulla deformabilità proiettiva delle congruenze rettilinee.* Nota [1] di A. Terracini, presentata dal Socio G. Fubini.

1. Ben poco è noto relativamente all'applicabilità proiettiva di due congruenze rettilinee. In sostanza il solo risultato generale che si possiede è quello, indicato dal Cartan, secondo il quale le congruenze che sono proiettivamente deformabili, pur non essendo le più generali congruenze, hanno tuttavia un grado di generalità assai elevato, in quanto dipendono da una funzione arbitraria di due variabili. Ma come si puo giudicare se una congruenza assegnata è proiettivamente deformabile o no? Le condizioni di applicabilità proiettiva quali si trovano nella *Geometria proiettiva differenziale* di Fubini e Čech riescono praticamente di poco uso: esse, se si assumono, p. es., nella forma ivi assegnata nel cap. XI, § 103 E) oppure G), consistono nella possibilità della coesistenza di due equazioni alle derivate parziali in una funzione incognita, nelle quali intervengono però ulteriormente elementi relativi a *entrambe* le congruenze delle quali si tratta di constatare l'applicabilità proiettiva. Chi volesse ottenere le condizioni di deformabilità di una data congruenza appoggiandosi, p. es., sulle formole del § 103 G) dovrebbe aggiungere alle due equazioni a cui ora si è accennato le condizioni di integrabilità relative a una falda focale non solo per la prima congruenza (supposta data, e quindi tale da rendere già soddisfatte tali condizioni di integrabilità), ma anche per la seconda congruenza, incognita; e allora le condizioni di deformabilità verrebbero a presentarsi sotto un aspetto analitico complessivamente assai complicato.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 agosto 1935.

Qui vorrei indicare una condizione per la deformabilità proiettiva di una data congruenza Γ, che si presenta assai più semplice; essa consiste nella compatibilità di due equazioni alle derivate parziali in una funzione incognita, dove però non entrano in gioco se non funzioni inerenti alla congruenza stessa di cui si tratta di studiare la deformabilità. Certamente, se si volesse fare l'ulteriore passo di eliminare da quelle due equazioni la funzione incognita, si andrebbe ancora incontro a una notevole complicazione di calcoli. Pare tuttavia che la semplificazione ottenuta sia già considerevole: inoltre, anche senza eseguire quella eliminazione, la condizione potrà già riuscire utile nella forma qui assegnata.

2. Per giungere a quel risultato, ci serviremo della rappresentazione analitica delle congruenze adoperata da Wilczynski [1], vale a dire riferiremo la congruenza Γ ai parametri delle sviluppabili, supposte distinte. Se allora i due punti $y(u, v)$ e $z(u, v)$ descrivono le due falde focali, la congruenza è rappresentata, a meno di un'omografia, dal sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} y_u = mz \quad , \quad z_v = ny , \\ y_{vv} = ay + bz + cy_v + dz_u , \\ z_{uu} = \alpha y + \beta z + \gamma y_v + \delta z_u , \end{cases}$$

dove $m, n, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono funzioni dei due parametri u, v, le quali soddisfano alle seguenti condizioni di integrabilità

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha d = 2 m_v n + m n_v - a_u - c mn \quad , \quad c_u = mn - \gamma d , \\ b\gamma = 2 mn_u + n m_u - \beta_v - \delta mn \quad , \quad \delta_v = mn - \gamma d , \\ \beta d = m_{vv} - b_u - am - cm_v \quad , \quad d_u + d\delta + b = 0 , \\ a\gamma = n_{uu} - \alpha_v - \beta n - \delta n_u \quad , \quad \gamma_v + c\gamma + \alpha = 0 . \end{cases}$$

Esse permettono di introdurre una funzione $\lambda(u, v)$ tale che

$$(3)\qquad c = \lambda_v \quad , \quad \delta = \lambda_u$$

e allora

$$(4)\qquad \lambda_{uv} = mn - \gamma d .$$

Ci limitiamo qui al caso *generale* di una congruenza che *non* sia W. Allora $mn - d\gamma \neq 0$, e il sistema (2) si può scrivere in modo equivalente sotto la forma seguente, dove le (8) esprimono a, b, α, β in funzione

(1) *Sur la théorie générale des congruences.* « Mém. de l'Ac. Roy. de Belgique » (2), III, 1911.

di m, n, d, γ, λ (le c, δ sono già date dalle (3)), mentre le (9), (10) insieme alla (4) legano m, n, d, γ, λ. Precisamente posto

$$r = mn - \gamma d , \tag{5}$$

$$\Phi = m_{vv} + d_{uu} + d_u \lambda_u - m_v \lambda_v + d\lambda_{uu} , \tag{6}$$

$$\Psi = n_{uu} + \gamma_{vv} - n_u \lambda_u + \gamma_v \lambda_v + \gamma \lambda_{vv} , \tag{7}$$

si ha

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\Phi - d\Psi}{r} , & \beta = \dfrac{-\gamma\Phi + m\Psi}{r} , \\ \alpha = -\gamma_v - \gamma\lambda_v , & b = -d_u - d\lambda_u , \end{cases} \tag{8}$$

mentre

$$\left(\frac{n\Phi - d\Psi}{r}\right)_u + r\lambda_v - \gamma_v d - 2 m_v n - m n_v = 0 , \tag{9}$$

$$\left(\frac{-\gamma\Phi + m\Psi}{r}\right)_v + r\lambda_u - \gamma d_u - 2 m n_u - m_u n = 0 . \tag{10}$$

3. D'altro lato, anche se $r = 0$, cioè anche se la congruenza è W, la falda (y), p. es., risulta integrale del sistema

$$\begin{cases} y_{uv} = \dfrac{m_v}{m} y_u + mny , \\ y_{vv} = \dfrac{d}{m} y_{uu} + \left(\dfrac{b}{m} - d\,\dfrac{m_u}{m^2}\right) y_u + c y_v + a y ; \end{cases}$$

cosicchè per l'elemento lineare proiettivo della congruenza Γ se ne trae [1] l'espressione

$$\Theta = \frac{(m\,du^2 + d\,dv^2)(\gamma\,du^2 + n\,dv^2)}{4\,du\,dv} . \tag{11}$$

Perciò, se insieme con la congruenza Γ finora considerata se ne introduce una seconda Γ', con notazioni analoghe (per la quale si adottano lettere accentate), le condizioni necessarie e sufficienti per l'applicabilità proiettiva di Γ e Γ', quali sono offerte dalla forma (11) dei loro elementi lineari proiettivi, sono evidentemente

$$m'\gamma' = m\gamma \quad , \quad d'n' = dn \quad , \quad m'n' + d'\gamma' = mn + d\gamma . \tag{12}$$

Le (12) permettono di concludere subito l'esistenza di una funzione $\rho(u, v)$ tale che

(1) Confrontando con la formola (7) della mia Memoria *Su alcuni elementi lineari proiettivi*. « Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », ser. II, vol. II, 1933.

$$(13) \qquad m' = \rho m \quad , \quad d' = \rho d \quad , \quad n' = \frac{n}{\rho} \quad , \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\rho} \, ,$$

oppure

$$(14) \qquad m' = \rho\gamma \quad , \quad d' = \rho n \quad , \quad n' = \frac{d}{\rho} \quad , \quad \gamma' = \frac{m}{\rho} \, ,$$

(cosicchè, rispettivamente nei due casi l'ultima (12) si spezza nelle $m'\,n' = mn$, $d'\,\gamma' = d\gamma$, oppure nelle $m'\,n' = d\gamma$, $d'\,\gamma' = mn$). Secondochè valgono le (13) oppure le (14), la (11) mostra che su falde omóloghe delle Γ, Γ' (cioè su falde fra le quali si corrispondono le asintotiche) le rette delle congruenze inviluppano linee luogo corrispondenti oppure no; in altre parole secondochè valgono le (13) oppure le (14) l'applicabilità proiettiva è di prima oppure di seconda specie [1].

Ci limitiamo qui all'applicabilità proiettiva di prima specie, cosicchè varranno le (13): allora è anche $r' = r$ (mentre per l'applicabilità di seconda specie $r' = -r$).

4. Volendo dunque studiare la possibilità di deformare proiettivamente una data congruenza, che non sia una congruenza W, sarà da studiare la possibilità dell'esistenza di una funzione $\rho(u, v)$ tale che calcolando le m', n', d', γ' per mezzo delle (13), esista una funzione $\lambda'(u, v)$ tale che essa insieme con tali m', n', d', γ' soddisfi alle condizioni (4), (9), (10) scritte per la nuova congruenza. Ottenuto questo, le equazioni analoghe alle (3) e (8) faranno conoscere senz'altro $c', \delta', a', b', \alpha', \beta'$. Quanto allo studio del sistema costituito dalle equazioni (4), (9), (10) nelle due funzioni incognite ρ, λ', esso si può semplificare osservando che – in base all'invarianza della forma del sistema (1) per la trasformazione $y = V(v)\,\bar{y}$, $z = U(u)\,\bar{z}$, dove $U(u)$, $V(v)$ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti, e al fatto che i nuovi valori di c, δ sono allora $\bar{c} = c - 2\frac{V'}{V}$, $\bar{\delta} = \delta - 2\frac{U'}{U}$ – si possono sempre determinare le funzioni $U(u)$ e $V(v)$ in modo da alterare i valori delle c, δ di prestabilite funzioni rispettivamente della sola v e della sola u: allora siccome $\lambda'_{uv} = \lambda_{uv}$, le (3) mostrano che si può rendere $c' = c$, $\delta' = \delta$, $\lambda' = \lambda$. In tal modo la (4) relativa a Γ' è verificata; e la condizione per la deformabilità della congruenza Γ si riduce a quella dell'esistenza di una funzione $\rho(u, v)$ che soddisfi alle equazioni (9) (10) scritte per la Γ'. Siccome queste equazioni sussistono già per la congruenza Γ, esse si possono sostituire con quelle che si ottengono sottraendo a membro a membro le (9), e così anche le (10), relative alle due congruenze. Esse sono, a riduzioni fatte, le seguenti, dove si è posto $\log \rho = R$:

(1) Cfr. la mia Nota: *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette.* «Atti del R. Ist. Ven.», to. XCIV, 1934, cfr. il n. 3.

$$(15)\qquad \left(\frac{2\,(nd\,R_u)_u + (mn + d\gamma)\,R_{vv} + 2\,(m_v n + d\gamma_v)\,R_v}{r}\right)_v +$$

$$+ 2\,R_v R_{uv} - \lambda_v R_{uv} - 2\,r R_v = 0\,,$$

$$(16)\qquad \left(\frac{2\,(m\gamma R_v)_v + (mn + d\gamma)\,R_{uu} + 2\,(mn_u + \gamma d_u)\,R_u}{r}\right)_u -$$

$$- 2\,R_u R_{uv} - \lambda_u R_{uv} - 2\,r R_u = 0\,.$$

Concludiamo pertanto che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza* (che non sia una congruenza W) *rappresentata al modo di Wilczynski secondo quanto si è detto al n. 2 sia proiettivamente deformabile, è che il sistema nella funzione incognita* $R(u, v)$ *costituito dalle equazioni* (15) e (16) *ammetta un integrale che non si riduce a una costante* (1). Effettivamente, se si adotta l'integrale $R = \text{cost.}$, si vede subito che è possibile alterare per fattori costanti i fattori di proporzionalità delle y e delle z relative alla congruenza data Γ in modo che le singole quantità $m, n, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ relative alla congruenza Γ vengono a coincidere con le corrispondenti quantità relative alla congruenza Γ', cosicchè il metodo esposto non conduce in tal caso che alla medesima Γ. Si vede anche facilmente che invece ogni altro integrale del sistema costituito dalla (15) e dalla (16) non riproduce la congruenza da cui siamo partiti.

5. Per indicare un'applicazione pressochè immediata consideriamo, p. es., una congruenza Γ, che non sia W, avente per falde focali due qua-

(1) Il caso particolare della deformazione proiettiva di una congruenza W è stato studiato, con altri metodi, in una Nota di O. Rozet, *Sur l'applicabilité projective des congruences* W. (« Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique », XIX, 1933). Volendolo studiare come qui si è fatto per il caso generale, basta osservare che, supposto come è lecito $c = \delta = 0$, le (1) si riducono ora alle

$$a_u = 2\,m_v n + mn_v + d\gamma_v \quad , \quad b = -d_u\,,$$

$$\beta_v = 2\,mn_u + nm_u + \gamma d_u \quad , \quad \alpha = -\gamma_v\,,$$

$$am + \beta d = m_{vv} + d_{uu}\,,$$

$$\gamma\,(m_{vv} + d_{uu}) = m\,(n_{uu} + \gamma_{vv})\,.$$

La considerazione delle (13) dà allora come *condizione necessaria e sufficiente per la deformabilità proiettiva di una congruenza* W la esistenza di un integrale (non costante) del sistema nella funzione incognita $\rho(u, v)$ formato dalle due equazioni

$$d\rho_{uu} + m\rho_{vv} + 2\,d_u \rho_u + 2\,m_v \rho_v - (Ud + Vm)\,\rho = 0\,,$$

$$(m n_u - \gamma d_u)\,\rho_u + (m\gamma_v - \gamma m_v)\,\rho_v - mn\,\frac{\rho_u^2}{\rho} - m\gamma\,\frac{\rho_v^2}{\rho} + \gamma\,(Ud + Vm)\,\rho = 0\,,$$

dove U e V indicano funzioni arbitrarie della sola u e della sola v.

driche non degeneri, nelle condizioni più generali. Essa si ottiene, secondo Wilczynski (op. cit., § 12) assumendo $m = n = f$, $d = \gamma = \frac{1}{f}$, dove $f = f(u, v)$ soddisfa a certe tre equazioni alle derivate parziali fra le quali è la

$$(17) \qquad (\log f)_{uv} = f^2 - \frac{1}{f^2} .$$

Si verifica subito che, in virtù della (17), la (15) e la (16) risultano verificate assumendo $R = e_1 u + e_2 v$, dove e_1, e_2 sono costanti arbitrarie. Questi ∞^2 valori di R conducono ad altrettante applicabilità distinte, cosicchè si ottengono, con quei valori di R, ∞^2 *deformazioni proiettive di una congruenza non* W *avente per falde focali due quadriche* (1).

Osserviamo inoltre, a proposito di questo esempio, che esso rientra nel caso più generale di due congruenze contigue per trasformazione di Laplace, Γ e Γ_1, che siano proiettivamente applicabili rispettivamente su due altre congruenze Γ' e Γ'_1 contigue esse pure per trasformazione di Laplace. Se invero la Γ' si ottiene dalla Γ come sopra, mentre Γ_1, Γ'_1 sono formate dalle tangenti alle linee v rispettivamente delle superficie (y) e (y'), le quantità m, n, d, γ relative a queste due congruenze risultano (2)

$$m_1 = m(mn - (\log m)_{uv}) \quad , \quad m'_1 = \rho m (mn - (\log m)_{uv} - (\log \rho)_{uv}) ,$$

$$n_1 = \frac{1}{m} \quad , \quad n'_1 = \frac{1}{\rho m} ,$$

$$d_1 = d(d\gamma - (\log d)_{uv}) \quad , \quad d'_1 = \rho d (d\gamma - (\log d)_{uv} - (\log \rho)_{uv}) ,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{d} \quad , \quad \gamma'_1 = \frac{1}{\rho d} .$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè Γ_1 e Γ'_1 siano applicabili di prima specie, cioè soddisfino a loro volta a condizioni del tipo (13) si riducono allora alla $(\log \rho)_{uv} = 0$. Quando si applica il metodo del n. 4, si ha dunque che $R_{uv} = 0$ *è – in aggiunta alle* (15) *e* (16) *– la condizione*

(1) Per una qualunque di queste congruenze deformate si introducono ovviamente i parametri asintotici u_1, u_2 d'una sua falda focale, introducendoli su una (conveniente) delle due quadriche focali di Γ: se

$$du_1 = g(u, v)(i f du - dv) \quad , \quad du_2 = l(u, v)(i f du + dv) ,$$

si calcolano facilmente le varie espressioni che intervengono nella teoria della superficie in coordinate asintotiche; p. es., le β e γ di Fubini per la falda focale considerata della Γ' sono rispettivamente

$$\beta' = -\frac{l}{2g^2}\left(\frac{e_1 i}{f} + e_2\right) \quad , \quad \gamma' = \frac{g}{2l^2}\left(-\frac{e_1 i}{f} + e_2\right) .$$

(2) Applicando le formole (137) dell'op. cit. di Wilczynski, e le nostre (13).

necessaria e sufficiente perchè risultino proiettivamente applicabili non solo le congruenze Γ *e* Γ', *ma anche le* Γ_1, Γ'_1 *ad esse contigue per trasformazione di Laplace (in uno stesso senso).* Allora – siccome la condizione trovata $R_{uv} = 0$ è simmetrica in u, v – *risultano inoltre proiettivamente applicabili fra loro anche le congruenze* Γ_{-1} *e* Γ'_{-1} *contigue alle* Γ, Γ' *per la trasformazione di Laplace eseguita nell'altro senso,* cioè ottenute conducendo le tangenti alle linee u delle falde (ζ) e (ζ'); *e* per la stessa ragione *anche due congruenze ottenute dalle* Γ, Γ' *ripetendo l'una o l'altra trasformazione di Laplace, in un senso o nell'altro, uno stesso numero arbitrario di volte.*

Tornando all'esempio dianzi considerato, in esso le congruenze Γ e Γ_1 si corrispondono in una polarità ordinaria; perciò le congruenze Γ', Γ'_1, che sono proiettivamente applicabili di prima specie su una di queste, risultano proiettivamente applicabili di seconda specie fra loro. Perciò in quel caso le congruenze Γ' e Γ'_1, forniscono anche un esempio di applicabilità proiettiva di seconda specie di due congruenze ottenute conducendo le tangenti alle linee di due sistemi coniugati esistenti su una superficie [1].

Matematica (Geometria). — *Osservazioni di Geometria proiettiva differenziale.* Nota [2] di G. Marletta, presentata dal Socio G. Fubini.

Siano φ una superficie non rigata dello spazio ordinario e P un suo punto generico.

In una mia Nota precedente [3] dimostrai, fondandomi sulla tangente canonica [4], che *ogni piano* passante per P è perfettamente *individuato* (mediante costruzioni invarianti per omografie) dai valori di due parametri, e così pure *ogni retta* della stella (P).

In questa Nota arrivo al medesimo risultato ma in modo completamente indipendente dal piano canonico, pur servendomi ancora soltanto dell'intorno di 5° ordine, sulla superficie φ, del punto P. Inoltre presento un piano σ passante per P, distinto dal piano tangente π e dal piano canonico π_c relativi a questo punto, il quale è individuato anche per via geo-

(1) Cfr. il n. 6 della mia Nota del R. Ist. Ven. dinanzi citata. Il caso attuale non rientra però – per valori generici delle costanti e_1, e_2 – in quello considerato a proposito della (14) di loc. cit.; come risulta dai valori di β', γ' assegnati nell'antipenultima nota a pie' di pagina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1935.

(3) *Riflessioni di Geometria proiettiva differenziale.* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXI, ser. 6ª, 1° sem. (1935)] n. 7.

(4) Per la definizione di questa retta e per quelle di altri noti enti cfr. G. Fubini–E. Čech, *Geometria Proiettiva Differenziale.* [N. Zanichelli, Bologna].

metrica, cioè senza aver bisogno dei due parametri; segnalo ancora di questo piano σ tre (e quindi infinite) rette passanti per P e ciascuna alla sua volta individuata geometricamente. Infine, mediante la polarità rispetto ad una certa cubica nodale, costruisco enti alcuni dei quali sono senz'altro individuati appena sia conosciuto l'intorno sopradetto.

Mi permetto di attirare l'attenzione degli studiosi sul piano σ, perchè a me pare che esso desti interesse.

1. Indichiamo con c e c' rispettivamente la cubica e la quintica (del piano tangente π) aventi P rispettivamente come doppio e quadruplo, e a contatto rispettivamente 4–punto e 6–punto, in P, con ciascuno dei due rami con i quali passa per questo punto la curva sezione della data superficie φ col piano π.

Le curve c e c' si secano ulteriormente in un punto S che è distinto da P perchè i due rami, con i quali la cubica c passa per questo punto, si comportano egualmente rispetto alla curva c'; si noti ancora che il punto S, per ragioni analoghe, non coincide con alcuno dei flessi di c [1].

Indicando con M ed N quei punti della detta cubica che sono i tangenziali rispettivamente di S e di M, osserviamo subito che M è distinto da S, ed N da M: invero i tre flessi di c, ripetiamo, si comportano egualmente rispetto alla quintica c'. Abbiamo dunque sulla cubica razionale c i tre punti distinti S, M, N ciascuno individuato dall'intorno di 5° ordine, in φ, del punto P.

2. Scegliendo questi tre punti S, M, N (in quest'ordine) come fondamentali, i punti della curva c si possono mettere in corrispondenza birazionale con i valori di un parametro λ, chiamando omologhi un punto B di c e un valore λ_1 di λ ogni qualvolta sia $(SMNB) = \lambda_1$.

3. Se ora osserviamo che nella retta $r \equiv PB$ del fascio (P, π) abbiamo i tre punti generalmente distinti P, B, H, ove H è il punto in cui r incontra la retta dei flessi di c, possiamo affermare che un qualunque punto Q di r è individuato dal birapporto $\mu = (PBHQ)$, cioè possiamo concludere (n. 2) che mediante l'intorno (in φ) di 5° ordine di P e con due parametri λ e μ, rimane senz'altro individuato qualunque punto Q del piano tangente π.

Ne segue, considerando la polarità rispetto ad una qualunque quadrica del fascio di Darboux, che

(1) Quindi S, essendo fuori della retta dei flessi di c, è distinto dal punto canonico P_c; infatti questa retta è il 2° spigolo di GREEN; cfr. V. STRAZZERI, *Una definizione geometrica dello spigolo di Green.* [«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. LIV, (1930)]. Ciò, del resto, è d'accordo col fatto che il punto canonico non appartiene alla cubica c.

dato l'intorno di 5° ordine di P, *si può individuare, mediante due parametri, qualunque piano passante per questo punto.*

4. Nel fascio (Q, π) abbiamo le tre rette, generalmente distinte, QP, QS, QM, onde in esso ogni altra retta QX è individuata dal parametro $\nu = [Q(PSMX)]$; possiamo quindi affermare che

nella stella (P) *ogni retta di un dato* (n. 3) *piano è individuata mediante il valore di un parametro.*

5. Abbiamo osservato (n. 1) che mediante l'intorno di 5° ordine di P è individuato il punto S, e, quindi, è pure individuata ciascuna delle seguenti tre rette evidentemente distinte: la retta $a' \equiv$ SP, la tangente m' in S alla cubica c, la tangente s' in S alla quintica c' (n. 1). Applicando ora la polarità, rispetto ad una qualunque quadrica del fascio di Darboux, al punto S e a queste tre rette a', m', s', possiamo concludere che

nella stella (P) *esiste un piano* σ *individuato dall'intorno di 5° ordine di* P, *distinto*[1] *dal piano tangente e dal piano canonico relativi a questo punto, e che contiene tre rette distinte* $a\ (\equiv \pi\sigma)$, m, s *passanti per* P *e ciascuna individuata da questo intorno.*

6. Mediante costruzioni di gruppi armonici segue (n. 5) subito l'esistenza di altre infinite rette, del fascio (P, σ), ognuna individuata dall'intorno di 5° ordine del punto P.

7. Ritorniamo al punto generico Q del piano tangente π, e consideriamo la 1ª e la 2ª polare di Q rispetto alla cubica c.

Mediante, al solito, una qualunque quadrica del fascio di Darboux, avremo nella stella (P) un cono quadrico e una retta q, enti ambedue perfettamente individuati dall'intorno di 5° ordine di P e dai due parametri che (n. 3) individuano Q.

Particolare interesse ha il caso in cui Q coincida col punto canonico P_c, perchè la retta q sarà allora

una retta individuata dall'intorno di 5° ordine di P, *e non appartenente al piano canonico* π_c, *nè al piano tangente* π.

8. Se Q è un punto di c (p. es. il punto S), allora la retta q è una generatrice del cono quartico tricuspidato, di vertice P, ottenuto applicando la polarità, rispetto allo solita quadrica, all'inviluppo delle tangenti della cubica nodale c.

9. Altri enti interessanti si possono costruire considerando la polarità rispetto alla quintica c' (n. 1).

(1) Infatti S è (n. 1) distinto dal punto P e dal punto P_c, e quindi il piano polare σ di S sarà distinto dai piani π e π_c rispettivamente polari dei punti P e P_c.

Matematica. — *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2 ordine.* Nota[1] di G. Ascoli, presentata dal Socio G. Fubini.

In una Memoria ormai antica[2] A. Kneser ha ottenuto con mezzi assai elementari alcuni risultati interessanti relativi all'equazione differenziale lineare del 2° ordine

$$y'' + A(x)\,y = 0\,, \tag{1}$$

per il caso in cui la funzione $A(x)$, supposta definita per $x > x_0$, tende per $x \to \infty$ ad una costante positiva α^2. Precisamente, egli ha assegnato condizioni molto semplici sotto le quali gli integrali della (1) si comportano asintoticamente come quelli dell'equazione limite $y'' + \alpha^2 y = 0$, in quanto, per esempio, i massimi di $|y|$ e di $|y'|$ tendono a limiti finiti per $x \to \infty$, e in certi casi si può anzi scrivere

$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x + \varepsilon(x)$$

con $\varepsilon(x)$ e $\varepsilon'(x)$ infinitesimi per $x \to \infty$.

I risultati di Kneser sono stati ritrovati in epoca di poco posteriore da U. Dini[3], come casi molto particolari di certi teoremi relativi ad equazioni differenziali lineari di ordine qualunque i cui coefficienti tendono per $x \to \infty$ a limiti finiti. Il metodo usato è assai più potente, trattandosi di una riduzione dell'equazione differenziale ad una equazione integrale del tipo di Volterra, contenente un certo numero di funzioni arbitrarie, e risoluta poi col noto metodo di Liouville.

Mi sembra tuttavia che il procedimento elementare di Kneser meriti ancora qualche attenzione; ho potuto infatti notare che esso è ancora suscettibile di qualche deduzione interessante, non facile ad ottenere per altra via, relativa al comportamento asintotico degli integrali della (1), sia nella ipotesi $A(x) \to \alpha^2$, sia in altre ipotesi; deduzioni la cui portata può allargarsi poi combinando il procedimento con considerazioni di altro genere.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1935.

(2) A. Kneser, *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments.* (« Crelle's Journal », B. *116*, 178-212, 1896; B. *117*, 72-103, 1897; B. *120*, 267-275, 1899). Le ricerche cui qui si allude si trovano all'inizio della 2ª Memoria.

(3) U. Dini, *Studi sulle equazioni differenziali lineari.* (« Annali di Matematica » (3) to. 2, 297-324; to. 3, 125-183, 1899).

Nella presente Nota darò una rapida esposizione di questi risultati, di cui spero mostrare in altro lavoro l'applicazione allo studio di particolari equazioni non lineari, della forma $y'' = f(x, y)$ [1].

1. A base del metodo di Kneser sta una semplice osservazione, che qui gioverà riprendere, liberandola da ipotesi non necessarie.

Sia $A(x)$ definita nell'intervallo $x_0 \mid\!- k$; per semplicità potremo supporla continua, per quanto tale ipotesi non sia affatto essenziale [2]. Sia inoltre $A(x) > 0$ e tale che un integrale della (1) nullo in x_0 abbia entro $x_0 \mid\!- k$ un primo massimo o minimo in $x_1 > x_0$, e poi un secondo zero in $x_2 > x_1$.

Indichiamo senz'altro con y questo integrale; moltiplichiamo la (1) per $2y'$ e integriamo tra x_0 e x_1. Si ha subito

$$-y'^2(x_0) + 2\int_{x_0}^{x_1} A(x)\, yy'\, dx = 0,$$

da cui, notando che yy' ha tra x_0 e x_1 segno costante, segue

$$y'^2(x_0) = m_1^2 \int_{x_0}^{x_1} 2yy'\, dx = m_1^2\, y^2(x_1)$$

essendo m_1 un valor medio di $\sqrt{A(x)}$ tra x_0 e x_1.

Tenuto conto che $y'(x_0)$ e $y(x_1)$ hanno lo stesso segno, si ha di qui

$$y'(x_0) = m_1\, y(x_1) \quad (2) \text{ [3]}.$$

In modo analogo si trova, per l'intervallo $x_1 \mid\!- x_2$:

$$y'(x_2) = -m_2\, y(x_1) \quad (3)$$

essendo m_2 un valor medio di $\sqrt{A(x)}$ tra x_1 e x_2.

(1) Per ciò che riguarda le proprietà più elementari degli integrali della (1), si veda: M. Bôcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm* etc. (Paris, 1908) e anche i noti trattati di Bieberbach (Leipzig, 1923) e di Kamke (Leipzig, 1930).

(2) Basterebbe supporre infatti $A(x)$ integrabile secondo Lebesgue in ogni parte chiusa di $x_0 \mid\!- k$; ben inteso, deve allora considerarsi come integrale della (1) ogni funzione y continua, dotata di derivata prima assolutamente continua, e la cui derivata seconda, ove esiste, soddisfa alla (1).

(3) Nell'ipotesi posta di $A(x)$ continua, la (2) si ottiene anche osservando che essendo $yy' \neq 0$ per $x_0 < x < x_1$ si ha

$$\frac{y'^2(x_1) - y'^2(x_0)}{y^2(x_1) - y^2(x_0)} = \frac{2y'(\xi)\, y''(\xi)}{2y(\xi)\, y'(\xi)} = \frac{y''(\xi)}{y(\xi)} = -A(\xi)$$

con $x_0 < \xi < x_1$; donde subito la (2). La via del testo ha il vantaggio di applicarsi anche al caso più generale accennato nella nota (1).

Se poi y avrà, dopo x_2, un nuovo estremo x_3, sarà di nuovo

$$y'(x_2) = m_3\, y(x_3) \tag{4}$$

con m_3 valor medio di $\sqrt{A(x)}$ in $x_2 \mid\!-\, x_3$; e da (2), (3), (4) seguirà poi

$$\frac{y'(x_2)}{y'(x_0)} = -\frac{m_2}{m_1} \quad , \quad \frac{y(x_3)}{y(x_1)} = -\frac{m_2}{m_3}. \tag{5}$$

In generale, se in $x_0 \mid\!- k$ si avranno per y gli zeri $x_0, x_2, x_4, \cdots, x_{2n}, \cdots$ alternati con gli estremi $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n+1}, \cdots$, varranno le relazioni

$$y'(x_{2r}) = m_{2r+1}\, y(x_{2r+1}) = -m_{2r}\, y(x_{2r-1}) \quad , \tag{A}$$

$$\frac{y'(x_{2r+2})}{y'(x_{2r})} = -\frac{m_{2r+2}}{m_{2r+1}} \quad , \quad \frac{y(x_{2r+1})}{y(x_{2r-1})} = -\frac{m_{2r}}{m_{2r+1}}$$

da cui seguono subito le altre:

$$\frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} = (-1)^n \frac{m_2\, m_4 \cdots m_{2n}}{m_1\, m_3 \cdots m_{2n-1}} \quad , \tag{B}$$

$$\frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} = (-1)^n \frac{m_2\, m_4 \cdots m_{2n}}{m_3\, m_5 \cdots m_{2n+1}}$$

dove m_i indica un valore conveniente di $\sqrt{A(x)}$ tra x_{i-1} e x_i.

2. Per semplicità di discorso, ammetteremo ora senz'altro che y ammetta infiniti zeri e che k, eventualmente infinito, sia il loro limite. Parlandosi di limiti, si intenderà che essi siano presi per $n \to \infty$ o per $x \to k$.

a) Siano a, b gli estremi, inferiore e superiore, di $\sqrt{A(x)}$ in $x_0 \mid\!- k$, ambedue finiti e positivi (in ciò è inclusa l'esistenza di infiniti zeri e l'ipotesi $k = \infty$). Si ha subito, per esempio:

$$\frac{a}{b} \leqq \left|\frac{y'(x_2)}{y'(x_0)}\right| \leqq \frac{b}{a} \quad , \quad \frac{a}{b} \leqq \left|\frac{y(x_3)}{y(x_1)}\right| \leqq \frac{b}{a}, \tag{6}$$

relazioni mediante le quali, noto un massimo di $|y|$ o di $|y'|$ resta limitato il valore del massimo successivo. E si può notare che in ambo i casi i due limiti sono raggiungibili mediante un'opportuna scelta della funzione $A(x)$, che però risulta discontinua (cfr. nota [2] a p. 235). Si ponga infatti $A(x) = a$ da x_0 al valore $x_1 = x_0 + \frac{\pi}{2a}$ per il quale l'integrale così definito risulta massimo o minimo; poi $A(x) = b$ da x_1 sino al valore $x_2 = x_1 + \frac{\pi}{2b}$ per il quale l'integrale, così continuato, si annulla. Aven-

dosi qui $m_1 = a$, $m_2 = b$, nella seconda parte della prima delle (6) si ha l'eguaglianza. E in modo analogo si trattano gli altri casi.

Più generalmente, si ha, dalle (B)

$$\frac{a^n}{b^n} \leq \left| \frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} \right| \leq \frac{b^n}{a^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} \leq \left| \frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} \right| \leq \frac{b^n}{a^n}$$

che mettono in rilievo la crescenza o decrescenza, al più esponenziale, dei successivi massimi di $|y|$ e $|y'|$, anche qui raggiungibile con adatta scelta di $A(x)$.

b) Sia $A(x)$ *mai decrescente*. Dalle (A) segue subito che *i massimi di* $|y|$ *non crescono mai e hanno quindi un limite finito; y è dunque limitato. Invece i massimi di* $|y'|$ *non decrescono mai e hanno quindi un limite determinato, che può essere anche infinito.*

In modo analogo, *se* $A(x)$ *è non crescente, valgono le stesse conclusioni, col semplice scambio di y e y'*. Si noterà che nel primo caso l'ipotesi include l'esistenza di infiniti zeri; non così nel secondo, in cui gli zeri potrebbero essere in numero finito. Vale tuttavia anche in questa ipotesi il fatto che $|y'|$ è limitato, in quanto, a partire dall'ultimo zero, $|y'|$ è decrescente.

c) La $A(x)$ sia ancora *monotona* ed abbia *limite positivo* α^2 (onde $\lim (x_{2n+2} - x_{2n}) = \pi/\alpha$, $k = \infty$). Poichè in questo caso $m_r \to \alpha$, dalle (A) segue che i limiti di $|y'(x_{2n})|$ e di $|y(x_{2n+1})|$ sono insieme nulli, finiti e non nulli, infiniti; ma da *b*) risulta che uno almeno di essi non è nullo e l'altro non è infinito; dunque ambedue sono finiti e non nulli. Sicchè nell'ipotesi posta, *i massimi di* $|y|$ *e* $|y'|$ *tendono a due limiti finiti e non nulli* l, l' *legati dalla relazione* $l' = \alpha l$.

Ciò è confermato dalla seguente considerazione, che dà anche una limitazione per l e l'. Se per esempio $A(x)$ non è mai decrescente, si ha da (B):

$$1 \geq \left| \frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} \right| = \frac{m_2}{m_{2n+1}} \cdot \frac{m_4}{m_3} \cdot \frac{m_6}{m_5} \cdots \frac{m_{2n}}{m_{2n-1}} \geq \frac{m_2}{m_{2n+1}} \geq \sqrt{\frac{A(x_1)}{A(x_{2n+1})}}$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{A(x_1)}{\alpha}} \leq l \leq y(x_1) \; ;$$

e analogamente per l'.

d) Come si vede, nel caso $A(x) \to \alpha^2$ e monotona, gli integrali della (1) tendono ad assumere in un certo senso il comportamento degli integrali dell'equazione limite $y'' + \alpha^2 y = 0$. Si può vedere che la sola ipotesi $A(x) \to \alpha^2$ non è affatto sufficiente da sola ad assicurare tale comportamento (1); d'altra parte possono assegnarsi condizioni ben più larghe della

(1) Esempi svariati in proposito si possono costruire assumendo una $A(x)$ costante a tratti, e precisamente fissando il valore a_i^2 di $A(x)$ nell'intervallo $x_{i-1} | - x_i$ tra uno zero e un estremo dell'integrale. Si vede subito come gli x_i vengano senz'altro determi-

monotonia, in cui le conclusioni di *c*) continuano a sussistere. Per trovarne qualcuna, basta osservare che tutto si riduce ad assicurare la convergenza del prodotto infinito $\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_4}{m_3} \cdot \frac{m_6}{m_5} \cdots$ od anche quella della serie $\Sigma(\log m_{2n} - \log m_{2n-1})$. Si ha allora, per esempio:

Le conclusioni di c) *valgono se* $\log A(x)$ *ha in* $x_0 \mid\!- +\infty$ *variazione limitata.*

Dall'ipotesi segue infatti anzitutto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste uno $\xi > x_0$ tale che per $x', x'' > \xi$ è $|\log A(x'') - \log A(x')| < \varepsilon$; onde $\log A(x)$ ha limite finito, $A(x)$ limite finito e non nullo α^2. L'integrale y ha dunque infiniti zeri, tendenti a $+\infty$. Essendo di più la quantità $|\log m_{2n} - \log m_{2n-1}|$ maggiorata dall'oscillazione di $\frac{1}{2}\log A(x)$ in $x_{2n-2} \mid\!- x_{2n}$, risulta dall'ipotesi che la serie $\Sigma(\log m_{2n} - \log m_{2n-1})$ è convergente.

e) Una condizione equivalente è la seguente: $A(x)$ *abbia in* $x_0 \mid\!- +\infty$ *variazione limitata e limite minimo positivo per* $x \to \infty$. Ciò segue facilmente dalla relazione

$$\log A(x'') - \log A(x') = \frac{A(x'') - A(x')}{A(\xi)}$$

ove ξ è compreso tra x' e x''. E basterà anche supporre addirittura $A(x) \to \alpha^2 > 0$ *e a variazione limitata in* $x_0 \mid\!- +\infty$.

f) Assai più generale è la condizione seguente: *Esiste una successione di numeri* ξ_n, *crescenti all'infinito, tale che le differenze* $\xi_{n+1} - \xi_n$ *hanno un limite superiore finito* λ, *e che la somma delle oscillazioni di* $\log A(x)$ *negli intervalli* $\xi_n \mid\!- \xi_{n+1}$ *è finita.*

Sia ω_i l'oscillazione di $\log A(x)$ in $\xi_i \mid\!- \xi_{i+1}$; è chiaro che l'oscillazione di $\log A(x)$ in $\xi_n \mid\!- +\infty$ sarà maggiorata dalla somma $\omega_n + \omega_{n+1} + \cdots$; ne risulta che essa tende a zero per $n \to \infty$, che $\log A(x)$ ha limite finito, $A(x)$ limite positivo α^2. L'integrale y ha dunque infiniti zeri x_{2n}, e le differenze $x_{2n+2} - x_{2n}$ tendono a π/α. Esiste perciò un numero positivo γ tale che è sempre

$$x_{2n+2} - x_{2n} > \gamma.$$

Da ciò segue facilmente [1] che la somma delle oscillazioni di $\log A(x)$ negli intervalli $x_{2n} \mid\!- x_{2n+2}$ è finita, e quindi, come in *d*), la tesi.

nati, dovendo essere $x_i - x_{i-1} = \frac{\pi}{2a_i}$. Nelle formule (B) è allora $m_i = a_i$; scegliendo opportunamente le a_i tendenti ad α si può fare in modo che $y(x_{2n+1})$ e $y'(x_{2n})$ divergano o non abbiano limite o tendano a zero. Per esempio, si ha il primo caso per $a_{2n+1} = 1$, $a_{2n} = \frac{n}{n+1}$. Da questi esempi, mediante raccordi sufficientemente brevi, si passa ad altri in cui $A(x)$ è continua, o derivabile ecc.

(1) Ed infatti è chiaro che il numero s_n delle parti in cui un intervallo $\xi_n \mid\!- \xi_{n+1}$ è diviso dagli x_{2r} che eventualmente vi cadono è limitato, dovendo essere $s_n \gamma \leq \lambda$, $s_n \leq \lambda/\gamma$.

g) Anche qui l'ipotesi può esser posta per $A(x)$, anzichè per $\log A(x)$, pur di ammettere che $A(x)$ abbia limite positivo, o anche solo minimo limite positivo. Si vede subito, come in *e*) che le due ipotesi sono equivalenti.

h) La classe delle funzioni $A(x)$ che possiedono la proprietà *f*) o *g*) ha la notevole proprietà che *se vi appartengono due funzioni* $A_1(x), A_2(x)$ *vi appartengono anche le altre* $c_1 A_1(x) + c_2 A_2(x)$ (*purchè positiva*), $A_1^{c_1}(x) A_2^{c_2}(x)$, essendo c_1, c_2 costanti reali qualunque. Il secondo caso si deduce da *f*) come il primo da *g*); basterà provare che se $A_1(x), A_2(x)$ hanno la proprietà voluta relativamente a due successioni ξ_{n1}, ξ_{n2}, la $A_i(x) + A_2(x)$ ha la stessa proprietà per una conveniente successione ξ_n. Ora basta supporre, come è sempre lecito [1] che, per esempio, $\xi_{n+1,1} - \xi_{n1}$ abbia non solo limite superiore finito, ma anche limite inferiore positivo, per vedere che la dimostrazione accennata in *f*) (cfr. nota [1] p. 238) è ancora applicabile; onde per le $A_1(x), A_2(x)$ può servire la medesima successione ξ_{n1}; e la tesi è allora evidente.

3. Nei criteri precedenti per la validità delle conclusioni di *c*) (ossia nell'ultimo indicato, che comprende gli altri) sono compresi molti casi ed esempi particolari, sufficienti per le applicazioni più comuni, e su cui non vogliamo qui insistere. Noteremo solo i più semplici.

a) $A(x)$ *ha limite positivo* α^2, *è assolutamente continua* (ammette, per esempio, derivata continua) *e la sua derivata è assolutamente integrabile tra* x_0 *e* $+\infty$.

Si ha infatti, se $x_0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$,

$$\sum_0^{n-1} \left| A(\xi_{i+1}) - A(\xi_i) \right| = \sum_0^{n-1} \left| \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} A'(x)\,dx \right| \leq \int_{\xi_0}^{\infty} |A'(x)|\,dx$$

e quindi $A(x)$ è a variazione limitata in $x_0 \ldots \infty$.

Per $A'(x) < hn^{-s}$ $(s > 1)$ si ha un enunciato di Kneser.

b) *Si ha* $|A(x) - \alpha^2| < \omega(x)$ *dove* $\omega(x)$ *è positiva, decrescente e assolutamente integrabile tra* x_0 *e* $+\infty$.

Ne segue che la somma delle oscillazioni di $\log A(x)$ in queste parti è $\leq \lambda/\gamma \cdot \omega_n$, onde è finita la somma delle oscillazioni di $\log A(x)$ nelle parti determinate dai ξ_n e dagli x_{2n} presi insieme. *A fortiori* ciò vale per i soli intervalli $x_{2n} \ldots x_{2n+2}$.

(1) Basta per questo modificare, eventualmente, la successione ξ_n nel modo seguente. Sia ξ_p il primo degli ξ_n per cui $\xi_p - \xi_1 \geq \lambda$; ξ_1 il primo successivo a ξ_p per cui $\xi_q - \xi_p \geq \lambda$, e così via; $\xi_1, \xi_p, \xi_q, \cdots$ è la nuova successione richiesta. Si ha infatti, per esempio, $\xi_{p-1} - \xi_1 < \lambda$, $\xi_p - \xi_{p-1} < \lambda$ e quindi $\xi_p - \xi_1 < 2\lambda$. Le successive differenze risultano dunque comprese tra λ e 2λ; quanto alla somma delle oscillazioni di $A(x)$ nei nuovi intervalli è chiaro che essa non supera la somma primitiva, ed è quindi finita.

Assumendo infatti $\xi_n = x_0 + n$, l'oscillazione di $A(x)$ tra ξ_n e ξ_{n+1} risulta minore di $2\omega(x_0 + n)$; la serie $\Sigma\omega(x_0 + n)$ essendo convergente (Cauchy), $A(x)$ soddisfa alle condizioni del n. 2, *b*).

Vedremo tra poco come in questo caso si possano ottenere per altra via conclusioni assai più precise, date già da Kneser e Dini.

c) *Si abbia* $A(x) = \alpha^2 + a/x + \eta/x^2$ *dove* $\eta = \eta(x)$ *è limitato.* Infatti $\alpha^2 + a/x$ e $\alpha^2 + \eta/x^2$ soddisfano ambedue al criterio *b*), l'una perchè monotona, l'altra per *b*); vi soddisfa quindi la $A(x)$ che è la loro semisomma. Ben facile è, del resto, una verifica diretta.

In questa ipotesi è compreso il caso in cui $A(x)$ ammetta uno sviluppo asintotico, o addirittura olomorfo, nell'intorno di $x = \infty$:

$$A(x) = \alpha^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

4. Indicheremo ora due vie secondo le quali i risultati precedenti possono essere ampliati ed approfonditi. La prima, che si trova già accennata da Liouville e si riconnette anche ai metodi del Dini, si ha cercando di dedurre dal comportamento degli integrali delle (1) quello degli integrali dell'equazione vicina

$$y'' + [A(x) + \eta(x)]\, y = 0\,, \tag{7}$$

scrivendo questa nella forma

$$y'' + A(x)\, y = -\eta(x)\, y$$

e risolvendola come equazione lineare non omogenea.

Se y_1, y_2 sono i due integrali della (1) definiti dalle condizioni rispettive

$$y = 0 \quad , \quad y' = 1 \quad ; \quad y = 1 \quad , \quad y' = 0 \quad \text{per} \quad x = c,$$

si ha, come è noto:

$$y = y'(c)\, y_1(x) + y(c)\, y_2(x) - y_1(x) \int_c^x \eta(\xi)\, y(\xi)\, y_2(\xi)\, d\xi + \tag{8}$$

$$+ y_2(x) \int_c^x \eta(\xi)\, y(\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi\,.$$

Supponendo ora che *gli integrali della* (1) *siano limitati e* $\eta(x)$ *assolutamente integrabile tra* x_0 *e* $+\infty$, dimostreremo che *gli integrali della* (7) *sono pure limitati.*

Sia infatti, per $x > x_0$, $|y_1(x)| < g$, $|y_2(x)| < g$; potrà assumersi allora c così grande che risulti

$$\int_c^\infty |\eta(\xi)|\, d\xi < \frac{1}{4g^2}\,.$$

Detto allora $\mu(x)$ il massimo di $|y|$ tra c e x, dalla (8) risulta, per $x > c$,

$$|y| < g|y'(c)| + g|y(c)| + 2g^2 \mu(x) \int_c^x |\eta(\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq g|y'(c)| + g|y(c)| + \frac{1}{2} \mu(x).$$

Di qui, prendendo i massimi dei due membri per x variabile tra c e un determinato X, si ricava

$$\mu(X) \leq g|y'(c)| + g|y(c)| + \frac{1}{2} \mu(X)$$

donde risulta per $\mu(X)$, e quindi per $|y|$, un limite superiore finito.

Ma possiamo andare oltre. Essendo y, y_1, y_2 limitati, gli integrali che compariscono nel secondo membro della (8) hanno limiti finiti, c_1, c_2 per $x \to \infty$; ne segue, posto

$$y'(c) - c_1 = C_1 \quad , \quad y(c) + c_2 = C_2$$

che *esistono due costanti* C_1, C_2 *tali che si ha*

$$\lim (y - C_1 y_1 - C_2 y_2) = 0 .$$

Una proprietà analoga vale per y' se y_1' e y_2', sono anch'essi limitati; in generale risulta soltanto che si può scrivere

$$y' = (C_1 + \varepsilon_1) y_1' + (C_2 + \varepsilon_2) y_2'$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ infinitesimi per $x \to \infty$.

5. Una seconda via di estensione, di cui pure si è occupato il Dini, risulta dal fatto che un cambiamento di funzione e di variabile del tipo

$$y = w\bar{y} \quad , \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{w^2} ,$$

con w positivo e derivabile due volte, muta la (1) nella equazione analoga

$$\frac{d^2 y}{d\bar{x}^2} + \bar{A}(\bar{x}) \bar{y} = 0 \tag{1'}$$

dove è

$$\bar{A}(\bar{x}) = w^3 (w'' + A(x) w) .$$

Se anche alla (1) non sono applicabili i criteri sin qui accennati, potrà darsi che essi risultino applicabili alla (1'), per una conveniente scelta di w; e potrà così dedursi in certi casi che $\bar{y}$, ossia y/w, è limitato.

Mancandoci qui lo spazio per dare esempi in questo senso, ci limiteremo ad una osservazione, che ci sembra interessante, relativa all'equazione (7) del n. 4. Essendo y_1, y_2 due qualunque integrali indipendenti della (1), poniamo, come è lecito

$$w = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Poichè, come ha notato G. Hamel [1], la w soddisfa all'equazione

$$w'' + A(x)\, w = \frac{\lambda^2}{w^3}, \tag{9}$$

dove λ è la costante $y_1 y_2' - y_2 y_1'$, la trasformata della (7) assume la forma semplice

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} + (\lambda^2 + w^4 \eta(x))\, \bar{y} = 0, \tag{7'}$$

e basteranno allora convenienti ipotesi sul comportamento di $w^4 \eta(x)$ per $\bar{x} \to \infty$ [2], cioè per $x \to \infty$, per poter assegnare proprietà asintotiche di $\bar{y}$, e cioè di y/w.

Volendo, per esempio, applicare i risultati del n. 4, si dovrà porre la condizione che sia finito l'integrale

$$\int_0^\infty w^4 |\eta(x)|\, d\bar{x} = \int_{x_0}^\infty w^2 |\eta(x)|\, dx;$$

si potrà dire perciò che *se* $(y_1^2 + y_2^2)\eta(x)$ *è assolutamente integrabile tra* x_0 *e* $+\infty$, *gli integrali della* (7) *hanno la forma*

$$y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\left[C_1 \operatorname{sen}\left(\lambda x \int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2 + y_2^2}\right) + C_2 \cos\left(\lambda x \int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2 + y_2^2}\right) + \varepsilon(x)\right]$$

dove $\varepsilon(x)$ *è infinitesimo per* $x \to \infty$.

6. Notiamo, per terminare, un teorema semplice che discende dalla or ora richiamata equazione di Hamel e che può considerarsi come una estensione del teorema del n. 2 *b*):

Se y_1, y_2 *sono due integrali indipendenti di* (1), *ove* $A(x)$ *è crescente, e se* $w = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ *è massima (minima) per* $x = x_1$, *sarà sempre* $w(x) < w(x_1)$ $(w(x) > w(x_1))$ *per* $x > x_1$ $(x < x_1)$.

(1) G. Hamel, *Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koefficienten.* («Math. Annalen», 73, 371-412, 1913).

(2) Scriviamo $\bar{x}_0 \to \infty$ perchè tale è il limite di x per $x \to k$ se, come sempre supponiamo, gli integrali della (1) hanno infiniti zeri di cui k è limite superiore. Ed infatti la trasformata della (1) è la $\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} + \lambda^2 \bar{y} = 0$, i cui zeri tendono all'infinito.

In forma meno precisa, *i massimi e i minimi di w vanno decrescendo.*

Sia infatti, se è possibile, w massima per $x = x_1$ e $w \geq w(x_1)$ per un qualche $x > x_1$; poichè a destra di x_1 è $w \leq w(x_1)$, esiste certo un intervallo $x_1 \dashv\vdash X$ nel quale è $w \leq w(x_1)$ mentre è poi $w(X) = w(x_1)$: ed esiste poi in esso un intervallo parziale $p \dashv\vdash q$ (contiguo all'insieme dei punti in cui è $w(x) = w(x_1)$) nel cui interno è $w(x) < w(x_1)$, mentre è poi

$$w(p) = w(q) = w(x_1) \quad , \quad w'(p) = 0 .$$

Moltiplichiamo ora la (9) per $2w'$ e integriamo tra p e q; si ha subito

$$w'^2(q) + 2\int_p^q A(x)\, w(x)\, w'(x)\, dx = 0$$

e dal 3° teorema della media ($A(x)$ essendo crescente):

$$w'^2(q) + A(p)\,[w^2(\xi) - w^2(p)] + A(q)\,[w^2(q) - w^2(\xi)] = 0$$

dove $p < \xi < q$; ed anche, essendo $w(p) = w(q) = w(x_1)$:

$$w'^2(q) + [A(q) - A(p)]\,[w^2(x_1) - w^2(\xi)] = 0$$

ciò che è assurdo in forza delle ipotesi poste.

In modo analogo si prova la seconda parte dell'enunciato, ed anche il teorema corrispondente per il caso di $A(x)$ decrescente, che si ottiene del resto da questo mediante la trasformazione $x = -X$.

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. – Trasformazione conforme.* Nota II[1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

3. La funzione $\zeta(\zeta)$. Determinazione delle costanti. — L'angolo σ_1 si determina facilmente in funzione dell'angolo ε e di n, considerando che mentre nel piano ζ si percorre l'arco $OAO' = \gamma$, nel piano ζ si parte da O e si ritorna, dopo aver percorsi i due bordi del lato superiore della lamina, nel punto O', coincidente con O, avente quindi la stessa affissa $\zeta = 0$. Dovrà essere perciò

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{d\zeta}\, d\zeta = 0 .$$

Essendo su γ

$$\zeta = e^{i\sigma} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon < \sigma < \pi - \varepsilon ,$$

si avrà in base alla (1) della Nota I

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos\sigma \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)}\right]^n d\sigma - \cos\sigma_1 \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)}\right]^n d\sigma = 0 ,$$

da cui assumendo nel primo integrale come fattore differenziale

$$d(\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}\varepsilon),$$

ed integrando per parti si ha

$$(\cos\sigma_1 + n\cos\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)}\right]^n d\sigma = 0 .$$

Ora considerando che la funzione sotto il segno di integrale è sempre positiva, possiamo senz'altro concludere

$$\cos\sigma_1 + n\cos\varepsilon = 0 , \tag{2}$$

che esprime appunto l'angolo σ_1 mediante n ed ε.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935. Vedi Nota I, questi «Rendiconti», vol. XXII, p. 130.

È facile verificare che si perverrebbe all'identico risultato ripetendo il ragionamento esposto per il lato inferiore della lamina.

La (2) permette di esprimere la forma differenziale della trasformazione nel modo seguente

$$(1') \qquad d\zeta = \frac{e^{-\varepsilon n i}}{k} \frac{\zeta^2 + 2n\zeta\cos\varepsilon + 1}{\zeta^2} \left(\frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{\zeta + e^{-i\varepsilon}}\right)^n d\zeta.$$

Questa espressione è integrabile colle ordinarie funzioni, e, tenuto conto che per $\zeta = e^{i\varepsilon}$ deve essere $\zeta = 0$, fornisce

$$(3) \qquad \zeta = \frac{e^{-\varepsilon n i}}{k} \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta + e^{-i\varepsilon})}{\zeta} \cdot \left(\frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{\zeta + e^{-i\varepsilon}}\right)^n,$$

che è la richiesta formula di trasformazione. È facile constatare che essa risponde alle condizioni imposte al n. 2 e inoltre trasforma il punto all'infinito del piano ζ, nel punto all'infinito del piano ζ.

Le costanti reali k ed ε, risultano determinate, in funzione dell'apertura $2\alpha = \pi(1 - n)$, della lamina, e delle lunghezze l ed ml dei suoi lati, dalla considerazione che ai punti

$$\zeta = e^{i\sigma_1} \quad , \quad \zeta = e^{-i\sigma_1},$$

del piano forato, devono corrispondere, come s'è imposto sopra, i due punti

$$\zeta = le^{i(\pi - \alpha)} \quad , \quad \zeta = mle^{i(\pi + \alpha)},$$

del piano tagliato.

La (3) fornisce allora facilmente le due equazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} (\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varepsilon) \cdot \left[\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma_1 - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma_1 + \varepsilon)}\right]^n = \dfrac{1}{2} lk, \\ (\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\varepsilon) \cdot \left[\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma_1 + \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma_1 - \varepsilon)}\right]^n = \dfrac{1}{2} mlk\ (1). \end{cases}$$

Moltiplicandole membro a membro ed estraendo poi la radice quadrata, si ha, tenendo presente la (2),

$$(5) \qquad k = \frac{2}{l\sqrt{m}} \cdot (1 - n)^{\frac{1-n}{2}} \cdot (1 + n)^{\frac{1+n}{2}} \cdot \cos\varepsilon,$$

(1) Si osservi che, per le convenzioni fatte su σ_1 ed ε, tanto i termini con esponente n, come i binomi che li precedono, sono positivi in queste equazioni.

e quindi

$$(5') \qquad k = \frac{4}{\pi l \sqrt{m}} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot (\pi - \alpha)^{\frac{\pi - \alpha}{\pi}} \cdot \cos \varepsilon .$$

In base alle limitazioni imposte ad n, m, ε, la costante k risulta essenzialmente positiva.

Dividendo invece la seconda delle (4) per la prima, ed esprimendo $\operatorname{sen} \sigma_1$ e $\cos \sigma_1$ in funzione di n ed ε mediante la (2), si ottiene l'altra formula

$$(6) \qquad \frac{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varepsilon} - \operatorname{sen} \varepsilon}{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varepsilon} - \operatorname{sen} \varepsilon} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varepsilon} - n \operatorname{sen} \varepsilon}{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varepsilon} + n \operatorname{sen} \varepsilon} \right)^n = m .$$

4. Discussione della (6). — L'equazione (6) definisce, per ogni valore di m positivo, un ben determinato angolo ε compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, e uno solo.

Si osservi infatti che essendo $n < 1$, il primo membro di detta equazione acquista valori maggiori di 1 per ogni angolo acuto ε positivo, valori positivi minori di 1, per ogni angolo acuto ε negativo, e valore 1 per $\varepsilon = 0$.

Ne risulta innanzi tutto che per $m = 1$, cioè nel caso in cui i lati della lamina sono uguali, deve essere $\varepsilon = 0$.

Supponiamo poi $m > 1$. Allora un eventuale angolo ε che soddisfi la (6), risulterà compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Sarà lecito scrivere la stessa equazione nella forma

$$(7) \qquad \frac{\sqrt{1 + (1 - n^2) \cot^2 \varepsilon} + 1}{\sqrt{1 + (1 - n^2) \cot^2 \varepsilon} - 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + (1 - n^2) \cot^2 \varepsilon} - n}{\sqrt{1 + (1 - n^2) \cot^2 \varepsilon} + n} \right)^n = m .$$

Ponendo per semplicità

$$R = \sqrt{1 + (1 - n^2) \cot^2 \varepsilon} ,$$

per cui

$$\cot^2 \varepsilon = \frac{R^2 - 1}{1 - n^2} ;$$

il problema si riduce a ricercare valori di R del tipo

$$1 \leq R < \infty$$

che soddisfino l'equazione

$$(8) \qquad \frac{R + 1}{R - 1} \cdot \left(\frac{R - n}{R + n} \right)^n - m = 0 .$$

Per R tendente a 1 il primo membro della (8) è positivo e tende all'infinito, per R sufficientemente grande è negativo. Esisterà dunque almeno una soluzione. Osservando poi che la derivata dello stesso primo membro rispetto ad R,

$$-\frac{2(1-n^2)R^2}{(R-1)^2(R^2-n^2)}\cdot\left(\frac{R-n}{R+n}\right)^n,$$

è negativa per ogni valore di R compreso nell'intervallo accennato, possiamo concludere che la funzione determinata dal primo membro della (8) è sempre decrescente e si annulla quindi per un solo valore di R nello stesso intervallo. Esiste quindi un solo angolo ε compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, che soddisfa la (7).

Il caso $m<1$ si può far rientrare nel precedente osservando che allora l'angolo ricercato ε è negativo e soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (7) sostituendo ad m il suo reciproco $\frac{1}{m}$.

Si può osservare che mutando n in $-n$, cioè considerando due posizioni della lamina simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, il primo membro della (7) si muta in se stesso. L'angolo ε e la costante k non cambiano di valore mentre l'angolo σ_1 si cambia in $\pi-\sigma_1$.

5. Casi particolari. — a) *Lamina equilatera.* – Ponendo $m=1$ si ha, come abbiamo notato anche al numero precedente, $\varepsilon=0$. Le altre costanti acquistano i valori seguenti

$$(2') \qquad \cos\sigma_1 = -n = \frac{2\alpha}{\pi} - 1,$$

$$(5'') \qquad k = \frac{4}{\pi l}\cdot\alpha^{\frac{\alpha}{\pi}}\cdot(\pi-\alpha)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}},$$

e la trasformazione (3) si riduce a quella già considerata nel caso della lamina a lati uguali [1].

b) Supponiamo che il lato inferiore della lamina abbia una lunghezza tendente a zero. Consideriamo cioè il rapporto m infinitamente piccolo e calcoliamo il limite delle varie costanti per $m=0$. La (6) permette facilmente di concludere che

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2}.$$

Il valore di k si presenta in forma indeterminata, ma con un semplice passaggio al limite si ha, tenendo conto della (6):

$$\lim_{m=0} k = \frac{4}{l}.$$

(1) Nota I, n. 1.

La trasformazione (3) acquista in questo caso la forma

$$z = \frac{l}{4} \cdot ie^{-\alpha i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} + 2i\right),$$

che corrisponde, come è facile verificare, alla rappresentazione del piano z tagliato dalla lamina semplice OA (che forma l'angolo α colla direzione negativa dell'asse x ed è situata nel semipiano $y > 0$), nel piano ζ forato dal cerchio di raggio 1.

Facendo invece tendere a zero il lato superiore della lamina, e indicando con l' la lunghezza costante del lato OB, si arriva alla analoga trasformazione

$$z = -\frac{l'}{4} ie^{\alpha i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} - 2i\right),$$

che fa corrispondere al piano z tagliato dalla lamina OB, il piano ζ forato dal cerchio di raggio 1.

c) *Lamina aperta ad angolo piatto.* – Si ottiene questo caso ponendo $n = 0$. Scompaiono allora i due punti angolosi in O , O′ e si ha una lamina semplice avente la direzione dell'asse immaginario. La (6) fornisce direttamente

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{l}{l_0},$$

avendo indicato con $2l_0$ la lunghezza dell'intera lamina $(m+1)l$. Per le altre costanti si ha

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad k = \frac{4}{(m+1)l} = \frac{2}{l_0}.$$

La trasformazione (3) diventa

$$z = \frac{l_0}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} - 2i\,\frac{m-1}{m+1}\right),$$

e in forma differenziale

$$dz = \frac{l_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta.$$

d) Nei due casi esclusi $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$; $(n = 1$, $n = -1)$, in cui la lamina si chiude coi lati sovrapposti sulla direzione dell'asse x, si ottengono, ragionando direttamente sulle (4), i seguenti valori per le costanti:

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{m}, \qquad \text{secondo che } m \gtrless 1,$$

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{1}{m}}, \sqrt{1-m}, \quad » \quad » \quad » \quad ;$$

$\sigma_1 = \pi \mp \varepsilon$ secondo che $m \gtrless 1$, per $n = 1$,

$\sigma_1 = \pm \varepsilon$ » » » , per $n = -1$;

$k = \frac{4}{ml}, \frac{4}{l}$ » » » .

Per $m = 1$ si ha

$\cos \varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0$; $\sigma_1 = \pi, 0$, secondo che $n = 1, -1$.

La trasformazione (3) acquista, per $n = 1$, $n = -1$ rispettivamente, la forma

$$z = \frac{L}{4}\left(\frac{\zeta}{e^{i\varepsilon}} + \frac{e^{i\varepsilon}}{\zeta} - 2\right) \; ; \; z = \frac{L}{4}\left(\zeta e^{i\varepsilon} + \frac{1}{\zeta e^{i\varepsilon}} + 2\right),$$

avendo indicato con L il maggiore dei due lati OA, OB della lamina. Queste trasformazioni si presentano come forme particolari di quelle relative alla lamina semplice.

6. Alcuni valori numerici. — Nelle tabelline che seguono vengono dati i valori di σ_1 e di m in corrispondenza di alcuni valori assegnati dell'angolo ε. Ogni tabellina si riferisce ad una certa apertura della lamina. Per comodità di calcolo si sono assegnati ad arbitrio i valori di ε anzichè quelli di m come sarebbe parso più naturale, sembrando che lo scopo di dare un'idea approssimativa del legame fra le varie costanti, possa considerarsi ugualmente raggiunto.

Le tabelline si riferiscono solo a valori di ε e di n maggiori di zero; i valori corrispondenti per $\varepsilon < 0$ ed $n < 0$, si ottengono con facilità da quelli elencati in base alle considerazioni fatte al n. 4.

$n = 0$, $(\alpha = 90°)$.

ε	0°	15°	30°	45°	60°
m	1	1.698	3.000	5.828	13.928
σ_1	90°	90°	90°	90°	90°

$$n = \frac{1}{6}\,,(\alpha = 75°).$$

ε	0°	15°	30°	45°	60°
m	1	1.686	2.960	5.714	13.602
σ_1	99° 36′	99° 16′	98° 16′	96° 46′	94° 47′

$$n = \frac{1}{3}\,,(\alpha = 60°).$$

ε	0°	15°	30°	45°	60°
m	1	1.649	2.835	5.376	12.669
σ_1	109° 28′	108° 47′	106° 42′	103° 38′	99° 36′

$$n = \frac{1}{2}\,,(\alpha = 45°).$$

ε	0°	15°	30°	45°	60°
m	1	1.585	2.627	4.833	11.093
σ_1	120°	118° 53′	115° 31′	110° 42′	104° 29′

Meccanica. — *Sul problema di Clebsch.* – II. *Applicazione dei tensori vincolati.* Nota [1] di MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 4. – ALCUNE FORMOLE COMPLEMENTARI.

Nella Nota introduttiva ci siamo limitati a derivare una sola volta i tensori vincolati. Raccogliamo ora alcune formole che ci occorrono relative ai derivati secondi.

Per il tensore vincolato di Ricci si ha (cfr. § 2 della Nota introduttiva):

$$(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{rs(3)/\gamma\delta} = -\varepsilon_{rs(3)}\, b^i_\gamma\, b_{i\delta} \\ \varepsilon_{3s(3)/\gamma\delta} = \varepsilon_{is(3)}\, b^i_{\gamma/\delta} \\ \varepsilon_{33(3)/\gamma\delta} = 0\,. \end{cases}$$

Per l'invariante incompleto $\Delta^* f$ si ha inoltre (ibidem, § 4):

$$(11) \qquad \Delta^* f_{/\gamma\delta} - f_{/hk}\,\gamma\delta\, g^{hk} = f_{/33\,\gamma\delta} - f_{/(33)\gamma\delta}$$

e finalmente, per le formole di derivazione covariante:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \Delta^* f_{/\gamma\delta} - f_{hk\,\gamma\delta}\, g^{hk} = {} & 2 f_{/h3}\, b^h_{\gamma/\delta} + 2 f_{/3\,h\gamma}\, b^h_\delta + 2 f_{/3\,h\delta}\, b^h_\gamma \\ & + 2 f_{/33}\, b^h_\delta\, b_{h\gamma} + 2 f_{/hj}\, b^h_\gamma\, b^j_\delta\,. \end{aligned}$$

§ 5. – LE EQUAZIONI DI BELTRAMI.

È noto che per un corpo elastico isotropo omogeneo dello spazio ordinario il tensore degli sforzi deve soddisfare alle equazioni di Beltrami [2], che in coordinate generali si scrivono:

$$(13) \qquad \bar{\Delta}\,\Phi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{1+\lambda}\,\Phi_{/\alpha\beta}$$

dove λ è il coefficiente di contrazione trasversale, $\bar{\Delta}$ è l'operatore di Laplace nello spazio, e quindi, per la forma particolare del ds^2:

$$(14) \qquad \bar{\Delta}\,\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta/\gamma\delta}\, g^{\gamma\delta} = \Phi_{\alpha\beta/ij}\, g^{ij} + \Phi_{\alpha\beta/33}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1935.

(2) E. BELTRAMI, *Opere matematiche.* (Milano, Hoepli, 1920, to. IV, p. 511).

Φ è l'invariante lineare del tensore degli sforzi, e cioè:

$$\Phi = \Phi_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = \Phi_{ij}\, g^{ij} + \Phi_{33} \quad (15)$$

Giova inoltre tener presente la seguente equazione, conseguenza delle (13) cui deve soddisfare Φ:

$$\bar{\Delta}\Phi = \Phi_{/ij}\, g^{ij} + \Phi_{/33} = 0 \,. \quad (16)$$

Vediamo ora che cosa diventano queste equazioni quando per Φ si prenda il tensore vincolato (8). Si ha intanto, per l'invariante vincolato corrispondente a (15):

$$\Phi_{\alpha\beta\,(33)}\, g^{\alpha\beta} = f^{/ij}\, g_{ij} = \Delta^* f \,. \quad (17)$$

Il secondo membro delle equazioni di Beltrami è perciò (§ 4 della Nota introduttiva) $-\frac{1}{1+\lambda}\Delta^* f_{/\alpha\beta}$. Per completarle, basterà costruire il primo membro, corrispondente a (14). All'uopo distinguiamo i seguenti casi:

a) $\alpha = \beta = 3$. Si ottiene, operando su (8), e tenendo conto delle (10) e del § 2 della Nota introduttiva:

$$2\,(\Delta^* f\, b_{ih}\, b^{ih} - f_{/hk}\, b^{hi}\, b_i^k) = -\frac{1}{1+\lambda}\Delta^* f_{/33} \,; \quad (18\,a)$$

b) $\alpha = 3$, $\beta = s$. Si ha, tenendo conto delle formole già ricordate e della (17′) della Nota introduttiva, e trascurando, per semplicità formale [2], i termini nei quali figurano le derivate covarianti di b_{ik}, cioè supponendo le $x^3 = \text{cost.}$ a curvatura media costante (si intende variabile però con x^3):

$$2\,(\Delta^* f_{/j}\, b_s^j - f_{/13}\, b^{1j}\, b_{js} - f_{/1j_3}\, b^{1j} - f_{/s3}\, b_{1j}\, b^{1j}) = -\frac{1}{1+\lambda}\Delta^* f_{/3s} \,; \quad (18\,b)$$

c) $\alpha = r$, $\beta = s$. Nel caso in esame bisogna tener conto, oltre che delle formole ricordate, anche delle (12). Si ha, sempre per superficie a curvatura media costante:

(1) Le (13) diventano infatti, in coordinate cartesiane ortogonali, le note equazioni di Beltrami. Trattandosi di varietà euclidea esse rappresentano quindi le stesse equazioni in coordinate generali (cfr. la mia Nota, *Sulle equazioni della Meccanica dei mezzi isotropi non euclidei*. Questi «Rendiconti», ser. 6ª, vol. XIX, 1934, pp. 566–572). Per una deduzione diretta di tali equazioni, ved. B. Finzi, *Su di una forma delle equazioni indefinite* ecc. («Rend. Istit. Lombardo», 1934, pp. 261–269, § 3).

(2) Le formole complete non sono invero molto più complicate di quelle che scriviamo, avendo in più soltanto qualche termine con le derivate covarianti di b_{ik} rispetto agli indici 1 e 2. Ma nei casi particolari che prendiamo in esame questi termini si annullano e perciò li trascuriamo fin d'ora.

$$(18\,c) \qquad g_{rs}\,(\Delta^*\Delta^* f + \Delta^* f_{|33} - 2\,\Delta^* f\, b_{ij}\, b^{ij} + 2 f_{|hk}\, b^{hj}\, b^k_j) +$$

$$+ 2 f_{|rs}\, b_{ij}\, b^{ij} - \Delta^* f_{|rs} - f_{|33\,rs} - 2 f_{|hj}\, b^h_r\, b^j_s = - \frac{1}{1+\lambda}\,\Delta^* f_{|rs}\,.$$

Osserviamo che nei primi membri delle (18 *a*) (18 *b*) (18 *c*) entra l'invariante $\frac{1}{2}\, b_{hj}\, b^{hj}$, funzione delle tre variabili, che per ogni particolare valore di x^3 dà la curvatura di Casorati della corrispondente superficie.

§ 6. – Il caso piano.

Le equazioni del § 3 e quelle del precedente si semplificano in modo singolare quando le $x^3 = \text{cost.}$ sono piani. È questo infatti, come abbiamo già notato, il solo caso in cui, annullandosi tutte le b_{ik}, le equazioni indefinite sono identicamente soddisfatte e i tensori vincolati si possono trattare come ordinari. Vediamo ora come si presentano le equazioni di Beltrami. La (17) diventa:

$$(17') \qquad \Phi = \Delta f$$

dove Δ è l'ordinario operatore di Laplace nel piano.

Nella (18 *a*) il primo membro si annulla. Da essa discende allora che l'invariante (17') deve essere di primo grado in x^3. E cioè:

$$(19) \qquad \Phi = \alpha x^3 + \beta$$

con α e β funzioni di $x^1\, x^2$. Ma anche nelle (18 *b*) il primo membro si annulla; conseguentemente si ha $\alpha_{|3} = 0$, e cioè α costante. Conviene inoltre tener presente che, nel caso in esame, la (16) per (19) dice che Φ e conseguentemente β devono essere armoniche nelle due variabili $x^1\, x^2$.

Tenendo conto di quanto precede le (18) si scrivono:

$$(20) \qquad \left(\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{3^2}}\right)_{|rs} = - \frac{1}{1+\lambda}\,\beta_{|rs}$$

cui si può soddisfare eguagliando gli invarianti che figurano nei due membri. Si ha allora, integrando rispetto a x^3:

$$(21) \qquad f = - \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\beta\,\frac{x^{3^2}}{2} + \gamma x^3 + \varphi.$$

Poichè la (17') deve essere valida qualunque sia x^3, si ha poi:

$$(22) \qquad \Delta\gamma = \alpha \qquad \Delta\varphi = \beta\,,$$

Ma se la sollecitazione esterna è simmetrica rispetto alla sezione media, $\gamma = 0$ e non resta quindi che la seconda delle (22) dalla quale per quanto

precede discende che φ è una funzione biarmonica delle due variabili $x^1 x^2$. Si ha quindi in definitiva la nota formola:

$$f = \varphi - \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{x^{3^2}}{2} \Delta\varphi \quad (1). \tag{23}$$

§ 7. – Il caso sferico.

Se le $x^3 = \text{cost.}$ sono sfere si ha:

$$b_{ik} = -\frac{g_{ik}}{R + x^3}. \tag{24}$$

Le equazioni indefinite (9') diventano:

$$\begin{cases} f_{/i3} = 0 \\ \Delta^* f = 0. \end{cases} \tag{25}$$

In virtù di queste restano identicamente soddisfatte le (16) (18 *a*) (18 *b*). Le (18 *c*) diventano poi (2):

$$-4\frac{f_{/rs}}{(R+x^3)^2} - f_{/(33)rs} + 4\frac{f_{/(3)rs}}{R+x^3} - 2f_{/33}\frac{g_{rs}}{(R+x^3)^2} = 0 \tag{26}$$

e cioè (3):

(1) Cfr. A. Love, *A Treatise on the Math. Theorie of Elasticity*. (Cambridge, 1927, p. 206, art. 145). Ved. inoltre G. Supino, *Sul problema di Clebsch*. (Questi « Rendiconti », vol. XV, ser. 6ª, 1932, pp. 366-371) ed E. Almansi, *Sulle deformazioni delle piastre elastiche*. Nota II. (Questi « Rendiconti », vol. XVI, ser. 6ª, 1932, pp. 597-603).

(2) Oltre alle formole del § 4 viene qui applicata la seguente, di facile deduzione,

$$f_{/3rs} - f_{/(3)rs} = f_{/js}\, b_r^j + f_{/jr}\, b_s^j.$$

(3) Per passare dalle (26) alle (26') osserviamo che, indicando con una virgola la derivazione covariante fatta lungo una generica $x^3 = \text{cost.}$ si ha: $f_{/rs} = f_{,rs} - \frac{\partial f}{\partial x^3} b_{rs}$ e quindi $\left(\frac{f}{R+x^3}\right)_{/rs} = \left(\frac{f}{R+x^3}\right)_{,rs} - b_{rs}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{f}{R+x^3}\right)$. Confrontando quest'ultima con quella che si ottiene dividendo i due membri della precedente per $R + x^3$, si ha poi:

$$\left\{\frac{f}{R+x^3}\right\}_{/rs} - \frac{f_{/rs}}{R+x^3} = \frac{f b_{rs}}{(R+x^3)^2}.$$

E allo stesso modo si trova:

$$\left\{\frac{f}{(R+x^3)^2}\right\}_{/rs} - \frac{f_{/rs}}{(R+x^3)^2} = \frac{2 f b_{rs}}{(R+x^3)^3}.$$

$$(26') \qquad \left\{ -\frac{4f}{(R+x^3)^2} + \frac{4f_{/3}}{R+x^3} - f_{/33} \right\}_{/rs} =$$

$$= \left\{ \frac{8f}{(R+x^3)^4} + \frac{4f_{/3}}{(R+x^3)^3} - \frac{2f_{/33}}{(R+x^3)^2} \right\} g_{rs} .$$

Se si cerca di soddisfare a queste eguagliando a zero entrambi gli invarianti che figurano nei due membri, si ha:

$$(27) \qquad f = \gamma (R + x^3)^4$$

con γ funzione di $x^1 x^2$ che si deve determinare in guisa da soddisfare alle (25). Le prime, per le note formole di derivazione covariante e per le (24) diventano

$$(27') \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^3 \partial x^s} = \frac{\partial f}{\partial x^s} \cdot \frac{1}{R + x^3}$$

che dànno $\gamma =$ costante, e per la seconda (25) $\gamma = 0$ [1].

(1) Dalla prima formola della nota precedente che mette in relazione le derivate seconde covarianti di f in S_3 e lungo ogni $x^3 =$ cost. discende infatti: $\Delta^* f = \underset{\sigma}{\Delta^*} f + H \frac{\partial f}{\partial x^3}$ dove $\underset{\sigma}{\Delta} f$ è l'invariante di Laplace lungo ogni superficie $x^3 =$ cost., e nel caso in esame trattandosi di superficie rappresentabili conformemente sul piano $\underset{\sigma}{\Delta} f = e^{-2\tau} \Delta f$ dove $e^{2\tau}$ è il coefficiente di proporzionalità tra la metrica della superficie e quella del piano. Ma, per la costanza di γ è $\Delta f = 0$; ne viene quindi $\frac{\partial f}{\partial x^3} = 0$ e cioè $\gamma = 0$.

Fisica. — *Misure di dispersione anomala sulle prime doppie dello* Sr^+ *e del* Ba^+ [1]. Nota [2] di L. Allegretti, presentata dal Socio L. Puccianti.

È noto come i metalli alcalino-terrosi semplicemente ionizzati emettano uno spettro con costituzione analoga a quello dei metalli alcalini. Quanto al rapporto di intensità fra la riga $1S - 2P_1$ e la $1S - 2P_2$, la regola di Burger e Dorgelo assegna il valore 2 : 1.

Sono molto numerose ed eseguite con i metodi più svariati (misure fotometriche per emissione o per assorbimento, misure di magneto rotazione, misure di dispersione anomala con frange orizzontali (metodo Puccianti), o con frange inclinate (metodo modificato da Roschdestwensky)), le determinazioni d'intensità relativa per le componenti della prima doppia della serie principale dei metalli alcalini; mancano quasi del tutto, invece, quelle relative alle corrispondenti del Ba^+, Sr^+, Ca^+ [3].

Ho eseguito dunque le misure dei rapporti di intensità per lo Sr^+ e per il Ba^+ col metodo della dispersione anomala, che, nei casi in cui è applicabile, merita una speciale fiducia; ho determinato, cioè, per i due elementi, il rapporto tra i valori dei coefficienti $\mathfrak{N}$ di dispersione anomala che compaiono nella formula che dà l'andamento dell'indice di rifrazione in vicinanza di una riga di frequenza ν_0:

$$n - 1 = \frac{e^2}{2\pi m} \frac{\mathfrak{N}}{\nu_0^2 - \nu^2}.$$

Per eseguire tale determinazione, ho migliorato l'apparecchio usato da Puccianti [4] per il Ca^+, munendo lo spettrografo di un obiettivo appositamente costruito a cura dell'Istituto Nazionale di ottica, che dà, con l'apertura relativa di $f/20$, immagini perfette per una regione abbastanza ampia dello spettro; ciò era necessario, data la notevole distanza delle due righe che formano ciascuna doppia.

Il valore spettroscopico in studio è prodotto da un arco elettrico il cui carbone positivo è animato con una miccia opportunamente preparata. Nel

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1935.

(3) Solo in S. Sambusky, «Zeit. f. Physik», *49*, p. 731, 1928, trovo un'incidentale indicazione di un resultato per il Ba^+ che non pare in notevole discordanza con quello che riferirò in questa Nota.

(4) Puccianti, «Nuovo Cimento», dicembre 1933.

caso presente, il carbone è stato riempito con $Sr\,Fl_2$ o con $Ba\,Cl_2$, impastati con polvere di carbone. Per il Bario non si è potuto usare il Fluoruro per la presenza di numerose bande, presentanti anch'esse la dispersione anomala in vicinanza della $\lambda\,4934,1$; talvolta, per avere maggiore intensità di vapore, si è ricorso all'artificio di introdurre al momento dei pezzetti di Bario metallico. Le spettografie vennero eseguite con esposizioni inferiori al secondo, su lastre diapositive Cappelli per lo Sr^+, su lastre Cappelli etichetta grigia per il Ba^+.

Il metodo per l'esecuzione delle misure (rilievo grafico e calcolo) è identico a quello da me adoperato per la dispersione anomala nell'argento [1].

Anche in questo caso, la notevole distanza fra le due righe ha permesso di trattarle nel calcolo separatamente.

La formula di cui si è fatto uso, indipendente dalla corrispondenza delle frangie, è stata:

$$1 = N^* \lambda^* \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1}\,\lambda_i} + A\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}^2 - \lambda_0^2} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 - \lambda_0^2}\right)$$

nella quale

$$A = \mathfrak{N}\,\lambda_0^2.$$

Nella determinazione del coefficiente per $\lambda = 4215.5$ dello Sr^+, i calcoli sono stati più lunghi, perchè tutte le spettrografie, più o meno, mostravano la dispersione anomala per $\lambda = 4226.7$ ($1\,S - 1\,P_1$) del Ca presente come impurità. Si è dovuto mettere allora in conto tale perturbazione, ed usare una formula con un terzo termine:

$$1 = N^* \lambda^* \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1}\,\lambda_i} + A\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}^2 - \lambda_{4215}^2} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 - \lambda_{4215}^2}\right) +$$

$$+ B\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}^2 - \lambda_{4226}^2} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 - \lambda_{4226}^2}\right).$$

L'intensità della riga del Ca è stata trovata variabile, da spettrografia a spettrografia, fra 1/50 e 1/100 di quella dello Sr^+.

I risultati per A_2/A_1 sono riportati negli specchietti.

(1) Allegretti, «Nuovo Cimento», dicembre 1934.

Fotografia trasversale		Sr^+ A_2/A_1	Ba^+ A_2/A_1
1	I	1.98	1.80
	II	1.96	1.83
2	I	1.83	1.86
	II	1.91	1.84
3	I	1.98	1.92
	II	1.92	1.79
		1.93	1.84

da essi si calcolano immediatamente i seguenti resultati definitivi:

$$Sr^+ \qquad \frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1} = 2.07 \qquad\qquad Ba^+ \qquad \frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1} = 2.16 \ .$$

A questi valori si può aggiungere quello che si calcola dal rapporto A_2/A_1 ottenuto da Puccianti per il Ca^+, e così completare il quadro per le prime doppie del

	Ca^+	Sr^+	Ba^+
$\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$	2.02	2.07	2.16 .

Chimica. — *Borovanadati* [1]. Nota [2] di D. Ghiron presentata dal Socio G. Bruni.

Fra i numerosi sali doppi e complessi che forma il vanadio nei suoi vari gradi di valenza, i composti descritti finora col boro e coll'anidride borica sono rarissimi. È menzionato nell'Abegg [3] un borato di vanadile, precipitato bianco verde che si forma per aggiunta di borace a una soluzione di solfato di vanadile e nel Mellor [4] è riportato come Berzelius abbia osservato che l'anidride vanadica si scioglie nel borace fuso, formando un vetro giallo in atmosfera ossidante e verde in ambiente riducente. Inoltre è descritto un boruro di vanadio B_2V ottenuto elettrolizzando l'ossido di vanadio sciolto nell'acido borico o nei borati fusi e mescolato con fluoruri alcalini o alcalino terrosi [5].

Io ho cercato se fosse possibile stabilire l'esistenza di sali metallici di qualche acido complesso borovanadico, analoghi a quelli da me recentemente preparati, in collaborazione con D. Grischott [6], coll'acido fosforico.

Le ricerche, condotte nel modo descritto più avanti, hanno portato a stabilire con certezza la tendenza alla formazione di sali ben definiti di metalli bivalenti, corrispondenti a due serie: una serie in cui il metallo e il vanadio sono nei rapporti 1 : 1, cioè la serie dei *pirosali*, e una seconda in cui il metallo ed il vanadio si trovano nel rapporto 1 : 2, cioè la serie dei *metasali*. Il complesso contiene nel primo caso per ogni molecola di anidride vanadica 3 molecole di anidride borica, nel secondo caso una sola molecola, per cui le formole generali sono:

$$2\,Me^{II}O \cdot V_2O_5 \cdot 3B_2O_3 \quad \text{e} \quad Me^{II}O \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3 \cdot$$

Non sempre è possibile ottenere questi composti allo stato puro perchè talvolta non è facile stabilire le condizioni di concentrazioni reciproche di partenza per evitare la formazione di sali più basici o di una miscela dei due composti appartenenti alle due serie. Risulta in ogni modo stabilito con certezza che quando il metallo e il vanadio sono nei rapporti esatti 1 : 1 e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1935.

(3) Abegg-Auerbach, «Handb. d. anorg. Chem.», vol. V, p. 724.

(4) Mellor, *A comprehensive treatise on inorg. and theoret. Chem.*, IX, 754.

(5) Pascal, *Traité de Chimie minerale*, IV, 245.

(6) «Rend. Lincei», XX, 2°, 391 (1934).

1 : 2, anche il boro è presente nella quantità stechiometrica richiesta dall'una o dall'altra delle due formule.

Il metodo di preparazione consiste nel fondere una miscela di ossido metallico (o carbonato, o idrato), anidride vanadica e anidride borica per alcune ore a circa 1000° in crogiolo di porcellana, rimescolando di tempo in tempo con spatola di platino. L'anidride borica è presente in grande eccesso e l'anidride vanadica nei rapporti stechiometrici rispetto all'ossido metallico, oppure in eccesso rispetto a questo, a seconda della tendenza più o meno grande dei metalli a formare sali basici.

Nei casi in cui si ha separazione di strati, lasciando raffreddare rapidamente il crogiolo estraendolo dal forno quando la massa è ancora fusa, si può facilmente separare lo strato inferiore, formato dal borovanadato e colorato sempre in scuro, da quello superiore consistente nell'eccesso di anidride borica, colorato più o meno intensamente dall'eccesso di anidride vanadica o da una piccola parte di borovanadato sciolto in esso. In alcuni casi, specialmente quando ho prolungato la fusione molto a lungo, ho avuto nello strato inferiore tracce di silice proveniente da attacco del crogiolo.

Pirosali.

Nella serie dei pirosali ho ottenuto composti puri per il piombo e per il cadmio.

2 $PbO \cdot V_2O_5 \cdot 3B_2O_5$ – Questo composto si ottiene puro partendo da ossido di piombo (preferibilmente massicot) e anidride vanadica nei rapporti stechiometrici 2 PbO:1 V_2O_5 e un eccesso di anidride borica (circa 8 molecole di B_2O_3 per 1 di PbO), mantenendo fusa la miscela per circa due ore a 900°. Lo strato inferiore, verde tendente al grigio, lucido, è nettamente separato da quello superiore leggermente giallo che è esente da piombo e contiene appena tracce di vanadio. Lo strato inferiore la cui polvere ha colore verde giallastro, notevolmente più chiaro del colore della massa, è formato dal borovanadato puro, come si vede dall'analisi:

	Calcolato per $2PbO \cdot V_2O_5 \cdot 3B_2O_3$	Trovato
PbO	53.32	53.36
V_2O_5	21.73	22.01
B_2O_3	24.95	24.28

2 $CdO \cdot V_2O_5 \cdot 3B_2O_3 \cdot$ – Questo composto non si forma puro partendo dai rapporti stechiometrici di idrato di cadmio e anidride vanadica, ma ha tendenza a dare sali più basici, e l'anidride vanadica rimane in parte sciolta nello strato superiore di anidride borica. Ho osservato che la reazione procede col tempo, e che partendo sempre da una miscela della stessa composizione

e prolungando la fusione per un tempo sempre più lungo, si ottengono composti in cui il rapporto Cd : V diminuisce tendendo all'unità, come dimostrano i seguenti dati:

Composizione della miscela di partenza: $2Cd(OH)_2 \cdot 1V_2O_5 \cdot 7B_2O_3$ (circa)

Durata della fusione	Composiz. strato inferiore		
	CdO	V_2O_5	Rapporto $2CdO/V_2O_5$
0^h $30'$ (circa)	45.27%	24.58%	1.303
2^h $30'$ »	41.70%	25.30%	1.168
8^h »	40.93%	26.90%	1.078

Ho ottenuto il composto puro partendo da una miscela contenente il 10 % in più del teorico in anidride vanadica e prolungando la fusione per circa tre ore e mezza a 1000°. Lo strato inferiore di color bruno nerastro in massa, grigio verde in polvere, ha dato all'analisi:

	Calcolato per $2CdO \cdot V_2O_5 \cdot 3B_2O_3$	Trovato
CdO	39.66	39.92
V_2O_5	28.09	28.18
B_2O_3	32.26	32.18

Di questa serie ho tentato di preparare anche i composti di rame e di zinco; col rame la miscela fonde stentatamente, ed essendo necessario aumentare la temperatura per completare la fusione, non ho potuto evitare una parziale riduzione dell'anidride vanadica. Collo zinco ho notato una tendenza a formare sali basici più grande che col cadmio; con un piccolo eccesso di anidride vanadica come nel caso precedente ho avuto un prodotto ancora assai ricco in zinco rispetto al vanadio, e con un eccesso più grande ho avuto una miscela con il borovanadato della serie dei metasali.

I composti di bario, tallio e argento fondono facilmente nelle condizioni analoghe ai precedenti, ma non dànno separazione di strati.

Metasali.

Nella serie dei metasali ho preparato puri i composti di piombo, cadmio e zinco.

$PbO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$. – Col piombo partendo dai rapporti stechiometrici $1PbO$; $1V_2O_5$, una parte dell'anidride vanadica, tende a rimanere disciolta nello strato superiore di anidride borica ed i composti che si ottengono sono sempre più ricchi in piombo. Si può in parte spostare l'equilibrio nel senso

della formazione del borovanadato, diminuendo la quantità dell'anidride borica presente, come si vede dalle prove fatte partendo da miscele con contenuto diverso di anidride borica e prolungando la fusione sempre per lo stesso tempo:

	Composiz. della miscela di partenza			Comp. strato inferiore		
	PbO	V_2O_5	B_2O_3	PbO	V_2O_5	Rapporto PbO/V_2O_5
1)	1	1	7(circa)	51.02%	32.50%	1.28
2)	1	1	3.5 »	49.13%	37.17%	1.08
3)	1	1	1.3 »	49.08%	40.16%	1.00

Come si vede nell'ultimo caso il rapporto PbO/V_2O_5 è uguale all'unità però la reazione non è finita. È quindi necessaria la presenza di un eccesso considerevole di anidride borica, perchè la reazione sia completa in un tempo relativamente breve (alcune ore). Ho potuto avere un prodotto puro, partendo da una miscela come in 2) con il 10% in più di anidride vanadica. In questo caso lo strato superiore è giallo, e quello inferiore di colore grigio acciaio molto scuro con riflessi metallici; la polvere è bruno–verdastra, notevolmente più scura del composto di piombo della serie dei pirosali. Analisi:

	Calcolato per $PbO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$	Trovato
PbO	47.02	47.45
V_2O_5	38.31	38.00
B_2O_3	14.67	14.27

$CdO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$. – Il composto di cadmio di questa serie è stato ottenuto abbastanza puro, come una massa vetrosa nera, lucente, la cui polvere è bruna–verdastra, da una miscela di una molecola di idrato di cadmio, 1,25 di anidride vanadica e 2,5 di anidride borica. Analisi:

	Calcolato per $CdO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$	Trovato
CdO	33.80	33.42
V_2O_5	47.88	48.12
B_2O_3	18.32	18.13

$ZnO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$. – Analogamente il composto di zinco si ottiene da una molecola di ossido di zinco, 1,5 di anidride vanadica e 3,5 (circa) di anidride borica. In massa è nero, più opaco del composto di cadmio, e la polvere è verde bruna, come la polvere del corrispondente borovanadato di cadmio. Analisi:

Calcolato per $ZnO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$		Trovato
ZnO	24.44	24.16
V_2O_5	54.64	54.81
B_2O_3	20.92	20.98

In tutte le analisi il vanadio venne determinato per titolazione con permanganato a caldo, dopo riduzione con acido solfidrico o anidride solforosa e prolungata ebollizione per cacciare l'eccesso di riducente. Più laboriosa è stata la determinazione dell'anidride borica, poichè la presenza dell'acido vanadico impedisce la titolazione diretta dell'acido borico con alcali in presenza di mannite o glicerina. Ho dovuto procedere alla separazione dell'acido borico distillandolo come borato di metile; il metodo classico di Rosenbladt–Gooch riportato da Treadwell (4ª ed. it., p. 449), cioè acidificazione con acido acetico, distillazione di questo, e poi aggiunta ripetuta di alcool metilico e distillazione, non mi ha dato buoni risultati; dopo parecchie distillazioni (circa 10) solo parte dell'acido borico era distillata. Ho giudicato essere necessario distillare il borato di metile in presenza di un acido fisso ed ho applicato perciò il metodo consigliato da Rodger J. Mannig e William R. Lang [1] con alcune modificazioni. Questo metodo consiste nel distillare per un'ora e mezza l'acido borico in presenza di acido solforico concentrato (20–30 cc.) e circa 350 cc. di alcool metilico. Nel mio caso ho dovuto prolungare la distillazione molto più a lungo perchè i borovanadati si decompongono solo assai lentamente in assenza di acqua. In certi casi ho dovuto distillare fino 500 cc. di alcool metilico per riuscire a separare tutto l'acido borico. Alla fine della distillazione tutta la sostanza è passata in soluzione nel caso dei composti di zinco e cadmio, e per il composto di piombo si ha un precipitato perfettamente bianco di solfato di piombo, mentre il liquido ha assunto una colorazione verde per la riduzione dell'acido vanadico.

Il distillato, raccolto in un eccesso di soluzione di idrato sodico, viene scaldato su b. m. fino a completa evaporazione dell'alcool; il residuo, acidificato con acido solforico diluito per decomporre il carbonato formatosi durante l'evaporazione, è scaldato all'ebollizione alcuni minuti in un pallone munito di refrigerante a ricadere per cacciare tutta l'anidride carbonica presente. Infine viene neutralizzato esattamente usando come indicatore la fenolftaleina e, dopo aggiunta di mannite, titolato l'acido borico con potassa N/4 esente da carbonato.

Confrontando i risultati di queste ricerche con quelli già pubblicati a proposito dei borofosfati, si nota una sicura tendenza tanto pel fosforo come

(1) « J. Soc. Chem. Ind. », *25*, 397; « Chem. Zentr. », 1906, II, 819.

pel vanadio a dare sali di acidi complessi col boro. Si presume che questi composti che pur si formano così nettamente da miscele fuse, siano invece facilmente idrolizzabili in soluzione acquosa. Infatti non mi è riuscito di preparare complessi di questo tipo in soluzione acquosa e la velocità di soluzione in acidi diluitissimi di questi complessi è molto superiore a quella dei corrispondenti fosfati e vanadati semplici pure fusi.

I borofosfati da me preparati, però, almeno quelli della serie dei pirosali che è la sola finora studiata, hanno un contenuto in anidride borica minore che i corrispondenti composti col vanadio: essi hanno infatti la formula generale: $2\,Me^{II}O \cdot P_2O_5 \cdot B_2O_3$. Ho ottenuto puri di questa serie i sali di rame e di piombo, mentre ho notato per lo zinco ed il cadmio una grande tendenza a formare sali basici come nei corrispondenti composti col vanadio.

Riassumendo. – Viene dimostrata l'esistenza di due serie di borovanadati del tipo: $2\,Me^{II}O \cdot V_2O_5 \cdot 3\,B_2O_3$; $Me^{II}O \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$.

Sono stati isolati allo stato puro i composti di piombo, cadmio e zinco corrispondenti alle formule: $2\,PbO \cdot V_2O_5 \cdot 3\,B_2O_3$; $2\,CdO \cdot V_2O_5 \cdot 3\,B_2O_3$; $PbO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$; $CdO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$; $ZnO \cdot V_2O_5 \cdot B_2O_3$.

Chimica. — *Azioni anomale dell'acido nitroso su idrazidi di acidi organici*[1]. Nota[2] di Maria Freri, presentata dal Socio G. Bruni.

La classica reazione di Curtius[3] ci insegna che le idrazidi reagisono con l'acido nitroso dando le azidi secondo l'equazione.

$$R \cdot CO \cdot NH \cdot NH_2 + HNO_2 = R \cdot CON = N \equiv N + 2\,H_2O\,.$$

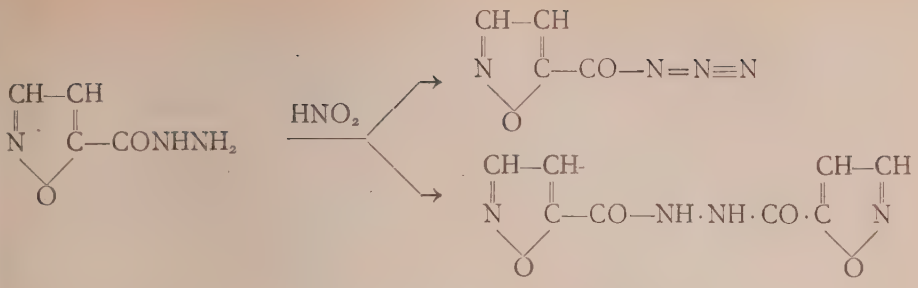
Se questo è vero in molti casi, non vale però per tutti, come ho potuto constatare, prendendo in considerazione un numeroso gruppo di acidi organici[4]: ho visto così come variando di poco le condizioni di esperienza si possa giungere in taluni casi a prodotti completamente differenti. Ho potuto dimostrare che l'α – isossiazolidrazide sotto l'azione di HNO_2 sviluppato da nitrito sodico e acido cloridrico dà regolarmente l'azide P.F. 37°; se invece, lasciando invariate tutte le altre condizioni, si usa CH_3COOH in luogo di HCl allora si giunge alla diidrazina simmetrica P.F. 212°.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1935.

(3) Curtius e coll., « Centralblatt » dal 1890 in poi.

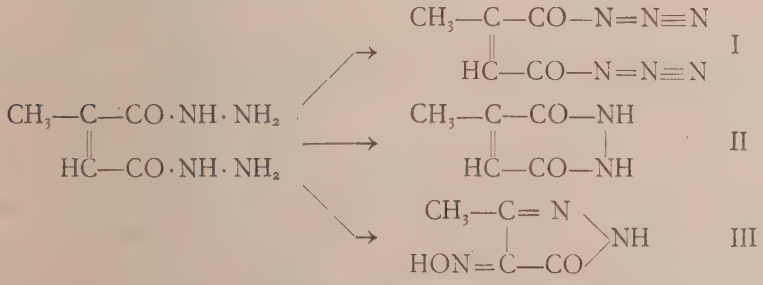
(4) M. Freri, « Gazz. Chim. Ital. », *62*, 459 (1932); *64*, 644 (1934); V Congresso di Chimica pura ed applicata. Cagliari, maggio 1935. « Gazz. Chim. Ital. », *65*.



Nel primo caso prevale regolarmente l'azione diazotante dell'acido nitroso, nel secondo, invece, l'azione ossidante.

Egualmente interessante è l'idrazide citraconica, che dà tre prodotti differenti. Se si agisce sulla soluzione diluita di idrazide citraconica (circa 0,4%) con HCl normale in presenza di $NaNO_2$ si separa l'azide P.F. 114° dec. regolarmente e con buon rendimento, (form. I).

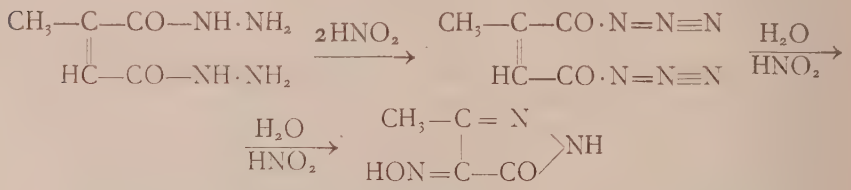
Se si fa agire sulla soluzione circa quindici volte più concentrata e contenente la quantità calcolata di nitrito sodico, l'acido acetico, si ottiene accanto ad un poco di azide la 4-metil-3,6 dioxo-1,2,3,4- tetraidropirazina P.F. 277° (form. II), la cui formula è stabilita dalla sintesi diretta da etere citraconico e idrato di idrazina e confermata dalla proprietà: infatti si scioglie facilmente negli alcali, può essere riprecipitata con acidi, e dà in soluzione acquosa diluita una intensa colorazione rossa con $FeCl_3$



Finalmente se sull'idrazide citraconica in soluzione acquosa concentrata si fa agire HNO_2 liberato da nitrito e HCl 30 % molto lentamente (in modo che l'azide che può in certi casi separarsi torni in soluzione), e se in questa soluzione si sviluppa dopo un certo tempo una nuova quantità di acido nitroso, si arriva al prodotto della form. III, cioè all'isonitroso metilpirazolone P.F. 232°. Questo prodotto è stato già ottenuto da Curtius [1] per azione di vapori nitrosi sul metilpirazolone, e da Betti per idrolisi dell'etere diazoacetico [2].

(1) Curtius, « Journ. f. Chem. », *50*, 512.
(2) M. Betti, « Gazz. Chim. Ital. », *34*, 179.

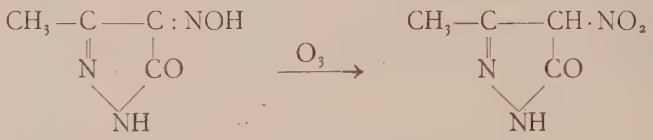
La formazione dell'isonitrosometilpirazolone mette in evidenza la somiglianza dell'acido citraconico, con gli acidi crotonici: in questi si spiega la condensazione molto facilmente, in quello è certamente un pò più difficile. La reazione per ora si può schematizzare così:



Vi sono certo reazioni secondarie, con formazione di altri prodotti intermedi come dimostra il fatto che si ha sviluppo di CO_2, formazione di acido acetico ed acido azotidrico, e ricco sviluppo di vapori nitrosi quando per avere l'isonitrosometilpirazolone lo si deve precipitare con acidi concentrati.

Per caratterizzare il prodotto cui a prima vista non avevo assegnato la formula che gli spetta, ho preparato alcuni derivati di cui dò cenno perchè in parte sono preparati attraverso nuove vie, in parte non sono conosciuti.

Molto interessante è il passaggio dell'isonitrosometilpirazolone a nitrometilpirazolone P.F. 276° per opera dell'ozono.

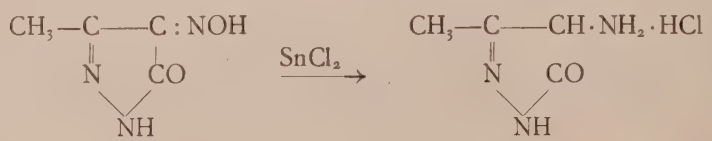


credo che nella letteratura vi sia un solo esempio analogo, posto in evidenza da Strecker e Thienemann [1] e cioè il passaggio dell'idrossilammina a nitrato di idrossilammina sotto l'azione di ossigeno ozonizzato.

Il nitrometilpirazolone ha proprietà acide più spiccate del prodotto da cui deriva, dà sali abbastanza stabili con l'anilina e la fenilidrazina, reagisce con il diazometano dando l' 1, 3, 4 trimetil, 4–nitropirazolone P.F. 127°.

Si può preparare direttamente dal metilpirazolone, facendo reagire questo con miscela solfonitrica raffreddata con cura.

Se si riduce con cloruro stannoso l'isonitrosometilpirazolone (od anche il nitrometilpirazolone) si ha con resa quantitativa il cloridrato dell'aminometilpirazolone che fonde a 225° in un liquido rosso scurissimo.



(1) Strecker e Thienemann, « Ber. », 53, 2096 (1920).

Questo prodotto si comporta come una vera amina aromatica e si condensa con le aldeidi dando delle basi di Schiff.

Ho preparato le basi di Schiff:

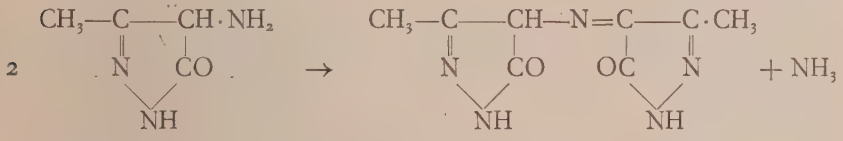
dall'aldeide p.nitrobenzoica $C_4H_5N_3O{=}CH.\ C_6H_4NO_2$ che ha un bel colore giallo rosato e fonde a 257° dec.;

dall'aldeide anisica, che si separa in bellissime pagliuzze splendenti, madreperlacee P.F. 202°;

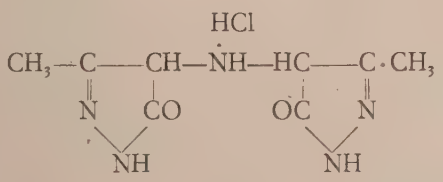
dall'aldeide piperonilica che si ha in aghetti minutissimi di un giallo arancio splendente e fonde a 245°.

Questi prodotti non si possono ricristallizzare perchè sotto l'azione dei solventi caldi si scindono nell'acido aromatico corrispondente all'aldeide impiegata, ed in una sostanza rossa che è il prodotto di spontanea ossidazione dell'aminoisossiazolo.

Come già scrisse il prof. Betti [1] quest'ultimo non si può avere libero, perchè si condensa subito con se stesso, con eliminazione di ammoniaca, dando un acido P.F. 283°, corrispondente all'acido rubazonico di Knorr [2].



questo prodotto che si separa con H_2O_2 dalle soluzioni neutralizzate del cloridrato in bellissime pagliuzze rosse a riflessi metallici, dà sali violetti con gli alcali, e si scompone facilmente con gli acidi. Con cloruro stannoso dà un prodotto di riduzione, le cui analisi corrispondono alla formula:



Si ottiene in aghi minutissimi bianchi P. F. 247° e per semplice neutralizzazione separa nuovamente l'acido di partenza.

A prodotti simili si giunge anche per riduzione e successiva ossidazione dell'1.3,4, trimetil, 4-nitropirazolone.

(1) M. Betti, loc. cit.

(2) Knorr, «Lieb. Ann.», 238, 192 (1887).

Geologia. — *Affioramento di gneiss pretriasici presso Acqui* [1]. Nota [2] di L. Peretti, presentata dal Socio F. Sacco.

La complessa serie di formazioni metamorfiche del mesozoico medio-inferiore (mesozoico a *facies* piemontese o serie o ricoprimento dei calcescisti a pietre verdi) che costituisce nell'Appennino Ligure Occidentale il Gruppo di Voltri, sovrapposta a SO nella regione del Savonese alle formazioni radicate o non del paleozoico superiore, contigua ad Est verso il Genovese, lungo una linea di contatto anomalo, con la serie cretaceo-eocenica degli argilloscisti a pietre verdi, scompare verso Nord e NO nell'Ovadese e nell'Acquese, sotto i depositi marini oligo–miocenici che la ricoprono con forte trasgressione, d'un potente regolare ammanto insinuante lembi isolati fin nel cuore del gruppo.

Estreme propaggini del Gruppo di Voltri verso Nord, serpentine e calcescisti affiorano nelle incisioni del Torrente Visone, mentre ancora più a settentrione fin nei pressi di Acqui serpentine e anfiboliti costituiscono la nota emersione collinosa di Bric Mazzapiede fra Prasco e Cremolino ed il piccolo spuntone sotto C. Polaca nel letto del rio Ravanasco presso Cavatore.

Fu in questa regione, nel centro delle Langhe, ad appena 5 chilometri a Sud di Acqui, che nello scorso autunno, durante il rilevamento geologico della Tavoletta *Ponzone* nel Foglio di Genova, rinvenni per la prima volta sotto i calcescisti a pietre verdi una serie di scisti cristallini sicuramente pretriasici i quali, e per la limitata loro area di affioramento e, ancor più, per la loro profonda alterazione superficiale, erano sfuggiti sinora agli studiosi della regione. Essi non figurano pertanto nè nella *Carta geologica delle Riviere liguri e delle Alpi Marittime* 1:200.000 di A. Issel, L. Mazzuoli e D. Zaccagna (Genova, 1887), nè nella *Carta Geologica della Liguria e dei terreni confinanti* 1:200.000 di A. Issel e S. Squinabol (Genova, 1890) nè nel fondamentale *Rilievo geologico del Massiccio arcaico ligure* 1:200.000 di G. Rovereto [3].

Subito ad Est di Grognardo, all'inizio della strada per Morbello, direttamente sotto i conglomerati tongriani a ciottoli di gneiss, serpentina, eufotide, anfiboliti, calcescisti, affiora per breve tratto un banco di gneiss minuto con lenti quarzose assai micaceo, che in alto passa decisamente a un mica-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia del R. Istituto Superiore d'Ingegneria di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1935.

(3) G. Rovereto, *Arcaico e Paleozoico nel Savonese.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XIV, fs. 1, Roma, 1895.

scisto arricciato ad occhietti di quarzo. Il banco pende a NNO di 40° circa, e costituisce l'imbasatura dello sprone occidentale del Bric Belvedere, come prova il comportamento degli strati di conglomerati ed arenarie oligoceniche, le quali, suborizzontali, a valle di Grognardo, quivi si rialzano pendendo a NNO di 25°.

Fra Bensi e C. Fonda si sovrappone agli gneiss una zona di prasiniti orneblendiche minute, poi si rientra in piena formazione micascistoso–gneissica, attraversandone i banchi regolarmente stratificati immergentisi a NE da 35° a 45°. Una fascia di calcescisci con lenti di calcare cristallino grigio–scuro si spinge sopra gli gneiss dal Bric Lajone verso C. Martin (a sua volta ricoperta nell'ansa di C. Martin da un velo di marne oligoceniche) con disposizione che pare concordare con quella degli gneiss.

Questi infine riappaiono nel ripido versante a mezzogiorno del Bric Lajone da C. Nani a Valosi, dove grandi cave per pietrisco stradale li pongono in evidenza, e dove se ne può osservare il contatto apparentemente normale coi calcescisti.

Il letto del torrente Visone da sotto C. Fonda sin sotto Morbello-Piazza, a monte della sua bipartizione nelle due radici del Rio Gamberella e del Rio dei Tre Alberghi, vi scorre profondamente incassato fra i banchi immergentisi con moderata pendenza ad Ovest, mentre superiormente i calcescisti alternati a scisti anfibolitici sono diretti ortogonalmente da Est ad Ovest. Verso Sud gli gneiss scompaiono sotto i calcescisti del castello di Piazza, pure discordantemente diretti da Est ad Ovest, che verso monte a lor volta cedono il posto alle anfiboliti di La Valle, cui segue la vastissima zona delle serpentine estesa ininterrotta fino a Sassello.

Non è fuor di luogo osservare sotto l'aspetto geomorfologico l'effetto dell'emersione degli gneiss massicci e tenaci: il torrente Visone vi serpeggia con bruschi meandri a fianchi scoscesi ed ertissimi, determinando un passaggio assai aspro, inconsueto in questi paesi. Anche dove la roccia è più profondamente fratturata e alterata (una coltre di sabbioni argillosi riveste tutta la parte occidentale del Bric Lajone, potente, a luoghi, fino a m. 8), essa è d'una desolante aridità, cosicchè i greppi, quasi privi di vegetazione arborea, spiccano fra i terreni circostanti come pure ne risalta il colore ocraceo rossiccio del detrito fra quello bruno dei calcescisti e quello giallo-marrone delle pietre verdi.

Quattro tipi petrograficamente distinti si possono osservare nella serie gneissica:

1° Micascisti scagliosi a muscovite e clorite, bianco-verdicci, fittamente arricciati, talora con tipica struttura microscopica di tettonite;

2° Gneiss a due miche a tessitura di lenticelle di quarzo e feldspati tra i letti micacei, con scistosità appena accennata. Ad eccezione della biotite in parte cloritizzata, i minerali costituenti sono assai freschi, malgrado le intense deformazioni per metamorfismo meccanico;

3° Gneiss a grana assai minuta, bianchi, a tessitura massiccia, subscistosi; la muscovite, piuttosto scarsa, è allungata nelle superfici di scistosità in liste parallele risultanti da un tritume di piccoli cristalli; vi è frequente una vera struttura milonitica;

4° Gneiss a tessitura ghiandolare, ben evidente nelle superfici normali a quelle di scistosità. I grossi individui di quarzo allungati lenticolarmente si risolvono spesso in un mosaico di granuli variamente orientati e con estinzione ondulata; i feldspati, ortoclasio e plagioclasi, torbidi, spesso sericitizzati, sono pure disposti in amigdale allungate fra gli elementi micacei. Questo tipo passa a gneiss con tessitura a letti paralleli fogliettati quarzoso–feldspatici.

I primi due tipi, traenti a micascisti, si rinvengono soprattutto nella parte sommitale della serie, gli ultimi nella parte basale, pur con ripetute alternanze e passaggi.

Inoltre, verisimilmente provenienti dalla distruzione, durante il terziario, di regioni costiere non lontane, sono frequenti nei conglomerati di Molare-Battagliosi grandi blocchi di uno gneiss biotitico granitoide occhiadino, in cui spiccano grossi idioblasti feldesplatici che non compare a giorno in alcun punto della regione, nè ha un preciso riscontro nelle rocce congeneri del Savonese: la sua giacitura come i suoi caratteri petrografici parrebbero attribuirlo ad un orizzonte ancor più antico di quello degli gneiss di Grognardo–Morbello.

L'area di affioramento degli gneiss è di quasi 2 Km^2; la loro potenza massima visibile, dalla incisione del torrente Visone al Bric Lajone, raggiunge i m. 400; la disposizione geometrica della pila di strati è quella d'una brachianticlinale o meglio d'una cupola (ciò che ne spiega l'affioramento e l'altitudine dell'isolato Bric Lajone, m. 574) dissimetrica, poichè la pendenza della gamba ad Est è più forte che non quella della gamba ad Ovest.

Quanto alla loro posizione stratigrafica e per la loro discordanza – seppure non comunque egualmente evidente lungo il perimetro dell'affioramento – coi calcescisti sovrastanti, e per la loro natura litologica, la loro potenza, la singolarità della loro giacitura unica nel gruppo di Voltri, questi gneiss non si possono in nulla assimilare alle lenti di gneiss minuti e micascisti che nelle Alpi Occidentali si intercalano talora ai calcescisti con pietre verdi. Notevole è poi l'assenza fra essi ed i calcescisti della serie di scisti rasati associati a gabbri e scisti glaucofanitici (*serie di Montenotte*) che secondo recenti osservazioni di G. Rovereto [1] con una certa regolarità rappresentano nel gruppo di Voltri un orizzonte distinto della serie calcescistosa al passaggio al trias superiore; mancano altresì i calcari di vario tipo del trias medio e le quarziti ed i quarzitoscisti del trias inferiore. La superficie di delimitazione fra gneiss e calcescisti ha inoltre spesso, come fu sopraccennato, il carattere di un contatto meccanico.

(1) G. Rovereto, *La serie di Montenotte come elemento costituente delle Alpi Occidentali e dell'Appennino.* « Atti R. Acc. Naz. Lincei », ser. 6ª, vol. XXI, fasc. VIII. Roma, 1935.

D'altra parte gli gneiss di Grognardo–Morbello non sono affatto analoghi litologicamente, nè omologhi, agli scisti gneissici, cloritici e sericitici ed agli scisti plumbei del permocarbonifero, nè alle miloniti gneissiche da metamorfismo di granito (appenniniti) che compaiono nel massiccio paleozoico di Savona. Una qualche rassomiglianza essi presentano al contrario – senza che per questo se ne possa decisamente indurre un effettivo collegamento – con gli gneiss minuti ed i micascisti propriamente detti, precarboniferi, variamente interpretati dai diversi Autori, che nel Savonese contornano la « finestra del Santuario ».

Comunque il loro affioramento, già assai significativo per la sua distanza dal massiccio cristallino savonese, ci rivela uno spessore impensatamente assai ridotto della sovrastante serie o ricoprimento mesozoico dei calcescisti, in gran parte già asportata dalle azioni esogene all'aprirsi del terziario.

Microbiologia. — *" Proteomyces infestans Moses e Vianna, 1913" e suoi rapporti col genere " Trichosporon Behrend, 1890 "*. Nota [1] di V. Puntoni [2], presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Proteomyces è un genere creato da Moses e Vianna nel 1913, per classificare un micete, *Proteomyces infestans*, isolato da un caso di micosi generalizzata ad ascessi multipli, avente l'aspetto clinico ed anatomo–patologico di una blastomicosi.

La minuta descrizione fatta dagli AA., dà, come caratteristica peculiare del micete isolato, la produzione di endoconidi nelle ife miceliari. Oltre a ciò risulta evidente anche la formazione di artrospore e di blastospore.

La produzione di endoconidi, sostenuta da Moses e Vianna, giustificò la creazione del nuovo genere *Proteomyces*.

Senonchè Ciferri, in uno studio compiuto nel 1930, sollevò « il dubbio che i presunti endoconidi non fossero altro che delle artrospore catenulate, e che lo stadio di formazione dei conidi endogeni, visto e figurato da Moses e Vianna, dovesse interpretarsi solamente come lo stadio di segmentazione del plasma cellulare per la formazione di spazi vuoti fra i singoli segmenti, preliminare questo conosciuto in altri artrosporei come in *Geotrichum* ».

Ed infatti accurate ricerche compiute direttamente su macroculture e su microculture confermarono la suddetta ipotesi.

Malgrado la dimostrata inesistenza di endoconidi, Ciferri considerò il genere *Proteomyces* assai ben caratterizzato per essere ritenuto valido. In considerazione che esso forma tanto artrospore quanto blastospore, la posizione

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1935.

(2) Dall'Istituto di Batteriologia della R. Università di Roma.

sistematica del genere, secondo Ciferri, «è da assegnarsi, fra i miceti che posseggono una forma blastosporea e una forma artrosporea di moltiplicazione, vale a dire fra le *Torulopsidaceae*» ... «e precisamente fra i generi *Mycotorula* Will e *Geotrichum* Link».

Il genere *Proteomyces* venne così accettato da parecchi micologi, e vediamo ad esempio che Verona e Nannizzi inglobano in esso, come sinonimo, il genere *Geotrichoides* creato da Langeron e Talice nel 1932.

Avendo studiato il *Proteomyces infestans*, sopratutto col metodo delle culture su vetro di Rivalier e Seydel, sono venuto a delle conclusioni che collimano perfettamente con quelle di Ciferri sui seguenti punti:

1) Inesistenza di veri endoconidi ed interpretazione delle forme ritenute tali da Moses e Vianna, come fase preparatoria della segmentazione delle ife in artrospore.

2) Esistenza di una forma di riproduzione per artrospore e di altra per blastospore.

3) Posizione sistematica del micete fra i funghi artrosporei, tipo *Geotrichum*, ed i funghi blastosporei filamentosi, tipo *Mycotorula*.

Non credo invece di poter accettare il punto di vista di Verona e di Nannizzi, nel senso di considerare il genere *Proteomyces* ed il genere *Geotrichoides* come sinonimi, perchè nei miceti classificati come *Geotrichoides* da Langeron e Talice, non ho mai potuto osservare la produzione di tipiche artrospore; ma solo di blastospore e di quelle speciali forme di transizione che vengono chiamate blasto–artrospore.

Per quanto riguarda la validità del genere *Proteomyces*, ho tratto la persuasione che essa non possa essere accettata.

Poichè Ota, nel 1926, studiando i caratteri botanici del genere *Trichosporon* Behrend 1890, ha stabilito che il fondamento morfologico di esso consiste nella contemporanea produzione di artrospore e di blastospore, sorgeva il legittimo dubbio di una identità di caratteri fra il genere *Trichosporon* ed il genere *Proteomyces*.

Ho perciò studiato in parallelo il *Proteomyces infestans* ed i più tipici *Trichosporon*, secondo il concetto di Ota, e sono venuto nel convincimento che esiste una perfetta identità dei loro caratteri fondamentali, riassumibile nei seguenti punti:

miceti che inizialmente formano per germinazione un vero micelio settato, che arieggia a quello dei geotrichi, ma che tende a ramificarsi piuttosto per branche laterali al di sotto dei setti, che con il tipo biforcato o triforcato;

successiva risoluzione di una parte delle ife in artrospore, mentre altri filamenti producono tipiche blastospore o catenelle di elementi a carattere misto (blasto–artrospore);

eventuale formazione di clamidospore e tendenza delle ife a disporsi a coremio;

colture su terrreni solidi (Sabouraud di prova) che non rivestono nè il tipo membranoso dei geotrichi, nè il tipo cremoso delle micotorulee, ma presentano invece un particolare *aspetto cerebroide*, rilevate, consistenti, circonvolute, aderenti al terreno, spesso irte di coremi ifali a punta di spazzola, bianco–giallastre inizialmente, poi brunastre; colonie isolate spesso a *tipo crateriforme*;

colture su terreni liquidi formanti pellicola superficiale per lo più consistente, che tende a cadere al fondo e poi a riformarsi;

attività proteolitiche limitate alla fusione lenta della gelatina e ad incostante peptonificazione del latte; assenza di produzione di indolo; attività saccarolitiche assenti.

L'assoluto parallelismo trovato fra il *Proteomyces infestans* ed i *Trichosporon* (*beigeli*, *giganteum*, *rugosum* ecc.) m'induce perciò ad affermare la sinonimia dei generi *Trichosporon* e *Proteomyces* ed a proporre di conseguenza l'adozione del primo e l'abolizione del secondo per motivi cronologici.

Proteomyces infestans Moses e Vianna 1913, diviene quindi *Trichosporon infestans* (Moses e Vianna 1913) Puntoni 1935.

Per quanto riguarda poi il genere *Geotrichoides*, esso dovrebbe subire la stessa sorte del genere *Proteomyces*, qualora prevalesse il punto di vista di Verona e Nannizzi. Ma, a mio parere, i miceti in esso classificati sono ben diversi dal micete di Moses e Vianna. sia per la mancanza di vere artrospore, sia per l'aspetto delle loro culture, a tipo prevalentemente cremoso, simili a quelle delle *Mycotoruleae*.

Pertanto il genere *Geotrichoides* Langeron e Talice non può essere assorbito dal genere *Trichosporon* ed, almeno provvisoriamente; rimane un genere valido delle *Torulopsidaceae Mycotoruleae* (Monilia in senso medico).

BIBLIOGRAFIA.

Moses e Vianna, *Sobre nova micose humana, causada per cogumelo ainda naõ descrito: « Proteomyces infestans »*. « Mem. Ist. Oswaldo Cruz », vol. 5, fasc. 2, pp. 192–210, 2 fig. e 5 tav. 1913.

Ciferri, *Contribuzioni alla sistematica delle Torulopsidaceae*. « Archiv für Protistenkunde », Bd 71, H 3, Jena, 1930.

Ciferri e Redaelli, *Studies on the Torulopsidaceae*. « Annales Mycologici », vol. XXVII, n. 3–4, Berlin, 1929.

Verona, *Sulla sistematica delle Mycotoruleae*. « Nuovo giornale botanico italiano », vol. XL, pp. 225–229. Firenze, 1933.

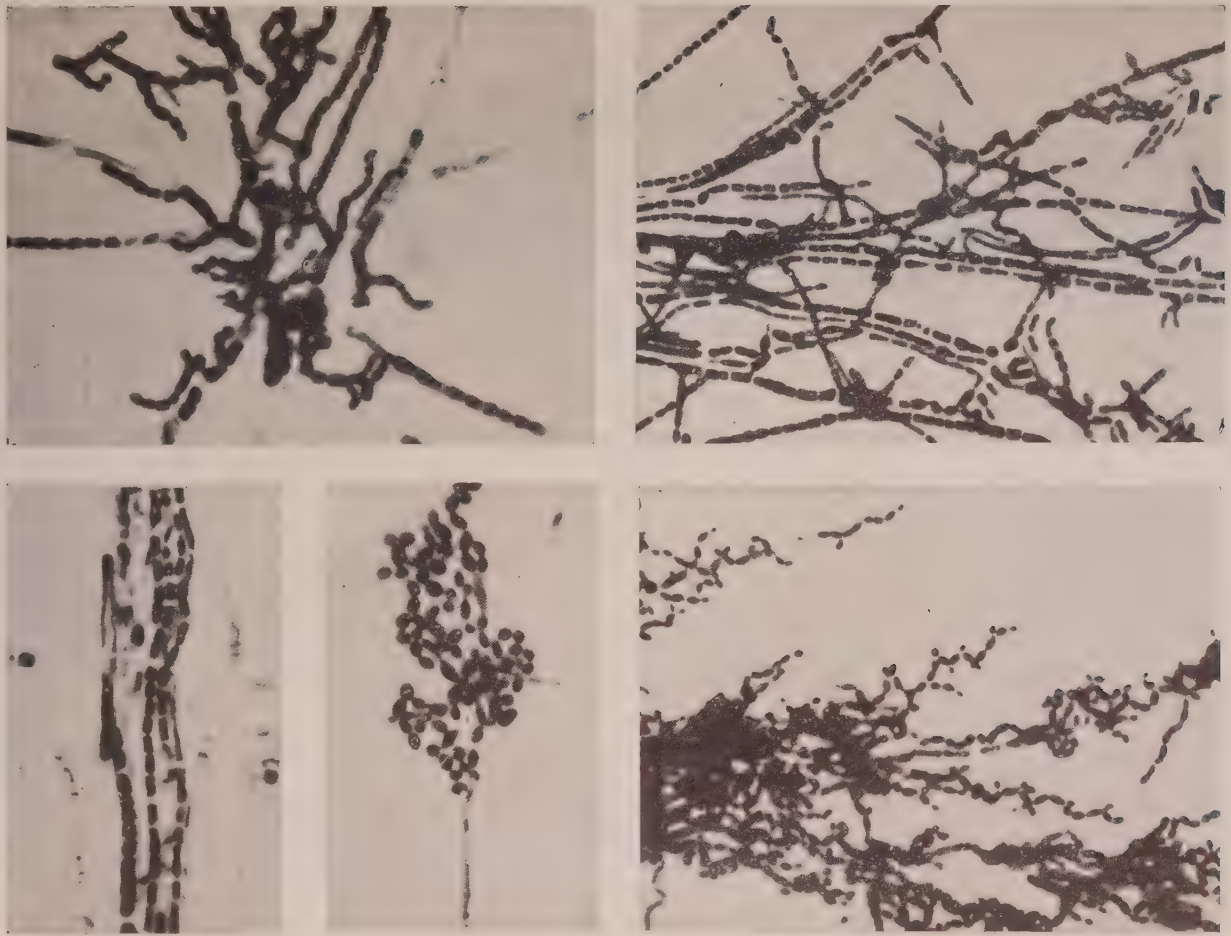
Nannizzi, *Repertorio sistematico dei miceti dell'uomo e degli animali*. (Trattato di micopatologia umana diretto dal prof. G. Pollacci, vol. IV) Siena, S. A. Poligrafica Meini, 1934, p. 398.

Langeron et Talice, *Nouvelles méthodes d'études et essai de classifications des champignons levuriformes*. « Annales de Parasitologie humaine et comparée », to. X, n. I, Paris 1932.

Rivalier et Seydel, *Nouveau procédé de culture sur lames gélosées appliqué à l'étude microscopique des champignons des teignes*. « Ann. de parasit. hum. et comp. », to. X. n. 5. Paris, 1932.

Puntoni, *Manuale di microbiologia medica*. II ediz., pp. 628–632, S. Bucciarelli ed. Roma, 1935.

N. P.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1935 (Anno XIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Meccanica. — *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria.* Nota[1] del Corrisp. U. Cisotti.

1. – *Profilo circolare con una sorgente.* — Si consideri nel piano $\zeta = \xi + i\eta$, essendo $i = \sqrt{-1}$, un profilo circolare $|\zeta| = 1$, il quale nel punto $\zeta = j = e^{i\alpha}$ abbia una sorgente di portata q. La velocità del moto, provocato nel piano $|\zeta| \geq 1$ da questa sorgente, è definita notoriamente [2] dalla seguente relazione:

$$w_s = \frac{q}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{2\zeta}\right). \tag{1}$$

Si tratta di un moto *locale*, cioè evanescente all'infinito; la velocità, complessa, w_s si mantiene regolare per $|\zeta| > 1$, e sul profilo $|\zeta| = 1$ diviene nulla nel punto $\zeta = -j$ e infinita nel punto $\zeta = j$.

2. – *Profilo circolare senza sorgente immerso in una corrente traslocircolatoria.* — Si supponga ora il profilo circolare $|\zeta| = 1$ senza sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria la cui velocità asintotica, di valore V, formi un angolo β coll'asse reale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1935.

(2) Masotti, *Moti piani indotti da una sorgente addossata ad un ostacolo.* « Acta Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei », Annus LXXXVII (1933–34), p. 253. Si può anche vedere la fig. 11 della mia recente Memoria *Sulla regolarizzazione idrodinamica degli estremi di una lamina rettilinea.* « Memoriae Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei », ser. III, vol. II, p. 71. La figura si riferisce al caso di $j = i$.

È ben noto [1] che la velocità, complessa, risulta definita dalla relazione

$$(2) \qquad w_0 = \frac{C}{2\pi i \zeta} + V\left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2}\right),$$

designando C la circolazione.

3. – *Profilo circolare con sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria.* — Nel moto definito dal titolo la velocità complessa è somma delle velocità che, in uno stesso punto, competono ai due moti definiti nei paragrafi precedenti; si ha quindi:

$$(3) \qquad w = w_0 + w_s,$$

essendo w_0 e w_s definiti dalla (2) e dalla (1).

4. – *Azioni dinamiche sul profilo.* — Chiamando R_ξ e R_η le componenti cartesiane delle pressioni dinamiche che subisce il profilo circolare da parte della massa fluida che lo circonda, e indicando con ρ la densità costante del fluido stesso, si ha la nota formula di Blasius:

$$(4) \qquad R_\eta + i R_\xi = -\frac{1}{2}\rho \int w^2 \, d\zeta,$$

l'integrazione andando estesa a tutta la circonferenza $|\zeta| = 1$ nel verso antiorario. Ora, per la (3), risulta

$$w^2 = w_0^2 + 2 w_0 w_s + w_s^2,$$

e dalla (1) scende che w_s^2 diviene infinita per $\zeta = j$ in modo che l'$\int w_s^2 \, d\zeta$ esteso alla circonferenza $|\zeta| = 1$ non ha significato; da questa osservazione si può dedurre che non ha significato l'$\int w^2 \, d\zeta$, e quindi la impossibilità di una valutazione diretta delle su accennate azioni dinamiche.

5. – *Calcolo di* $\int (w^2 - w_s^2)\, d\zeta$. — Malgrado che i due integrali $\int w^2 \, d\zeta$ e $\int w_s^2 \, d\zeta$, estesi alla circonferenza $|\zeta| = 1$ non abbiano significato, ci proponiamo di far rilevare che si può attribuirne uno preciso alla loro differenza:

(1) V., ad es., la mia Nota *Sulla regolarizzazione di salienti idrodinamici.* « Rend. del Sem. Mat e Fis. di Milano », vol. VIII (1934), p. 58, form. (4), dove le figg. 6, 7, 8 mostrano l'andamento delle linee di flusso, del resto ben noto.

$$(5) \qquad \int (w^2 - w_s^2)\, d\zeta = \int w_0^2\, d\zeta + 2\int w_0 w_s\, d\zeta,$$

avendone ciascuno dei due integrali al secondo membro.

Infatti, il primo, per la (2), dà il noto contributo:

$$(6) \qquad \int w_0^2\, d\zeta = 2\,C\,V\,e^{-i\beta}.$$

In quanto all'altro integrale, per la (1) e la (2), si ha:

$$\int w_0 w_s\, d\zeta = \frac{q}{\pi}\int \left[\frac{C}{2\pi i\zeta} + V\left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2}\right)\right]\left[\frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{2\zeta}\right] d\zeta.$$

Con calcoli elementari il secondo membro si può esprimere nel seguente modo:

$$\frac{q}{2\pi}\left(\frac{i\,C}{\pi j} - V e^{-i\beta} + \frac{2\,V e^{i\beta}}{j^2}\right)\int \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{q}{4\pi}\left(\frac{C}{i\pi} - \frac{4\,V e^{i\beta}}{j}\right)\int \frac{d\zeta}{\zeta^2} +$$

$$+ \frac{q\,V e^{i\beta}}{2\pi}\int \frac{d\zeta}{\zeta^3} + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{C}{i\pi j} + 2\,V e^{-i\beta} - \frac{2\,V e^{i\beta}}{j^2}\right)\int \frac{d\zeta}{\zeta - j};$$

ma è, notoriamente:

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \quad , \quad \int \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \int \frac{d\zeta}{\zeta^3} = 0,$$

e, per la formula del semiresiduo [1],

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta - j} = \pi i,$$

per cui si ottiene in definitiva:

$$\int w_0 w_s\, d\zeta = -\frac{q}{j}\left(\frac{C}{2\pi} - \frac{i\,V e^{i\beta}}{j}\right).$$

Sostituendo nella (5) quest'espressione, si ottiene tenendo presente la (6),

$$(7) \qquad \int (w^2 - w_s^2)\, d\zeta = 2\,C\,V\,e^{-i\beta} - \frac{q}{j}\left(\frac{C}{\pi} - \frac{2\,i\,V e^{i\beta}}{j}\right).$$

Questa formula attribuisce un significato preciso all'integrale al primo membro.

(1) Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie*. III Auflage, Berlin, Springer, 1929, p. 335.

6. — *Interpretazione dinamica. Effetti di zavorra.* — Se l' $\int w^2 \, d\zeta$ avesse significato, esso servirebbe, per mezzo della (4), a definire la risultante delle pressioni dinamiche subite dal profilo circolare nel moto complessivo dovuto alla sorgente e alla corrente traslocircolatoria; analogamente l' $\int w_s^2 \, d\zeta$, se avesse significato, servirebbe, per mezzo della formula:

$$R_\eta^{(s)} + i R_\xi^{(s)} = -\frac{1}{2} \rho \int w_s^2 \, d\zeta, \tag{8}$$

a definire la risultante delle pressioni dinamiche, sul profilo circolare, dovute al moto provocato dalla sola sorgente. Ma, come si disse, nè l'uno nè l'altro integrale ha un significato analitico, mentre, come si è visto nel paragrafo precedente: un significato analitico si può attribuire alla differenza, quello definito dalla (7).

Ciò premesso, viene spontaneo di pensare di scrivere:

$$R_\xi^* = R_\xi - R_\xi^{(s)} \quad , \quad R_\eta^* = R_\eta - R_\eta^{(s)},$$

anche se i singoli termini dei secondi membri non hanno significato analitico, e notare che, per la (4) e per la (8) *formalmente* si ha:

$$R_\eta^* + i R_\xi^* = -\frac{1}{2} \rho \int (w^2 - w_s^2) \, d\zeta.$$

Ma per la (7) il secondo membro risulta definito analiticamente, per cui si può scrivere:

$$R_\eta^* + i R_\xi^* = -\rho C V e^{-i\beta} + \frac{\rho q}{j} \left(\frac{C}{2\pi} - \frac{i V e^{i\beta}}{j} \right).$$

Da questa relazione, ponendo $j = e^{i\alpha}$, facilmente si ricava:

$$\boxed{R_\xi^* + i R_\eta^* = \rho C V e^{i\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\rho q C}{2\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} - \rho V q e^{i(2\alpha - \beta)}} \tag{9}$$

Per quanto si disse, il primo membro definisce *la differenza tra l'azione dinamica complessiva e quella relativa al moto dovuto alla presenza della sola sorgente e quindi l'azione dinamica dovuta alla corrente traslocircolatoria*; infatti è $R_\xi^* + i R_\eta^*$ eguale a zero quando è $C = V = 0$, cioè in assenza di corrente traslocircolatoria.

Si rilevi che *l'azione dinamica definita dalla* (9) *è risultante di tre forze:*

la prima

$$\rho C V e^{i\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

è *l'azione sostentatrice di Kutta-Joukowski*, cioè l'unica che si avrebbe se fosse $q = 0$, cioè in assenza di sorgente;

la seconda

$$\frac{\rho q C}{2\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)},$$

non dipende da V, *ed è diretta normalmente al diametro del profilo che ha per estremo la sorgente;*

la terza

$$-\rho V q e^{i(\beta+2\delta)} \quad , \quad \text{con} \quad \delta = \alpha - \beta,$$

è indipendente dalla circolazione C *e forma col verso opposto della velocità asintotica della corrente un angolo che è doppio dell'angolo che la velocità stessa fa col diametro che ha per estremo la sorgente.*

La seconda forza verrà chiamata in seguito: *effetto di zavorra dovuto alla circolazione* e la terza forza, *effetto di zavorra dovuto alla traslazione.*

7. – Si comprende che, mediante la rappresentazione conforme del piano forato circolarmente in un piano forato secondo un profilo di forma qualunque, la questione si possa risolvere anche per profili non circolari. E a questo proposito ritornerò sull'argomento in altra Nota.

Meccanica. — *Calcolo degli "effetti di zavorra" relativi ad una lamina rettilinea.* Nota[1] del Corrisp. U. Cisotti.

In una mia Nota precedente[2], riferendomi ad un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria, ho definito e valutato la differenza tra l'azione dinamica complessiva che subisce il profilo circolare e quella dovuta alla presenza della sola sorgente. Ho mostrato che oltre l'azione sostentatrice di Kutta-Joukowski intervengono altre azioni dovute alla presenza della sorgente e che ho denominato « effetti di zavorra ». Nella presente Nota applico i medesimi procedimenti, della Nota citata, al caso in cui il profilo rigido è una lamina rettilinea; forma che costituisce la prima schematizzazione elementare di un aeroplano.

1. – Richiami. — Nella Nota citata il moto si svolge, nel piano $\zeta = \xi + i\eta$, intorno al profilo circolare $|\zeta| = 1$, il quale nel punto $j = e^{i\alpha}$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1935.

(2) *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria.* Questi « Rendiconti », vol. XXII (2° sem. 1935), p. 275.

presenta una sorgente di portata q. La velocità nel moto provocato nel piano $|\zeta| \geq 1$ è definita dalla relazione

$$w_s = \frac{q}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{2\zeta}\right); \tag{1}$$

supponendo poi detto profilo circolare investito da una corrente traslocircolatoria, la cui velocità risulti definita dalla relazione:

$$w_0 = \frac{C}{2\pi i\zeta} + V\left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2}\right), \tag{2}$$

C = circolazione, $V e^{-i\beta}$ = velocità asintotica della corrente, il moto complessivo assume, in ogni punto, una velocità

$$w = w_0 + w_s . \tag{3}$$

2. – Lamina rettilinea. — La relazione

$$z = \frac{l}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{4}$$

mette in corrispondenza biunivoca e conforme il piano forato circolarmente $|\zeta| \geq 1$ e il piano $z = x + iy$ tagliato lungo il segmento rettilineo $-l \leq x \leq +l$, $y = 0$: alla semicirconferenza di ordinate positive corrisponde il bordo superiore del taglio, all'altra semicirconferenza il bordo inferiore e al punto all'∞ dell'uno il punto all'∞ dell'altro.

Mediante la (4) si può dedurre la velocità del moto nel piano z di una corrente traslocircolatoria che investe l'asta rigida rettilinea, essendo questa munita di una sorgente. Chiamando W la velocità, si ha [1]

$$W = w\frac{d\zeta}{dz}, \tag{5}$$

ovvero, per la (3) e la (4),

$$W = \frac{2}{l}(w_0 + w_s)\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} . \tag{6}$$

Questa relazione definisce la velocità W in termini di ζ, ma mediante la (4) essa si può riferire al piano z. Si rilevi dalla (4) stessa che la sorgente è ubicata sulla lamina nel punto

$$z_0 = \frac{l}{2}\left(j + \frac{1}{j}\right) = l\cos\alpha . \tag{7}$$

(1) Cisotti, *Sulla regolarizzazione di salienti idrodinamici.* [« Rend. del Sem. Mat. e Fis. di Milano »], vol. VIII (1934), § 5, formula (21).

3. – Azioni dinamiche. — Chiamando R_x e R_y le componenti cartesiane della risultante delle azioni dinamiche sulla lamina, e chiamando ρ la densità costante del fluido le note formule di Blasius esprimono la seguente relazione:

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\rho\int W^2\,dz\,,$$

l'integrazione andando estesa, nel verso antiorario, lungo il contorno della lamina costituito dai due bordi del taglio. Ma a noi conviene riferirci ancora al piano ζ, per cui, essendo, quando si tenga conto della (5),

$$W^2\,dz = w^2\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta = w^2\frac{d\zeta}{dz}\,d\zeta\,,$$

si può scrivere, tenendo conto della (4),

$$R_y + iR_x = -\frac{\rho}{l}\int w^2\left(1 + \frac{1}{\zeta^2 - 1}\right)d\zeta\,, \tag{8}$$

l'integrazione andando ora estesa, nel verso antiorario, a tutta la circonferenza $|\zeta| = 1$. Si possono applicare a quest'ultimo integrale le considerazioni svolte nei §§ 4 e 6 della precedente Nota, prima citata, e ridursi per il calcolo delle azioni in discorso alla considerazione della seguente relazione:

$$R_y^* + iR_x^* = -\frac{\rho}{l}\int\left(w^2 - w_s^2\right)\left(1 + \frac{1}{\zeta^2 - 1}\right)d\zeta\,,$$

dove R_x^* e R_y^*, riferite alla lamina, hanno l'analogo significato già stabilito nella precedente Nota citata. Si noti intanto che la precedente può scriversi nel seguente modo:

$$R_y^* + iR_x^* = -\frac{\rho}{l}\left[\int\left(w^2 - w_s^2\right)d\zeta + \int\frac{w^2 - w_s^2}{\zeta^2 - 1}\,d\zeta\right]. \tag{9}$$

Il primo dei due integrali del secondo membro è già stato calcolato (vedi la (7) della precedente Nota):

$$\int\left(w^2 - w_s^2\right)d\zeta = 2C\mathrm{V}e^{-i\beta} - \frac{q}{j}\left(\frac{C}{\pi} - \frac{2i\mathrm{V}e^{i\beta}}{j}\right). \tag{10}$$

Per il calcolo del secondo integrale, si noti che, per la (3), si può scrivere:

$$\int\frac{w^2 - w_s^2}{\zeta^2 - 1}\,d\zeta = \int\frac{w_o^2}{\zeta^2 - 1}\,d\zeta + 2\int\frac{w_o\,w_s}{\zeta^2 - 1}\,d\zeta\,.$$

Ora, applicando la formula del residuo nel polo interno $\zeta = 0$ e quella del semiresiduo nei poli $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ e $\zeta = i$ che appartengono al contorno, si ottiene, tenendo presenti le (1) e (2), e supposto $j^2 \neq 1$:

$$\int \frac{w_0^2}{\zeta^2 - 1} d\zeta = 2i \, \mathrm{CV} \operatorname{sen} \beta ,$$

$$\int \frac{w_0 w_s}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{q}{j} \left(\frac{\mathrm{C}}{2\pi} - \frac{i}{j} \mathrm{V} e^{i\beta} + j \mathrm{V} \operatorname{sen} \beta \right);$$

si ha dunque:

$$\int \frac{w^2 - w_s^2}{\zeta^2 - 1} d\zeta = 2i \mathrm{CV} \operatorname{sen} \beta + \frac{q}{j} \left(\frac{\mathrm{C}}{\pi} - \frac{2i}{j} \mathrm{V} e^{i\beta} + 2j \mathrm{V} \operatorname{sen} \beta \right).$$

Per questa e per la (9), la (8) può scriversi, con facili riduzioni:

$$\mathrm{R}_y^* + i \mathrm{R}_x^* = - \frac{2\rho \mathrm{V}}{l} (\mathrm{C} \cos \beta + q \operatorname{sen} \beta);$$

e poichè dalla (6), per (1) e (2), risulta

$$\mathrm{W}_\infty = \lim_{\zeta \to \infty} \mathrm{W} = \frac{2\mathrm{V}}{l} e^{-i\beta},$$

la quale mostra che β è l'angolo che la direzione asintotica della corrente forma colla lamina e che

$$| \mathrm{W}_\infty | = \frac{2\mathrm{V}}{l}, \tag{11}$$

si ha, in definitiva:

$$\mathrm{R}_y^* + i \mathrm{R}_x^* = - \rho \, | \mathrm{W}_\infty | \, (\mathrm{C} \cos \beta + q \operatorname{sen} \beta),$$

e quindi:

$$\boxed{\mathrm{R}_x^* = 0 \quad , \quad \mathrm{R}_{y_0}^* = - \rho \, | \mathrm{W}_\infty | \, (\mathrm{C} \cos \beta + q \operatorname{sen} \beta)} \, . \tag{12}$$

Questo risultato mi sembra notevole e mostra:

a) *che l'azione è sempre normale alla lamina,*

b) *è indipendente dalla ubicazione della sorgente (esclusi gli estremi),*

c) *quando* $q = 0$, *si trova per l'azione sostentatrice l'espressione già rilevata* [1],

d) *è nullo l'effetto di zavorra dovuto alla circolazione,*

e) *l'effetto di zavorra dovuto alla traslazione, è*

$$- | \mathrm{W}_\infty | \, q \operatorname{sen} \beta .$$

(1) Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Questi «Rendiconti», vol. V (1° sem. 1927), pp. 16-21.

4. – *Momento* — Riguardo al momento, rispetto al centro della lamina, delle azioni considerate precedentemente, esso è normale al piano del moto e definito dalla formula

$$M^* = -\frac{1}{2}\rho\,\mathfrak{R}\int(w^2 - w_s^2)\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(1 + \frac{1}{\zeta^2 - 1}\right)d\zeta\,,$$

designando $\mathfrak{R}$ « parte reale di » e l'integrazione andando estesa, in verso antiorario, ancora a tutta la circonferenza $|\zeta| = 1$.

L'applicazione dei medesimi criteri di calcolo impiegati precedentemente, porta attraverso a calcoli un po' laboriosi, ma non difficili, al seguente risultato:

$$M^* = -2\pi\rho V^2 \operatorname{sen} 2\beta - \rho q\left[\frac{C}{2\pi} - 2V \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\right].$$

Tenendo presente la (11) e notando che per la (7) è

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{l^2 - z_0^2}}{l},$$

valendo il segno + se la sorgente è aperta sul bordo superiore della lamina e il segno — nell'altro caso, si ottiene in definitiva:

$$(13)\qquad \boxed{M^* = -\frac{1}{2}\pi\rho l^2 |W_\infty|^2 \operatorname{sen} 2\beta - \rho q\left[\frac{C}{2\pi} \mp |W_\infty|\sqrt{l^2 - z_0^2}\cos\beta\right]}.$$

Come si vede *il momento dell'effetto di zavorra dovuto alla circolazione* è

$$-\rho\frac{qC}{2\pi}$$

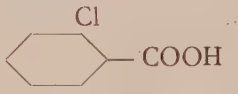
e quello dovuto alla traslazione è

$$\pm\rho q\,|W_\infty|\sqrt{l^2 - z_0^2}\cos\beta\,.$$

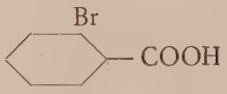
Chimica. — *Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati* [1]. Nota II [2] del Socio M. Betti e di M. Manzoni.

Come è noto, il cloro ha un comportamento più elettronegativo del bromo e questo dello jodio, ciò che sta in relazione anche con la posizione dei tre elementi nel sistema periodico. Anche secondo R. Wegscheider [3] l'influenza sul carattere elettronegativo di un radicale, tanto nella serie alifatica quanto nella serie aromatica, va diminuendo dal cloro allo jodio, e secondo O. Behagel [4] generalmente l'acidità degli acidi diminuisce col crescere del raggio ionico dei sostituenti, ciò che sta pure d'accordo con la successione cloro–bromo–jodio [5].

Ma fu già ricordato in una precedente Nota [6], che Ostwald nelle sue classiche ricerche sull'energia degli acidi organici [7], aveva riscontrata la strana singolarità che dei due acidi o-cloro ed o-bromobenzoico il secondo è più energico del primo, come risulta dal valore delle rispettive costanti di dissociazione, le quali mostrano come in questo caso il bromo conferisca al residuo organico unito al gruppo carbossilico un carattere più elettronegativo che non il cloro:



$K \cdot 10^4 = 13.2$



$K \cdot 10^4 = 14.5.$

A questa incongruenza non fu però data particolare importanza e probabilmente la si ritenne come dovuta o alla non completa purezza degli acidi esaminati o al fatto che in seguito a leggera idrolisi si staccasse più facilmente una traccia di acido bromidrico dal composto bromurato che non

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1935.

(3) « Monatshefte », *23*, 287 (1902).

(4) « J. pr. Chem. », [2], *114*, 287 (1926).

(5) Cfr. anche Lichty, « Ann. d. Chem. », *319*, 369 (1901), specialmente a p. 381. Per contrario alcuni anni fa R. Kuhn e A. Wassermann (« Helv. Chem. Acta », XI, p. 31, 1928) trovarono che cloro, bromo e jodio, nella posizione orto, esercitano sulla costante di dissociazione degli acidi alogeno-benzoici corrispondenti lo stesso effetto. I due AA. sperimentarono però con soluzioni acquoso-metilalcooliche al 50 %.

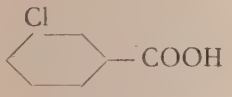
(6) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei » ser. 6ª, vol. XV, 1° sem. p. 509 (1932).

(7) « Zeitschr. für physikal. Chem. », *3*, p. 170 e seg. (1889).

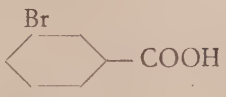
di acido cloridrico da quello clorurato e che a questa traccia di acido minerale liberatosi fosse dovuta l'apparente anomalia.

Ma, come fu fatto rilevare nella Nota sopra citata, la stessa anomalia si manifesta pure se il carattere elettrochimico di quei residui organici alogenati si desume per mezzo di valori polarimetrici (ottenuti impiegando soluzioni benzeniche), in base ad una relazione scoperta e messa in evidenza da uno di noi alcuni anni fa [1].

Nelle condizioni di questi acidi *orto*–alogeno–sostituiti il bromo si comporta quindi, indubbiamente, come più elettronegativo del cloro, mentre nei corrispondenti acidi che portano l'alogeno nelle posizioni *meta* o *para*, tale anomalia non si verifica.



$K \cdot 10^4 = 1.55$

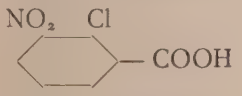


$K \cdot 10^4 = 1.37$

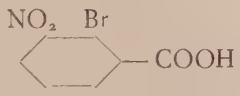
$K \cdot 10^4 = 0.93$

$K \cdot 10^4 = 0.65$

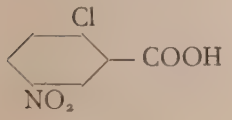
Ricercando nella letteratura abbiamo potuto rintracciare un altro esempio del genere, e cioè quello degli acidi alogeno–benzoici nitro–sostituiti nei quali si riscontrano pure particolarità analoghe; infatti mentre gli acidi nitrobenzoici *orto*–alogenati manifestano comportamento anomalo:



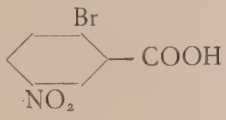
$K \cdot 10^4 = 87.0$ [2]



$K \cdot 10^4 = 120.0$

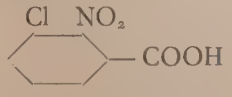


$K \cdot 10^4 = 62.0$

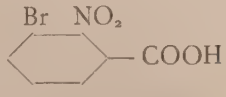


$K \cdot 10^4 = 91.0$

invece gli acidi nitro-benzoici, alogenati in *meta* o in *para*, non mostrano tale irregolarità:

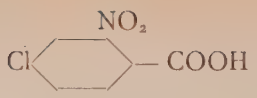


$K \cdot 10^4 = 44.0$

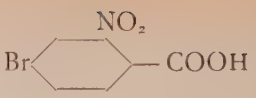


$K \cdot 10^4 = 34.0$

(1) M. Betti, « Transactions of the Faraday Society », XXVI, p. 337 (1930).
(2) A. F. Holleman, « Rec. trav. chim. Pays Bas », *20*, 360 (1901).



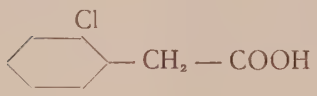
$K \cdot 10^4 = 4.6$ (1)

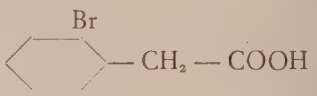


$K \cdot 10^4 = 4.2$ (2)

Era interessante esaminare se questa si manifestasse in altri composti.

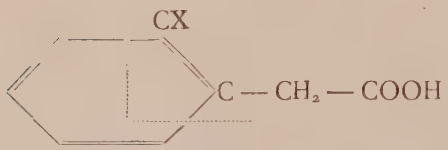
Un particolare interesse presentavano gli acidi orto–alogeno–fenilacetici:



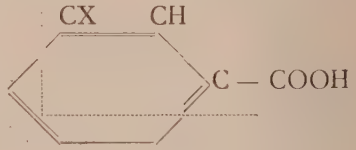


perchè se da un lato, come derivati orto–alogenati, si possono ravvicinare agli acidi orto–alogeno-benzoici, che, come ora si è visto, presentano la anomalia, d'altra parte essi hanno però l'alogeno unito ad un carbonio « distante » di due altri atomi di carbonio dal carbossile, come negli acidi meta–alogenobenzoici, che invece presentano comportamento regolare:

X = Cl o Br



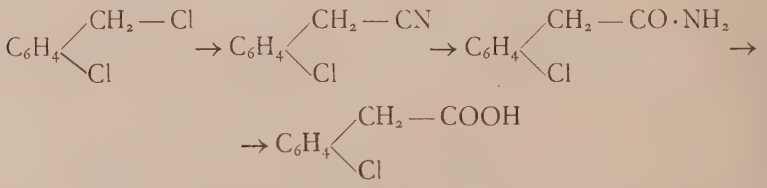
Acidi o–alogeno-fenilacetici



Acidi m–alogeno-benzoici

La preparazione di questi acidi è assai lunga e laboriosa e la loro completa purificazione è anche assai difficile.

Per la preparazione dell'*acido orto–cloro–fenilacetico* si può partire dal cloruro di orto–cloro–benzile, che per mezzo del cianuro di potassio viene trasformato nel corrispondente nitrile: questo per idrolisi in soluzione solforica concentrata si trasforma nell'amide, dalla quale per azione del nitrito sodico si passa all'acido. Queste operazioni vengono riassunte dallo schema seguente:



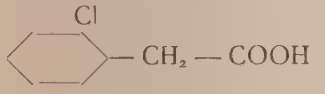
L'acido cristallizza in lunghi aghi lucenti, incolori che fondono a 94°.

(1) Bethmann, « Zeit für Physik. Chemie », 5, 392 (1890).
(2) Klemenc e Müller, « International Critical Tables », 1ª ediz., VI vol., p. 277.

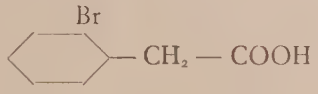
L'*acido orto–bromo-fenilacetico* si ottiene dall'orto–bromo–toluene che trattato con cloro a caldo si trasforma nel cloruro di orto–bromobenzile, dal quale con passaggi analoghi ai precedenti si giunge all'acido, che allo stato puro si presenta cristallizzato in aghi lucenti, quasi incolori che fondono 103°.

Anche la determinazione della costante di dissociazione di questi acidi è piuttosto delicata, stante la loro poco solubilità nell'acqua, che non permette di applicare con successo il consueto metodo basato sulla misura della resistenza elettrica. Queste determinazioni furono fatte impiegando il metodo potenziometrico sia per la misura dell'attività idrogenionica, sia per la titolazione.

Fu così riconosciuto che anche in questo caso l'acido bromurato è più energico di quello clorurato:



$K \cdot 10^4 = 1.35$



$K \cdot 10^4 = 1.92$

Sembrerebbe dunque che nel determinare l'anomalia avesse particolare importanza la posizione *orto* occupata dall'alogeno.

Altri composti saranno esaminati a tale proposito, poichè è presumibile che soltanto quando si avrà a disposizione un notevole numero di dati si potrà trovare la spiegazione di questo fatto assai singolare.

Terminando, ringraziamo il dott. Elio Lucchi che ha eseguito le determinazioni potenziometriche della costante di dissociazione di questi acidi.

Geologia. — *Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata* [1]. Nota [2] del Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Per cura del R. Ufficio Geologico è stato pubblicato, circa due anni or sono, il Foglio di Sansevero [3]; fra le innovazioni apportate ai vecchi rilevamenti è da notare la indicazione di una formazione calcareo-marnosa del Miocene medio, che vien per la prima volta riconosciuta in quella regione.

Data la particolare importanza per causa del grandissimo sviluppo che essa assume nei Fogli limitrofi, credo utile fornire sin da ora, con la presente Nota, qualche cenno illustrativo su quei terreni un po' più estesamente di quanto è stato da me fatto nella breve leggenda, che accompagna il Foglio.

La formazione, ora riferita al Miocene medio, è costituita di marne piuttosto tenere, di color chiaro, per lo più giallognolo, alternanti con strati poco spessi di calcare, anch'esso chiaro, talora grigio, duro, a grana un po' grossolana, talora passante a calcare più tenero od anche farinoso. Alle volte il calcare si presenta con aspetto un po' diverso: nella pasta si notano più o meno abbondantemente sparsi come dei noduli diversiformi di un calcare a tinta grigio oscura ed a grana più porosa. Questi noduli di varie dimensioni, ad occhio nudo, sembrano dei frammenti estranei, ma essi non sono altro che resti organici, per lo più colonie di briozoari ed alghe calcaree.

Nei pressi di S. Giuliano di Puglia, i calcari passano lateralmente ed anche in alto ad arenarie poco cementate di tinta giallo–carico ed a sabbioni dello stesso colore.

La formazione descritta occupa una superficie ristretta nel Foglio di San Severo, ma si sviluppa maggiormente nel limitrofo foglio di Larino (F. 154) e in quello di San Bartolomeo in Galdo (F. 163), che è in corso di rilevamento.

Verso il Tavoliere i depositi del Miocene medio sono ricoperti dalle argille turchine e dalle sabbie gialle del Pliocene.

I descritti calcari sono prevalentemente organogeni, essendo costituiti quasi interamente di resti vegetali ed animali. In quelli compatti abbondano i piccolissimi foraminiferi, nella maggior parte globigerine. In quelli a

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1935.

(3) Ved. *Foglio di San Severo* (F. 155 della Carta al 100.000) parzialmente rilevato dall'ing. E. Cortese e M. Cassetti, riveduto e completato dal prof. G. Checchia-Rispoli. Roma, 1932.

noduli, oltre ad alghe, specialmente sifonee, e a piccolissimi foraminiferi, si trovano numerose *Amphistegina* e piccole *Miogypsina*. Gli organismi più abbondanti sono i Briozoi, che formano i noduletti sopra accennati; molto meno abbondanti sono i molluschi, rappresentati da pettinidi ed i piccoli radioli di echinidi; rarissimi tubi di *Ditrupa incurva* si osservano pure qua e là.

Sulla superficie degli strati i fossili sono delle vere rarità. Con lunghe ricerche è stato possibile alla fine di raccogliere alcuni isolati elementi, che hanno permesso di precisare meglio l'età della formazione, già riferita all'Eocene medio. I più comuni sono dei pettinidi, che si trovano sempre allo stato di frammenti: i più grossi, che fortunamente presentano la superficie bene conservata, vanno riferiti a *Aequipecten scabrella*; un altro frammento sembra inseparabile da *Aequipecten Haveri*.

Rarissime e piccolissime ostriche sembrano da riferirsi con molta probabilità ad *Ostrea langhiana*. Più sicuramente determinabili sono alcuni grossi radioli, a superficie ben conservata, ma allo stato frammentario, di *Cyathocidaris avenionensis*. Invece più frequenti ed integri sono gli ittiodontoliti: oltre a piccoli denti di *Chrysophrys* sp. e di *Sargus* sp., abbondano quelli di *Oxyrhina hastalis* e di *Alopecias latidens*.

L'insieme dei fossili raccolti ed i caratteri della roccia, identici a quelli di altri calcari di vari punti dell'Appennino centrale di ben riconosciuta età, permettono di riportare la formazione in questione al Miocene medio.

Questa formazione viene ora per la prima volta riconosciuta nella regione; molto più estesamente sviluppata si ritrova in tutto l'Appennino della Capitanata, costituendo in gran parte i monti della Daunia e della Puglia.

L'ing. C. Migliorini ed io, in alcune escursioni recentemente eseguite nell'interesse degli studi sul petrolio, abbiamo potuto constatarne l'estensione nelle limitrofe regioni della Capitanata sino agli estremi limiti della Lucania. Per i suoi caratteri essa è facilmente riconoscibile.

Come ho dianzi accennato, questa formazione era finora da tutti riferita all'Eocene medio e tale riferimento si giustifica con il fatto che, qua e là, essa contiene delle nummuliti ed altri foraminiferi eocenici. Anche a me è stato dato di raccoglierne sporadicamente nel territorio già rilevato; con l'ing. Migliorini abbiamo potuto constatarne la presenza in altri punti, come per es., nei dintorni di Faeto, lungo la Valle del Cervaro ecc.; in via generale le nummuliti sono rare, per quanto talora ben conservate.

Con le progredite conoscenze che oggi si posseggono sulla formazione in questione, non è più possibile, d'ora innanzi, tale riferimento cronologico e le nummuliti, che in essa si raccolgono, si devono ritenere non in posto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla derivata di direzione dei tensori.* Nota [1] di E. Gugino, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

§ 1. Concetto informativo della ricerca.

Sia dato uno spazio riemanniano V_n ad n dimensioni, in una regione C del quale sia definito un tensore (**T**), di tipo e d'ordine qualsivoglia, per mezzo, ad esempio, delle sue componenti miste $T^{\cdots\cdots h_1\cdots h_\mu}_{i_1\cdots i_m}$ covarianti d'ordine m e contravarianti d'ordine μ, funzioni del posto, continue e derivabili. La derivata del tensore secondo una generica direzione l, appartenente a V_n, suole formalmente esprimersi, nei casi concreti, partendo dal tensore derivato. In modo preciso, ove si ricorra alle derivate covarianti $T^{\cdots\cdots h_1\cdots h_\mu}_{i_1\cdots i_m\cdots\cdots k}$ delle componenti di (**T**), non c'è che da saturare l'indice k di derivazione con l'analogo indice dei parametri $\frac{dx^k}{ds}$ della direzione prescelta; il sistema che si deduce ha manifestamente i medesimi indici di covarianza e di contravarianza del sistema dato e caratterizza globalmente un nuovo tensore $\frac{d(\mathbf{T})}{ds}$, il derivato di (T) secondo l, le cui componenti denoteremo con $\frac{dT^{\cdots\cdots h_1\cdots h_\mu}_{i_1\cdots i_m}}{ds}$.

Proposito nostro è quello di mostrare, che si può direttamente stabilire, in maniera più espressiva, nello spazio V_n, la nozione di tensore derivato di (**T**) secondo una generica direzione, indipendentemente dalla preventiva introduzione delle derivate covarianti. Considerando all'uopo il tensore infinitesimo: $d(\mathbf{T}) = \frac{d(\mathbf{T})}{ds} ds$, che ha per componenti:

$$dT^{\cdots\cdots h_1\cdots h_\mu}_{i_1\cdots i_m} = \frac{dT^{\cdots\cdots h_1\cdots h_\mu}_{i_1\cdots i_m}}{ds} ds$$

si riconoscerà agevolmente, che l'operatore differenziale d (da applicarsi al tensore (**T**) e per esso alle singole sue componenti) si può esprimere come

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1935.

differenza $d_n - d_p$ di due altri operatori differenziali, ciascuno dei quali, pur non avendo separatamente (almeno in generale), carattere tensoriale, possiede però un significato particolarmente notevole. Il $d_n(\mathbf{T})$, caratterizzato dalle componenti $d_n T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$, rappresenta l'incremento (in generale non tensoriale) di $(\mathbf{T})$ nel passaggio dal punto P (da cui emana la direzione l) ad un punto P′ infinitamente vicino, sulla l medesima; tale incremento, che chiameremo naturale [1], dipende esclusivamente dalla variabilità locale delle $T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$, funzioni delle coordinate x^i $(i = 1, 2, \cdots n)$ dei punti della regione C dello spazio dato.

Il $d_p(\mathbf{T})$, caratterizzato dalle componenti $d_p T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$, denota invece l'incremento (anch'esso in generale non tensoriale) di $(\mathbf{T})$ nel passaggio per parallelismo dal punto P al punto P′; ciò risulterà manifesto al § 2, nel caso di un vettore, in base alla nozione, introdotta dal prof. Levi-Civita, di trasporto infinitesimo di un vettore per parallelismo; risulterà ugualmente manifesto al § 4, in seguito alla generalizzazione [2], che faremo al § 3, di tale nozione, con riferimento ad un tensore di ordine qualunque. In conseguenza resta scisso in due parti il contenuto delle formule che definiscono le componenti del $\frac{d(\mathbf{T})}{ds}$; allorchè il contributo $\frac{d_p(\mathbf{T})}{ds}$, proveniente dal trasporto per parallelismo, è nullo (caso in cui le coordinate x^i siano geodetiche in P, o più particolarmente lo spazio V_n sia euclideo, riferito a coordinate cartesiane, oppure caso in cui il sistema tensoriale sia di ordine zero) gli incrementi naturali delle componenti di $(\mathbf{T})$ acquistano carattere tensoriale, sicchè dividendo tali incrementi per l'invariante ds, si ottengono le componenti del tensore derivato.

In ogni caso, per un tensore qualunque, in qualsivoglia sistema di coordinate, qualunque sia lo spazio V_n dato, risulterà, che il tensore $\frac{d(\mathbf{T})}{ds}$ potrà definirsi, conformemente ai metodi della ordinaria geometria differenziale, come rapporto incrementale, per mezzo cioè della differenza tra la determinazione del tensore in P′ e la determinazione, pure in P′, dello stesso tensore trasportatovi per parallelismo da P, divisa per l'intervallo ds tra P e P′. Con ciò la generica derivata covariante $T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots / k}$ si ritrova, in particolare, dalla derivata di direzione, supponendo che il punto P′, infinitamente vicino a P, sia situato sulla linea coordinata k passante per P; essa esprime il rapporto tra l'anzidetta differenza tensoriale,

(1) Denominazione introdotta da Schouten e Struik nel recente volume: *Einführung in die Neueren Methoden der differential Geometrie.* (P. Noordhoff, Groningen, 1935).

(2) Già indicata, sotto forma diversa, nella Memoria di P. Dienes, *Sur la structure mathématique des calcul tensorial.* « Journal de Mathématique pures et appliquées », 1924, pp. 79-106.

nel passaggio da P a P', ed il corrispondente incremento dx^k della coordinata x^k; in maniera del tutto conforme alla definizione usuale delle derivate parziali delle funzioni scalari.

§ 2. Derivata di direzione di un vettore.

Supponiamo, in particolare, che nella regione C dello spazio riemanniano dato sia definito un vettore **T** per mezzo, ad esempio, delle sue componenti contravarianti T^h, funzioni continue e derivabili delle coordinate. Nel passaggio da un punto P di coordinate x^k ad un punto P', infinitamente vicino, di coordinate $x^k + dx^k$, gli incrementi naturali delle componenti di **T** sono definiti dalle:

$$(1) \qquad d_n T^h = \frac{\partial T^h}{\partial x^k} dx^k ,$$

mentre gli incrementi dovuti al trasporto per parallelismo sono forniti dalle note espressioni del Levi-Civita:

$$(2) \qquad d_p T^h = - \left\{ \begin{matrix} j\ k \\ h \end{matrix} \right\} T^j \, dx^k .$$

Ora dalle formule della derivazione covariante:

$$T^h_{\cdot/k} = \frac{\partial T^h}{dx^k} + \left\{ \begin{matrix} j\ k \\ h \end{matrix} \right\} T^j ,$$

moltiplicando per dx^k e sommando rispetto a k, si ha:

$$T^h_{\cdot/k} \, dx^k = \frac{\partial T^h}{\partial x^k} dx^k + \left\{ \begin{matrix} j\ k \\ h \end{matrix} \right\} T^j \, dx^k .$$

Il primo membro non è altro che dT^h, secondo la definizione formale ricordata in principio; perciò, in base alle (1), (2), la formula testè scritta assume l'aspetto:

$$dT^h = d_n T^h - d_p T^h .$$

Le componenti del vettore $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ hanno pertanto le determinazioni:

$$(I) \qquad \frac{dT^h}{ds} = \frac{d_n T^h}{ds} - \frac{d_p T^h}{ds} = \frac{(T^h + d_n T^h) - (T^h + d_p T^h)}{ds}$$

$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

dove le due quantità entro parentesi denotano manifestamente la componente generica del vettore in P' e la componente analoga del vettore in P, trasportato per parallelismo in P'. Ponendo come formule di definizione

delle componenti del $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ i rapporti incrementali (I), con procedimento inverso, si ottengono direttamente, in maniera semplice ed espressiva, le formule di definizione delle derivate covarianti.

Nel caso particolare che $\mathbf{T}$ coincida col vettore unitario tangente ad una curva C dello spazio dato, nel senso degli archi s crescenti, notoriamente si ha: $T^h = \frac{dx^h}{ds}$; il derivato $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ secondo la direzione della tangente alla curva in un suo punto generico P, definito dai rapporti incrementali (I), è il vettore curvatura geodetica della curva in P; segue immediatamente la proprietà rilevata dal Lipka, che il valore assoluto della curvatura geodetica, si esprime, come nello spazio ordinario, quale rapporto tra angolo di contingenza ed arco elementare.

§ 3. Trasporto per parallelismo di un tensore qualunque.

Sia P un punto dello spazio dato, in cui sia definito un tensore ($\mathbf{T}$) (che per semplicità supporremo dapprima del secondo ordine) per mezzo delle componenti miste $T_i^{\cdot h}$. Si scelgano ad arbitrio due vettori ξ, η, applicati pure in P, e si formi l'invariante:

$$F = T_i^{\cdot h}\, \xi^i\, \eta_h .$$

Sia P′ un punto infinitamente vicino a P. La determinazione della forma F in P′ dipenderà manifestamente dagli incrementi che si attribuiscono agli argomenti ξ^i, η_h, nonchè ai coefficienti $T_i^{\cdot h}$.

Poniamo la condizione invariantiva, che F si mantenga inalterato, allorchè i vettori ausiliari ξ, η, si trasportino per parallelismo da P a P′. Gli incrementi $d_p T_i^{\cdot h}$ dei coefficienti (componenti del tensore) debbono allora essere scelti in modo da rendere

$$d_p T_i^{\cdot h}\, \xi^i\, \eta_h + T_i^{\cdot h}\, d_p \xi^i\, \eta_h + T_i^{\cdot h}\, \xi^i\, d_p \eta_h = 0 .$$

Esplicitando i $d_p \xi^i$, $d_p \eta_h$ con le note formule del parallelismo vettoriale, a calcoli eseguiti si ottiene:

$$\left[d_p T_i^{\cdot h} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} T_j^{\cdot h}\, dx^k + \left\{ \begin{matrix} j & k \\ h & \end{matrix} \right\} T_i^{\cdot j}\, dx^k \right] \xi^i\, \eta_h = 0 .$$

Il primo membro è una forma bilineare, che dovrà essere identicamente nulla comunque si scelgano i vettori ξ, η; debbono, in conseguenza, essere verificate le relazioni:

$$d_p T_i^{\cdot h} = \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} T_j^{\cdot h}\, dx^k - \left\{ \begin{matrix} j & k \\ h & \end{matrix} \right\} T_i^{\cdot j}\, dx^k$$

che definiscono il trasporto per parallelismo del tensore (**T**) del secondo ordine.

In generale, con procedimento analogo, per un tensore (**T**) di ordine qualunque, definito dalle componenti miste $T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$, si ottengono le seguenti equazioni, atte a definire il trasporto infinitesimo per parallelismo:

$$(3)\quad d_p T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} = \sum_1^m{}_r \left\{ \begin{matrix} i_r & k \\ j & \end{matrix} \right\} T^{\cdots\cdots\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_{r-1} j \; i_{r+1} \cdots i_m} dx^k -$$

$$- \sum_1^\mu{}_\varrho \left\{ \begin{matrix} j & k \\ h_\varrho & \end{matrix} \right\} T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_{\varrho-1} j \; h_{\varrho+1} \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} dx^k .$$

§ 4. Derivata di direzione di un tensore.

Con lo stesso svolgimento indicato al § 2, gli incrementi naturali delle componenti di un tensore (**T**) di ordine qualunque, nel passaggio da un punto P di coordinate x^k, ad un punto P′ di coordinate $x^k + dx^k$, sono definiti dalle:

$$(4)\qquad d_n T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} = \frac{\partial T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}}{\partial x^k} dx^k .$$

Gli incrementi dovuti al trasporto per parallelismo sono forniti dalle (3).

Dalle note espressioni delle derivate covarianti, mediante moltiplicazione per dx^k e saturazione dell'indice k, si ottiene:

$$T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots k} dx^k = \frac{\partial T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}}{\partial x^k} dx^k -$$

$$- \sum_1^m{}_r \left\{ \begin{matrix} i_r & k \\ j & \end{matrix} \right\} T^{\cdots\cdots\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_{r-1} j \; i_{r+1} \cdots i_m} dx^k +$$

$$+ \sum_1^\mu{}_\varrho \left\{ \begin{matrix} j & k \\ h_\varrho & \end{matrix} \right\} T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_{\varrho-1} j \; h_{\varrho+1} \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} dx^k .$$

Il primo membro (in base alla ordinaria definizione formale) è il $d T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$; perciò, in virtù delle (3), (4), la formula precedente può scriversi:

$$d T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} = d_n T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} - d_p T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} ,$$

da cui si ottengono, per le componenti del tensore derivato, le espressioni definitive:

$$(I') \qquad \frac{d\,T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}}{ds} =$$

$$= \frac{\left(T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} + d_n T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}\right) - \left(T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} + d_p T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}\right)}{ds}$$

col manifesto significato delle due quantità entro parentesi. Supponendo che P′ sia situato su di una linea coordinata passante per P (per es. sulla linea k, nel quale caso $dx^h = 0$ per $h \neq k$ e $ds = \sqrt{a_{kk}}\, dx^k$) dalle (I′), poste come formule di definizione delle componenti del $\frac{d\,(\mathbf{T})}{ds}$, direttamente si deducono le formule che definiscono le derivate covarianti, col manifesto significato intrinseco.

Matematica. — *Sul trasporto ciclico di un tensore di ordine qualunque.* Nota [1] di E. Gugino, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota precedente [2] abbiamo ripreso, semplificandola, la generalizzazione ai tensori di ordine qualunque del trasporto per parallelismo. E precisamente, essendo (**T**) un tensore qualsivoglia d'ordine $m + \mu$, definito dalle sue componenti miste $T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$, covarianti d'ordine m e contravarianti d'ordine μ, in un punto P di uno spazio riemanniano V_n ad n dimensioni, gli incrementi che tali componenti subiscono nel passaggio del tensore, per parallelismo, da P ad un punto P′ infinitamente vicino, sono definiti come segue:

$$(1) \qquad d_p T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} = \sum_1^m {}_r \begin{Bmatrix} i_r & s \\ j & \end{Bmatrix} T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_{r-1}\, j\, i_{r+1} \cdots i_m} dx^s -$$

$$- \sum_1^\mu {}_\varrho \begin{Bmatrix} j & s \\ h_\varrho & \end{Bmatrix} T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_{\varrho-1}\, j\, h_{\varrho+1} \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} dx^s .$$

Vogliamo ora occuparci in particolare del trasporto ciclico di (**T**) lungo un circuito infinitesimo γ, passante per P [3]. Riguardando (**T**) come funzione del posto, metteremo in luce la speciale circostanza che il tensore D (**T**), di componenti $DT^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m}$ (incrementi delle componenti analoghe

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1925.

(2) E. Gugino, *Sulla derivata di direzione dei tensori.* « Rend. R. Acc. Lincei » questo stesso vol., p. 290.

(3) Cfr. Pérès, *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne.* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXVII, 1° sem., 1919.

di (T) nel trasporto ciclico anzidetto) oltre che dagli elementi geometrici che valgono a caratterizzare il ciclo, dipende esclusivamente dalla asimmetria locale delle derivate seconde covarianti $T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots /rs}$ delle componenti del tensore di cui si tratta.

La considerazione di tali derivate implica l'esistenza, testè presupposta, di un campo tensoriale continuo e derivabile nelle immediate vicinanze di P. Un tale campo però ha, in ciò che segue, carattere semplicemente ausiliario; quello che a noi interessa è soltanto il tensore (T*), emisimmetrico rispetto all'ultima coppia di indici, di componenti:

$$(2) \qquad T^{*\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots /r} = T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots /rs} - T^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots /sr}$$

d'ordine $m + \mu + 2$; in base alle note formule di commutazione, tale tensore (T*) dipende esclusivamente dalle determinazioni locali del tensore di Riemann–Christoffel e del tensore dato (T) in P, anche quando quest'ultimo non provenga da un campo tensoriale continuo e derivabile in un intorno di P.

Intesi su ciò, denotiamo con u e v due vettori unitari, che determinino la giacitura π del ciclo γ, con θ l'angolo che essi formano tra di loro e con $D\Gamma$ l'area racchiusa dal ciclo. Le componenti del tensore D (T) avranno le espressioni:

$$(I) \qquad DT^{\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m} = \frac{D\Gamma}{\operatorname{sen}\theta} T^{*\cdots\cdots h_1 \cdots h_\mu}_{i_1 \cdots i_m \cdots\cdots /rs} u^r v^s,$$

valide, in particolare, anche nel caso in cui il tensore (T) si riduca ad un vettore (componenti dipendenti da un solo indice). Al tensore finito (T*), le cui componenti intervengono nelle (I), possiamo attribuire la denominazione di *derivato ciclico di* (T) *in* P, poichè esso è atto a caratterizzare l'incremento tensoriale subìto da (T) nel trasporto per parallelismo lungo un ciclo infinitesimo qualunque passante per P.

Per semplicità, consideriamo dapprima un tensore doppio (T), definito in P dal sistema misto $T^{\cdot h}_i$, con un solo indice di covarianza i ed un solo indice di contravarianza h. A meno di un preliminare cambiamento delle coordinate x^i ($i = 1, 2, \cdots, n$) dei punti dello spazio dato in $x^i + \text{cost}$, possiamo sempre supporre che le x^i si annullino in P; sia ε il massimo modulo dell'insieme dei valori delle coordinate x^i dei punti di γ. Per lo spostamento infinitesimo di (T) da un punto qualsivoglia del ciclo γ di coordinate x^i, ad un punto di coordinate $x^i + dx^i$, le componenti $T^{\cdot h}_i$ di (T), con riferimento alle (1), subiscono gli incrementi:

$$(2) \qquad d_p T^{\cdot h} = \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} T^{\cdot h}_j \, dx^s - \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\} T^{\cdot j}_i \, dx^s \qquad (i, h = 1, 2, \cdots, n).$$

Per lo spostamento ciclico lungo γ si ha in conformità:

$$(3)\qquad \mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \int_{(\gamma)} \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_j^{\cdot h}\, dx^s - \int_{(\gamma)} \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_i^{\cdot j}\, dx^s \qquad (i, h = 1, 2, \cdots, n).$$

Ricorrendo allo sviluppo in serie dei simboli di Christoffel e delle componenti di (**T**), che intervengono nei secondi membri delle (3), calcoleremo gli incrementi $\mathrm{DT}_i^{\cdot h}$ a meno di quantità del terzo ordine rispetto ad ε. Si ha pertanto:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\}_{\mathrm{P}} + \left(\dfrac{\partial \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\}}{\partial x^r} \right)_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{E}\varepsilon^2 \\ \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\}_{\mathrm{P}} + \left(\dfrac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\}}{\partial x^r} \right)_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{E}'\varepsilon^2 \end{cases}$$

con E, E' quantità finite lungo la curva di integrazione γ; avendo inoltre riguardo alle (2), equivalenti al sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial \mathrm{T}_i^{\cdot h}}{\partial x^s} = \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_j^{\cdot h} - \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_i^{\cdot j} \qquad (i, h, s = 1, 2, \cdots, n),$$

con analogo sviluppo, si ha:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{T}_j^{\cdot h} = (\mathrm{T}_j^{\cdot h})_{\mathrm{P}} + \left(\dfrac{\partial \mathrm{T}_j^{\cdot h}}{\partial x^r} \right)_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{H}\varepsilon^2 = \\ \qquad = (\mathrm{T}_j^{\cdot h})_{\mathrm{P}} + \left[\left\{ \begin{matrix} j & r \\ l & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_i^{\cdot h} - \left\{ \begin{matrix} l & r \\ h & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_i^{\cdot l} \right]_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{H}\varepsilon^2 \\ \mathrm{T}_i^{\cdot j} = (\mathrm{T}_i^{\cdot j})_{\mathrm{P}} + \left(\dfrac{\partial \mathrm{T}_i^{\cdot j}}{\partial x^r} \right)_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{H}'\varepsilon^2 = \\ \qquad = (\mathrm{T}_i^{\cdot j})_{\mathrm{P}} + \left[\left\{ \begin{matrix} i & r \\ t & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_t^{\cdot j} - \left\{ \begin{matrix} l & r \\ j & \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_i^{\cdot l} \right]_{\mathrm{P}} x^r + \mathrm{H}'\varepsilon^2 \end{cases}$$

dove H, H' si mantengono finite su γ. Dalle (3), in base alle (4), (5), con qualche opportuno cambiamento di indice muto, sopprimendo dalle parentesi la lettera P introdotta per indicare le determinazioni nel punto P, si ottiene:

$$(6)\quad \mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \left[\left(\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\}}{\partial x^r} + \left\{ \begin{matrix} i & s \\ t & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t & r \\ j & \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{T}_j^{\cdot h} - \left(\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & s \\ h & \end{matrix} \right\}}{\partial x^r} - \left\{ \begin{matrix} j & r \\ t & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t & s \\ h & \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{T}_i^{\cdot j} - \right.$$

$$\left. - \left(\left\{ \begin{matrix} l & r \\ h & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & r \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & s \\ h & \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{T}_j^{\cdot l} \right] \int_{(\gamma)} x^r\, dx^s \qquad (i, h = 1, 2, \cdots, n).$$

Permutando r con s, badando alle identità $\int_{(\gamma)} x^r\,dx^s = -\int_{(\gamma)} x^s\,dx^r$, possiamo scrivere:

$$(6')\quad \mathrm{DT}_i^{\cdot h} = -\left[\left(\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i & r \\ j & \end{matrix} \right\}}{\partial x^s} + \left\{ \begin{matrix} i & r \\ t & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t & s \\ j & \end{matrix} \right\}\right) \mathrm{T}_j^{\cdot h} - \left(\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & r \\ h & \end{matrix} \right\}}{\partial x^s} - \left\{ \begin{matrix} j & s \\ t & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t & r \\ h & \end{matrix} \right\}\right) \mathrm{T}_i^{\cdot j} - \right.$$

$$\left. - \left(\left\{ \begin{matrix} t & s \\ h & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & r \\ j & \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & s \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t & r \\ h & \end{matrix} \right\} \right) \mathrm{T}_j^{\cdot t} \right] \int_{(\gamma)} x^r\,ds^s.$$

Sommando membro a membro le (6) e (6'), per le note formule che definiscono i simboli di Riemann-Christoffel di seconda specie, si deduce:

$$2\,\mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \left[- \{ ij\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_j^{\cdot h} + \{ jh\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_i^{\cdot j} \right] \int_{(\gamma)} x^r\,dx^s.$$

Permutando ancora r con s, per la nota proprietà di emisimmetria degli anzidetti simboli, e sommando si perviene alla:

$$(7)\quad 4\,\mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \left[- \{ ij\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_j^{\cdot h} + \{ jh\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_i^{\cdot j} \right] \int_{(\gamma)} (x^r\,dx^s - x^s\,dx^r).$$

Ponendo: $\sigma^{is} = u^r v^s - u^s v^r$, notoriamente si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{(\gamma)} (x^r\,dx^s - x^s\,dx^r) = \frac{\mathrm{D}\Gamma}{\operatorname{sen}\theta}\, \sigma^{rs}$$

col noto significato dei simboli. La (7) può allora mettersi sotto la forma:

$$\mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \frac{\mathrm{D}\Gamma}{2 \operatorname{sen}\theta} \left[- \{ ij\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_j^{\cdot h} + \{ jh\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_i^{\cdot j} \right] \sigma^{rs}$$

o più semplicemente:

$$(8)\quad \mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \frac{\mathrm{D}\Gamma}{\operatorname{sen}\theta} \left[- \{ ij\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_j^{\cdot h} + \{ jh\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_i^{\cdot j} \right] u^r v^s.$$

Per le note formule di commutazione:

$$\mathrm{T}_{i\,\cdot/rs}^{\cdot h} - \mathrm{T}_{i\,\cdot/sr}^{\cdot h} = - \{ ij\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_j^{\cdot h} + \{ jh\,,\, rs \}\, \mathrm{T}_i^{\cdot j}$$

con riferimento alle (2) circa la definizione delle componenti di $(\mathbf{T}^*)$, derivato ciclico di $(\mathbf{T})$ in P, le (8) assumono l'aspetto definitivo:

$$(8')\quad \mathrm{DT}_i^{\cdot h} = \frac{\mathrm{D}\Gamma}{\operatorname{sen}\theta}\, \mathrm{T}_{i\,\cdot/rs}^{*h}\, u^r v^s.$$

Nel caso di un tensore (**T**) di ordine qualsivoglia, con procedimento analogo si stabiliscono le formule generali (I).

Se **T** in particolare è un vettore si ha:

$$(8'') \qquad DT^h = \frac{D\Gamma}{\operatorname{sen}\theta}\, T^{*h}_{\cdot jrs}\, u^r\, v^s$$

con:

$$T^{*h}_{\cdot jrs} = \{ jh\,,\, rs \}\, T^j .$$

Si riconosce agevolmente, che se lo spazio V_n dato è euclideo, risulta identicamente nullo il derivato ciclico **T*** di qualsivoglia vettore e più generalmente di qualsivoglia tensore. Viceversa, se il derivato ciclico di un vettore qualunque in ogni punto P di V_n è nullo, dovranno avere luogo le relazioni:

$$(9) \qquad \{ jh\,,\, rs \}\, T^j = 0$$

per tutte le possibili scelte degli indici h, r, s, e delle componenti T^j di **T**; dovranno in conseguenza essere nulli i simboli di Riemann-Christoffel, nel punto generico P, e lo spazio V_n dato dovrà necessariamente essere euclideo; il derivato ciclico di qualsivoglia tensore risulta allora identicamente nullo. Si conclude quindi, che l'annullarsi del derivato ciclico di qualsiasi vettore in ogni punto P di V_n, è condizione caratteristica perchè lo spazio sia euclideo.

Osserviamo pertanto che se in un punto P dello spazio dato esiste un vettore $\boldsymbol{w}$, diverso da zero, il cui derivato ciclico sia nullo, risulta nullo anche il derivato ciclico di qualsiasi altro vettore **T** (della varietà lineare tangente in P a V_n).

Infatti, per l'ipotesi ammessa, in base alle (8'') riferite al vettore $\boldsymbol{w}$, è nullo il vettore infinitesimo $D(\boldsymbol{w})$, qualunque sia la giacitura π del ciclo γ passante per P; è quindi nullo l'angolo di cui ruota il vettore $\boldsymbol{w}$, per effetto del trasporto ciclico su γ, e con esso risulta nulla la curvatura dello spazio in P, relativa alla generica giacitura π; il tensore di Riemann-Christoffel dovrà essere nullo in P; sarà allora nullo il derivato ciclico di qualsiasi tensore (**T**) in P.

Rileviamo infine, che per h variabile da 1 ad n e per tutte le combinazioni semplici degli indici r ed s, il sistema di equazioni (9), lineari ed omogenee nelle T^j, non ammette soluzioni proprie se uno almeno dei coefficienti $\{ jh\,,\, rs \}$ è diverso da zero, nel generico punto P dello spazio dato.

L'esistenza, infatti, di soluzioni proprie di tale sistema di $\frac{n^2(n-1)}{2}$ equazioni, implica l'esistenza di almeno una direzione λ di vettori $\boldsymbol{w}$, aventi derivati ciclici nulli in P. Per la superiore osservazione, risulta nulla la curvatura dello spazio in P; ivi quindi si annullano i simboli di Riemann–Christoffel; ne segue che se uno almeno di tali simboli è diverso da zero, la caratteristica della matrice dell'anzidetto sistema è uguale ad n.

Matematica. — *Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre*[1]. Nota[2] di G. Doetsch, presentata dal Socio G. Fubini.

... Mi permetta alcune osservazioni a proposito dei Suoi lavori nei « Rendiconti dei Lincei » di quest'anno, lavori che mettono in luce l'importanza dei polinomi di Laguerre per la trasformazione di Laplace, e reciprocamente:

1) Ricapitolando la Sua dimostrazione si vede che le due belle formule[3]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t}) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha+n+1)} = e t^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t}) \quad (\alpha > -1)$$

possono subito generalizzarsi nel modo seguente:

$$(1_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n = e^x J_0(2\sqrt{xt}) \quad , \quad (1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha+n+1)} x^n = e^x (xt)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xt}).$$

Sotto questa forma esse possono considerarsi come due nuove *equazioni generatrici* per i polinomi $L_n(t)$, risp. $L_n^{(\alpha)}(t)$, le cui consuete equazioni generatrici sono invece:

$$(2_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) x^n = \frac{1}{1-x} e^{-\frac{tx}{1-x}} \quad , \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t) x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} e^{-\frac{tx}{1-x}}.$$

Dico che le antiche e le nuove equazioni generatrici sono « equivalenti », nel senso che possono trasformarsi le une nelle altre per mezzo della trasformazione di Laplace:

$$(3) \qquad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\}.$$

Invero, se la (1) si scrive sotto la forma

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(z)}{\Gamma(\alpha+n+1)} t^{n+\alpha} = e^t \left(\frac{t}{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{zt}),$$

(1) Traduzione di una lettera al prof. F. Tricomi, Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1935.

(3) F. Tricomi, *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* – II. *Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.* « Rend. Lincei », *21* (1935), pp. 332-335. [Formule (11) e (11*)].

la trasformata di Laplace del primo membro è

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z)\,\frac{1}{s^{n+\alpha+1}};$$

ma, d'altro lato, si ha notoriamente:

$$\mathfrak{L}\left\{t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{zt}\right)\right\} = \frac{z^{\frac{\alpha}{2}}}{s^{\alpha+1}}\, e^{-\frac{z}{s}},$$

donde, essendo la moltiplicazione per e^t della funzione da trasformarsi equivalente al cambiamento di s in $s-1$, segue:

$$\mathfrak{L}\left\{e^t t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{zt}\right)\right\} = \frac{z^{\frac{\alpha}{2}}}{(s-1)^{\alpha+1}}\, e^{-\frac{z}{s-1}};$$

dunque la trasformata di Laplace dell'equazione (4) è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z)\,\frac{1}{s^{n+\alpha+1}} = \frac{1}{(s-1)^{\alpha+1}}\, e^{-\frac{z}{s-1}}.$$

Si sostituisca ora $\frac{1}{s}$ con x, si avrà così:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z)\, x^{n+\alpha+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\alpha+1}}\, e^{-\frac{z}{\frac{1}{x}-1}}$$

donde, con facili trasformazioni, segue l'equazione (2).

2) La notevole formula [1]:

$$(5)\qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)]\,[L_n(b) - L_{n-1}(b)] = e^{\min(a,b)},$$

da Lei ottenuta sviluppando in serie di Laguerre la speciale funzione

$$T_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{per } t \geq a \end{cases}$$

e integrando, può anche essere ottenuta per mezzo di due successive trasformazioni di Laplace.

Invero, se si trasforma il primo membro della (5) anzitutto rispetto ad a, cioè se si forma

(1) F. Tricomi, *Ancora sull' inversione della trasformazione di Laplace.* « Rend. Lincei », *21* (1935), pp. 420-426. [Formula (7)].

$$\int_0^\infty e^{-\alpha a} F(a)\, da,$$

tenuto conto che $\mathfrak{L}\{L_n\} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n$, si ha:

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-1}\right][L_n(b) - L_{n-1}(b)].$$

Si trasformi ora anche rispetto a b, cioè si formi

$$\int_0^\infty e^{-\beta b} F(b)\, db;$$

si avrà così successivamente (per $\alpha > 1$, $\beta > 1$):

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-1}\right]\frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^n - \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\left\{1 + \frac{1}{\alpha\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-1}\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{n-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\left\{1 + \frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{1}{1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{\beta-1}{\beta}}\right\} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(\alpha+\beta+1)}.$$

Dico che quest'ultima funzione è la doppia trasformata di Laplace della funzione $e^{\min(a,b)}$.

Infatti alla precedente funzione, pensata come dipendente da α, corrisponde – come facilmente si verifica – la seguente funzione di a:

$$\frac{1}{\beta}\,\frac{\beta - e^{(1-\beta)a}}{\beta - 1} = \frac{1}{\beta - 1} - \frac{e^a}{\beta - 1}\,\frac{e^{-a\beta}}{\beta},$$

che a sua volta, in virtù del « Faltungssatz », è la trasformata di Laplace (rispetto a b) della funzione:

$$e^b - e^a \cdot e^b * T_a(b) = \begin{cases} e^b - e^a \int_a^b e^{b-u}\, du = e^b - e^a(e^{b-a} - 1) = e^a & \text{per } a < b \\ e^b - e^a \cdot 0 = e^b & \text{per } a > b \end{cases}$$

dove l'asterisco denota « Faltung » rispetto a b.

3) La formula d'inversione da Lei trovata [1] per la trasformazione di Laplace (3), e cioè il fatto che da

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n , \tag{6}$$

sotto certe condizioni, segue

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) , \tag{7}$$

è stata da Lei anzitutto assicurata nell'ipotesi che $f(s)$ sia regolare all'infinito. Naturalmente la formula d'inversione vale anche in casi più generali.

In connessione con le Sue ricerche M. Picone [2] ha mostrato che, se la (7) s'intende nel senso che sia

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[F(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n L_n(t) \right]^2 dt = 0 , \tag{8}$$

sussiste allora una precisa corrispondenza fra le funzioni $F(t)$ per cui l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-t} F^2(t)\, dt \tag{9}$$

converge, e le funzioni $f(s)$ rappresentabili con lo sviluppo (6) per cui la serie Σa_n^2 converge. (Questo teorema può propriamente spezzarsi in due parti: il fatto che, nel caso di una funzione per cui l'integrale (9) converge, la convergenza della serie Σa_n^2 è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di uno sviluppo del tipo (7), da intendersi nel senso (8), è una immediata conseguenza del teorema di Riesz–Fischer applicato allo sviluppo della funzione $e^{-\frac{t}{2}} F(t)$ secondo funzioni ortogonali di Laguerre $e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)$ e, come tale, ha poco a che vedere con la trasformazione di La-

(1) F. Tricomi, *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* – I. *Inversione della trasformazione.* « Rend. Lincei », *21* (1935), pp. 232-239 [p. 235].

(2) M. Picone, *Sulla trasformata di Laplace.* « Rend. Lincei », *21* (1935), pp. 306-313 [p. 307]. Nel caso $a_n = \frac{1}{n}$ addotto da Picone come esempio, in cui si ha

$$f(s) = \frac{1}{s} \log \frac{1}{s} \quad , \quad F(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} L_n(t),$$

risulta inoltre

$$F(t) = \log t + C ,$$

dove C è la costante di Euler, ma quest'ultima formula non è ivi osservata.

place. La seconda parte asserisce che se la serie Σa_n^2 converge, dalla (6) segue la (7) e viceversa).

Desidero richiamare la Sua attenzione sul fatto che anche D. V. Widder [1] ha recentemente incontrata la precedente formula d'inversione (7) ed ha delimitato un campo in cui essa è applicabile: se la trasformazione di Laplace si scrive sotto la forma di Stieltjes:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\Phi(t),$$

la formula d'inversione, che si presenta allora naturalmente sotto la forma

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^t L_n(\tau)\, d\tau,$$

risulta valida sempre che la funzione $f(s)$ è decrescente e *totalmente monotona*, ciò che, per un teorema di S. Bernstein, equivale alla condizione che $\Phi(t)$ sia limitata e monotonamente crescente.

(1) D. V. Widder, *An application of Laguerre polynomials*. « Duke Math. Journ. », 1 (1935), pp. 126-136 [p. 136].

Matematica (Analisi). — *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni.* Nota I [1] di R. Caccioppoli, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Questa Nota e la seguente completano le mie precedenti ricerche, pubblicate in questi « Rendiconti » [2], sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico. Finora ho avuto in vista sopra tutto la teoria generale delle equazioni ellittiche in quantesivogliano variabili, con particolare riguardo al problema di Dirichlet. Qui approfondirò lo studio delle equazioni in due variabili, ritrovando in particolare e completando i risultati già conseguiti da Bernstein, peraltro mediante procedimenti laboriosi e di una eccessiva complicazione algoritmica.

I nuovi teoremi di esistenza che deduco per la soluzione di un problema di Dirichlet, attenuando le condizioni di regolarità dei dati al contorno, mi permettono poi di risolvere definitivamente la quistione del carattere analitico delle soluzioni, rimovendo le ultime ipotesi restrittive fin qui necessarie nelle varie dimostrazioni del teorema di Hilbert: dimostrando cioè che per un'equazione analitica di tipo ellittico in due variabili, ogni soluzione *continua con le sue derivate seconde* possiede derivate di ordine superiore ed è quindi analitica. Analogamente completo la dimostrazione del teorema sul carattere analitico delle estremali di un integrale del tipo $\iint F(x, y, p, q)\, dx\, dy$, *regolare*, cioè ad equazione di Lagrange ellittica; supponendo solo *le derivate prime continue* [3].

1. Riprendiamo i risultati dei lavori citati, limitatamente al caso di due variabili indipendenti. Siano Δ un campo del piano xy, Γ il suo contorno composto di una o più curve a curvatura dotata di derivata continua rispetto all'arco. Data in Δ una funzione $z(x, y)$, le cui derivate seconde verifichino una condizione di Hölder con un esponente $\lambda < 1$, definiamo una *norma* $\|z\|$ di z ponendo $\|z\| = \max|z| + |r|_\lambda + |s|_\lambda + |t|_\lambda$, adot-

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1935.

(2) A) *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali* ecc., Nota I, settembre 1932; B) Nota II, ottobre 1932; C) *Sulle equazioni ellittiche non lineari a derivate parziali*, luglio 1933; D) *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti*, gennaio 1934.

(3) Sullo stato attuale di questi problemi v., p. es., Hopf, « Math. Zeitschrift », B. 34 e B. 30.

tando le notazioni di Monge, e indicando in generale con $|f|_\lambda$ il minimo coefficiente (finito o non) ammissibile nella diseguaglianza di Hölder, con esponente λ, per una generica funzione f. Se inoltre ζ è una funzione definita su Γ e tre volte derivabile rispetto all'arco, porremo $\|\zeta\| = \max|\zeta| + \max|\zeta'''|$. Ciò posto, consideriamo in Δ l'equazione ellittica

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad \left[4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 > 0\right]$$

con F a derivate terze continue, la cui *equazione a variazioni* sia illimitatamente risolubile; e indichiamo con ζ i valori al contorno di un generico integrale z. Sussiste il

Teorema I. – *Se la* (1) *possiede una soluzione particolare (con* $\|\zeta\|$ *e* $\|z\|$ *finite) unica per i propri valori al contorno, e se, limitata* $\|\zeta\|$ *le funzioni* z, r, s, t *risultano: a) equilimitate, b) equicontinue, il problema di Dirichlet relativo alla* (1) *è univocamente risolubile mediante funzioni di norma finita per tutti i sistemi di valori al contorno con norma finita* (1).

La dimostrazione di questo teorema riposa sostanzialmente sul lemma: Se gli integrali $z_1, z_2, \cdots$ della (1) convergono uniformemente con le loro derivate seconde, e se dippiù $\lim_{n,m\to\infty} \|\zeta_n - \zeta_m\| = 0$, si ha $\lim_{n,m\to\infty} \|z_n - z_m\| = 0$, sicchè il limite z di z_n ha norma finita. Se però $\|z\|$ si definisce solo relativamente ad un campo Δ' tutto interno a Δ, la condizione sui valori al contorno è superflua; pertanto al teorema I può aggiungersi il complemento seguente:

Il limite z *di una successione uniformemente convergente* $z_1, z_2, \cdots$ *di integrali della* (1) *possiede derivate seconde hölderiane nell'interno di* Δ, *purchè le derivate seconde delle* z_n *convergano uniformemente nell'interno di* Δ.

Se nella (1) le derivate seconde figurano linearmente, si ha un'equazione *quasi-lineare*

$$(2) \qquad Ar + 2Bs + Ct + D = 0 \qquad (AC - B^2 > 0)$$

dove A, B, C, D sono funzioni di x, y, z, p, q e sussiste il

Teorema II – *Per l'equazione* (2) *possono sostituirsi nell'enunciato delle condizioni a), b) del teorema I le derivate prime* p, q *alle seconde* r, s, t.

Questo teorema è completato da un'osservazione analoga alla precedente:

Una successione uniformemente convergente di integrali della (2) *ha limite con derivate seconde hölderiane internamente a* Δ, *purchè le derivate prime presentino convergenza uniforme internamente a* Δ.

Una funzione z a derivate seconde hölderiane e verificante la (1) ha notoriamente derivate terze continue, anzi hölderiane (sempre con l'espo-

(1) Più generalmente si potrebbe definire la norma delle funzioni al contorno ponendo $\|\zeta\| = \max|\zeta| + |\zeta''|_\lambda$.

nente λ). D'altronde, per provarlo, basta osservare che i rapporti incrementali parziali di z verificano equazioni ellittiche lineari a coefficienti *uniformemente* hölderiani, ed hanno quindi, al pari dei loro limiti p, q derivate seconde *uniformemente* hölderiane (1). Analogamente si passa alle derivate quarte e, supposta F indefinitamente derivabile, alle derivate di tutti gli ordini.

2. Ci proponiamo ora di far vedere che per la (1) r, s, t risultano equicontinue internamente a Δ non appena equilimitate in Δ; ed analogamente p, q per la (2).

Cominciamo dalla (2): la derivata p soddisfa l'equazione ottenuta per derivazione rispetto ad x

$$(3) \qquad A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \varphi\left(x, y, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0,$$

dove φ è una funzione di secondo grado nelle derivate di p, a coefficienti *limitati*, una volta limitate p e q.

Moltiplichiamo la (3) per $e^{kp}\,dx\,dy$ (k essendo una costante da determinare ulteriormente) e integriamo su un campo Δ', di contorno Γ', contenuto in Δ; otterremo, previa integrazione per parti,

$$\int_{\Gamma'} e^{kp}\left[\left(A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy - \left(B\frac{\partial p}{\partial x} + C\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\right] -$$

$$- k\iint_{\Delta'} e^{kp}\left[A\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + C\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}\psi\left(x, y, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]dx\,dy = 0,$$

dove ψ è come φ di secondo grado a coefficienti limitati nelle derivate di p. Ricordando l'ellitticità della (2), possiamo passare di qui alla diseguaglianza

$$(4) \qquad \int_{\Gamma'} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}\,ds - \lambda\iint_{\Delta'}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy + \mu > 0$$

determinando opportunamente le costanti positive k, λ, μ in funzione del limite superiore fissato per $|p|, |q|$. Sia O un punto qualunque interno a Δ, assunto come polo in un sistema di coordinate polari ρ, θ, e poniamo

$$f(\rho) = \rho\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]d\theta\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

(1) V. nota D).

Dalla diseguaglianza precedente si deduce agevolmente, prendendo per Δ' un cerchio di centro O e raggio ρ,

$$\sqrt{2\pi\rho}\, f(\rho) - \lambda \int_0^{\rho} f^2(\rho)\, d\rho + \mu > 0,$$

ciò che implica una limitazione per $\int_0^{\rho} f^2\, d\rho$ (ρ convenientemente piccolo).

Segue di qui *che gli integrali di Dirichlet per le funzioni p e q si possono limitare, in ogni campo Δ' interno a Δ, non appena limitate le funzioni stesse.*

Consideriamo poi le funzioni

$$u = e^{kp} + k(x^2 + y^2) \quad , \quad v = -e^{-kp} - k(x^2 + y^2) \quad (k > 0)$$

entrambe crescenti con ρ; anche per queste gli integrali di Dirichlet si potranno limitare. Se k è convenientemente grande si ha ($A > 0$)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad , \quad A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} < 0,$$

sicchè u manca di massimi, v di minimi relativi.

Ora è noto che date infinite funzioni $f(x, y)$ ad integrali di Dirichlet equilimitati internamente a Δ, esse risultano equicontinue, sempre nell'interno di Δ, purchè *monotone*, cioè prive di massimi e di minimi relativi; ma si vede subito, esaminando la dimostrazione che qui omettiamo per brevità [1], che l'ipotesi del carattere monotono è sovrabbondante, e può sostituirsi con quella dell'esistenza di due funzioni u e v come le precedenti, crescenti con f e prive l'una di massimi, l'altra di minimi. Si completa così la prova del nostro assunto per quello che riguarda la (2). Quanto poi alla (1), la dimostrazione è perfettamente analoga: la si inizierà soltanto derivando due volte la (1), ed osservando che l'equazione così ottenuta per una delle derivate seconde r, s, t può sempre ricondursi al tipo della (3), utilizzando le due equazioni che provengono dalle derivazioni semplici.

3. Le considerazioni che precedono permettono anche di concludere all'equicontinuità delle derivate prime o seconde in *tutto* Δ, sotto la condizione supplementare che le derivate seconde o terze siano equilimitate su Γ. Quest'ultima circostanza si presenta certamente se le norme (ξ) sono equilimitate. Per rendersene conto, basta prendere per Δ e Γ un cerchio ed un arco della sua circonferenza, poichè a questo caso ci si può sempre

(1) V. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet*. «Rend. del Circ. Mat. di Palermo», to. 24.

ridurre mediante decomposizione di Δ e cambiamenti di variabili: un procedimento dovuto sostanzialmente a Bernstein [1] conduce allora nel modo più semplice allo scopo. Si passa a coordinate polari ρ, θ e si osserva che, nel caso della (2), la funzione $p_1 = \frac{\partial z}{\partial \theta}$ soddisfa un'equazione del tipo (3), a coefficienti limitati, in ogni corona circolare concentrica a Δ, e che la derivata seconda $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ è limitata *a priori*, per ipotesi, su Γ. Dal fatto che le funzioni

$$e^{kp_1} + k(x^2 + y^2) \quad , \quad -e^{-kp_1} - k(x^2 + y^2)$$

sono sprovviste (per un opportuno valore di k) rispettivamente di massimi e di minimi si deduce poi che l'inclinazione del piano tangente, in un punto proiettato su Γ, alla superficie $z = p_1(x, y)$, è suscettibile di una limitazione, che si traduce ovviamente in una limitazione per $\frac{\partial p_1}{\partial \rho}$, cioè in ultima analisi, tenuto conto anche della (2), per r, s, t. E analogamente si procede per l'equazione (1).

Gli integrali di Dirichlet considerati nel numero precedente risultano allora equilimitati in tutto Δ: invero si può situare il punto O su Γ, e applicare la (4) al campo Δ' comune a Δ e ad un cerchio di centro O, trascurando nell'integrazione curvilinea l'arco comune a Γ' e Γ. L'equicontinuità delle derivate segue poi dal fatto che queste sono equicontinue su Γ.

Si vede in tal modo che *nei teoremi I, II l'ipotesi b) è superflua, come conseguenza della a).*

4. Giungiamo così al

Teorema III. – *Se la* (1), *dotata di equazione a variazioni sempre risolubile, possiede una soluzione particolare (con* $\|\zeta\|$ *e* $\|z\|$ *finite) unica per i propri valori al contorno, e se* r, s, t *si possono limitare in funzione esclusivamente di* $\|\zeta\|$, *il problema di Dirichlet relativo alla* (1) *è sempre univocamente risolubile, mediante funzioni di norma* $\|z\|$ *finita, per valori al contorno di norma* $\|\zeta\|$ *finita. E nel caso particolare che la* (1) *si riduca alla* (2), *alle derivate seconde si possono sostituire le prime* p, q [2].

Supponiamo che a limitare le derivate in quistione basti una limitazione anzichè per $\|\zeta\|$, solo per $\max|\zeta|$ e per $\max|\zeta''|$ o $\max|\zeta'|$. Allora il risultato del n. 2 ed i complementi ai teoremi I e II ci dicono che per ogni funzione al contorno a derivata seconda o prima continua (anche soltanto limitata) si può costruire, come limite di integrali, un integrale cor-

(1) *Sur la généralisation du problème de Dirichlet.* « Math. Annalen », B. 69. V. anche, per la precisazione delle ipotesi qualitative, Zwirner, *Sull'equazione a derivate parziali delle superficie minime.* « Rend. del Sem. Mat. della R. Università di Padova », IV.

(2) E come norma dei valori al contorno si può prendere $\max|\zeta| + |\zeta''|_\lambda$.

rispondente della (1) o della (2), a derivate seconde hölderiane nell'interno di Δ. Possiamo dunque enunciare i teoremi seguenti:

Teorema IV. – *Se per l'equazione* (1) *del teorema precedente* z, r, s, t *si possono limitare in funzione di* $max|\zeta| + max|\zeta''|$ *esclusivamente, il problema di Dirichlet è risolubile, mediante funzioni a derivate seconde hölderiane nell'interno di* Δ, *per valori al contorno a derivata seconda continua (o limitata).*

Teorema V. – *Se per l'equazione* (2) *del teorema* III z, p, q *possono limitarsi in funzione di* $max|\zeta| + max|\zeta'|$, *il problema di Dirichlet è risolubile, sempre mediante funzioni a derivate seconde hölderiane nell'interno di* Δ, *per valori al contorno a derivata prima continua (o limitata). Se invece le limitazioni richiedono la conoscenza di* $max|\zeta''|$, *i valori al contorno vanno supposti a derivata seconda continua (o limitata).*

Matematica (Analisi infinitesimale). — *Sulle costanti di Fourier-Laguerre.* Nota [1] di U. Broggi, presentata dal Socio G. Fubini.

Do nella Nota una proposizione, reciproca di altra dimostrata in una Nota anteriore [2], e fondo su di essa la formulazione di un criterio per giudicare se il punto $z = 1$ sia punto regolare della somma della serie $\beta_0 + \beta_1 z + \cdots$, di raggio di convergenza 1.

Deduco da questo un'osservazione concernente l'inversione dell'integrale di Laplace ed il teorema di M. Picone secondo il quale, se la funzione $f(z)$ è la trasformata di Laplace di una funzione $\Phi(t)$ appartenente alla classe $L_2(e^{-t})$ ed essendo

$$z f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{z-1}{z}\right)^n$$

converge $\Sigma|\beta_n|^2$, la serie $\Sigma \beta_n L_n(t)$, dove

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n)$$

è il polinomio di Laguerre di ordine n, converge in media verso $\Phi(t)$ rispetto alla funzione peso e^{-t} nei punti del semiasse reale positivo. Si ha cioè:

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1935.

(2) Cfr. U. Broggi, *Su di un sistema di infinite equazioni lineari.* « Rend. Lincei » (1935), XXII, pp. 120-124.

$$\int_0^\infty e^{-t}\left[\Phi(t) - \sum_{n=0}^{m} \beta_n L_n(t)\right]^2 dt \to 0 \quad , \quad \text{se} \quad m \to \infty ,$$

l'integrale essendo (L) e preso lungo il semiasse reale positivo [1].

1. *Se il punto* $z = 1$ *è interno al poligono di Borel della serie* $\beta_0 + \beta_1 z + \cdots$ *può venire formata una funzione intera di tipo esponenziale* $\Phi(t)$ *alla quale corrisponde*

$$\beta_m = \int_0^\infty e^{-t} L_m(t)\, \Phi(t)\, dt \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

Sia ρ il raggio di convergenza della serie

$$\beta_0 + \beta_1 z + \cdots , \tag{1}$$

supposto $\neq 0$.

Se è $\rho > 1$, le serie

$$\sum_0^\infty \beta_n \quad , \quad \sum_1^\infty n\beta_n \quad , \quad \sum_2^\infty n(n-1)\beta_n , \cdots$$

convergono, e ove sia

$$\alpha_m = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)\beta_n \tag{2}$$

la serie $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$ ha un raggio di convergenza diverso da 0 : $\alpha_0 + \alpha_1(z-1) + \cdots$ prolunga infatti analiticamente la (1). Per un noto teorema di Polya la funzione intera

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$$

è di tipo esponenziale: tale cioè che $|\Phi(t)| < e^{a|t|}$, dove a è una costante.

È agevole dimostrare che

$$\beta_m = \int_0^\infty e^{-t} L_m(t)\, \Phi(t)\, dt \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

La serie che si ottiene premettendo m zeri alla (2), convergente e di somma α_m, è sommabile secondo Borel (sommabile (B)) con somma (B) α_m. È dunque

(1) Cfr., per una più completa formulazione del teorema, M. Picone, *Sulla trasformata di Laplace*. «Rend. Lincei», XXI, ser. 6ª, pp. 306-313.

$$\alpha_m = (-1)^m \int_0^\infty e^{-t} \left\{ \binom{m}{m} \alpha_m \frac{t^m}{m!} + \binom{m+1}{m} \alpha_{m+1} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots \right\} dt$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty e^{-t} t^m \Phi^{(m)}(t)\, dt \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

Ove si osservi che la funzione primitiva di $e^{-t} t^m$ è uguale al prodotto di e^{-t} per un polinomio $p_m(t)$ di grado m, e s'integri per parti, si ottiene

$$\int_0^\infty e^{-t} t^m \Phi^{(m)}(t)\, dt = (e^{-t} p_m(t) \Phi^{(m)}(t))_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t} p_m(t) \Phi^{(m+1)}(t)\, dt$$

e poichè l'integrale corrispondente ad α_{m+1} converge e converge pertanto l'integrale al secondo membro, si ha

$$e^{-t} p_m(t) \Phi^{(m)}(t) \to 0 \quad , \quad \text{se} \quad t \to \infty$$

$$e^{-t} t^s \Phi^{(m)}(t) \to 0 \quad , \quad \text{se} \quad t \to \infty \quad \text{e} \quad s \leqq m .$$

Si deduce analogamente da

$$\lim \frac{t^{m+h} \Phi^{(m)}(t)}{e^t} = \lim \frac{t^{m+h} \Phi^{(m+1)}(t)}{e^t} + (m+h) \lim \frac{t^{m+h-1} \Phi(t)}{e^t}$$

$$(h = 0, 1, \cdots)$$

che

$$e^{-t} t^s \Phi^{(m)}(t) \to 0 \quad , \quad \text{se} \quad s = 0, 1, \cdots \quad ; \quad m = 0, 1, \cdots \quad \text{e} \quad t \to \infty .$$

L'integrazione per parti m volte ripetuta fornisce così

$$(3) \qquad \alpha_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty e^{-t} t^m \Phi^{(m)}(t)\, dt = \cdots = \frac{1}{m!} \int_0^\infty \frac{d^m}{dt^m} (e^{-t} t^m) \Phi(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \Phi(t)\, dt .$$

(3) sussiste se è $\rho = 1$ ed il punto $z = 1$ è punto regolare della somma di (1), e pertanto interno al poligono di Borel, che le corrisponde. La serie (2) può non convergere, ma è sommabile (B), come lo è, con ugual somma (B) (3) la serie che si ottiene premettendo m zeri alla serie (2). Come è noto, se la serie $c_0 + c_1 + \cdots$ è sommabile (B) con somma (B) s, sommabile (B) con somma (B) $s + a$ è la serie $a + c_0 + c_1 + \cdots$.

Come nel caso $\rho > 1$, se $\rho = 1$ la serie $\alpha_0 + \alpha_1 (z - 1) + \cdots$ prolunga analiticamente la (1) ed ha un raggio di convergenza non nullo: $\Phi(t)$ è una funzione intera di tipo esponenziale.

Ove sia $\rho < 1$ non può affermarsi che il punto $\zeta = 1$, supposto regolare, sia interno al poligono di Borel della (1): ma ove esso lo sia, sussistono i risultati corrispondenti a $\rho \geq 1$.

E cioè sempre

$$|\Phi(t)| < e^{a|t}$$

$$\beta_m = \int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \Phi(t) dt \qquad (m = 0, 1, \cdots)$$

come si affermò.

2. Le considerazioni corrispondenti al caso $\rho = 1$ permettono di affermare parimenti che

Condizione necessaria e sufficiente perchè il punto $\zeta = 1$ sia punto regolare della somma della serie $\beta_0 + \beta_1 \zeta + \cdots$, di raggio di convergenza 1, è che

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \left(\sum_{n=0}^\infty \beta_n \frac{t^n}{n!} \right) dt$$

converga qualunque sia m, $(m = 0, 1, \cdots)$, e che, se α_m ne esprime il valore, sia

$$\liminf. |\alpha_m|^{\frac{1}{m}} > 0 .$$

3. Se, come postula il teorema di Picone, $\Sigma |\beta_n|^2$ converge, il raggio ρ di convergenza della serie $\beta_0 + \beta_1 \zeta + \cdots$ è ≥ 1. Il punto $\zeta = 1$ è punto regolare della somma se $\rho > 1$, punto regolare se essendo $\rho = 1$ sono soddisfatte le condizioni del § 2.

Ma in tal caso, se

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^\infty \beta_n L_n(t)$$

l'integrale di Laplace

$$\int_0^\infty e^{-t\zeta} \Phi(t) dt$$

converge in un semipiano $R\zeta > \mu$, dove μ è finito, e definisce una funzione determinante $f(\zeta)$ regolare all'infinito. Ove sia

$$\alpha_m = \int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \Phi(t) dt \qquad (m = 0, 1, \cdots),$$

la serie $\Sigma \frac{\alpha_m}{\zeta^{m+1}}$ converge in un certo intorno del punto all'infinito, e vi rappresenta $f(\zeta)$.

Si ha pertanto non in media e nei punti del semiasse reale positivo

$$(4) \qquad \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n(\lambda t),$$

dove $|\lambda| \geqq 1$ è qualunque, ed i γ_n sono i coefficienti dello sviluppo di $zF(z)$ in serie di potenze di $\frac{z}{z-\lambda}$:

Dimostravo infatti altrove che una funzione intera di tipo esponenziale – quale appunto è $\Phi(t)$ nel caso che si considera – è suscettibile di uno sviluppo della forma

$$\gamma_0 L_0(\lambda t) + \gamma_1 L_1(\lambda t) + \cdots$$

che gode delle proprietà indicate [1].

Le (4) sono indipendenti dall'ipotesi che $\Phi(t)$ appartenga alla classe $L_2(e^{-t})$ sul semiasse reale positivo.

Matematica (Analisi). — *Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine.* Nota [2] di G. Ascoli, presentata dal Socio G. Fubini.

Nello studio teorico della distribuzione del potenziale e del moto degli elettroni in un diodo cilindrico sottoposto a un campo magnetico longitudinale (*magnetron* di Hull), il prof. G. Polvani è pervenuto a due distinte equazioni differenziali del 2° ordine, a cui soddisfano, rispettivamente, il potenziale V come funzione del raggio vettore r, e, nel moto di un elettrone, il raggio vettore come funzione del tempo t. Queste equazioni si riducono, naturalmente, l'una all'altra, quando si tenga conto della relazione assai semplice, di carattere differenziale, che lega le tre variabili, e delle condizioni iniziali [3].

Invitato dal chiaro Collega a cercar di ottenere da queste equazioni alcuni elementi numerici di grande interesse fisico, ho creduto opportuno accertarmi prima dell'andamento generale dei loro integrali, e ho cominciato dalla seconda equazione, ben più semplice, la quale, assunte convenienti unità, si scrive

$$(1) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{t}{2r} - \alpha r + \frac{\alpha}{r^3} \qquad (\alpha > 0) \text{ [4]}.$$

(1) Cfr. U. Broggi, *Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre.* « Rend. Lincei » (1935), XXII, pp. 108-112.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1935.

(3) Questi risultati saranno esposti dal prof. Polvani in una Nota, di prossima pubblicazione.

(4) Si avverta che il moto degli elettroni obbedisce alla (1) solo sino all'istante in

Tale studio, che ho potuto condurre a conclusioni abbastanza precise, almeno per ciò che riguarda le proprietà asintotiche degli integrali per $t \to +\infty$, si è rivelato, a mio credere, di notevole interesse analitico, in quanto esso getta molta luce sui metodi da seguire per raggiungere gli stessi scopi per alcune classi di equazioni del tipo

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = f(t, r) \tag{2}$$

ove la f sia funzione razionale dei suoi argomenti. Problema, questo, di indubbia utilità per le applicazioni e la difficoltà del quale si rende manifesta esaminando con i metodi classici (Königsberger, Painlevé, ...) la natura della singolarità della (2) quando tra i dati iniziali comparisce il valore $t = \infty$.

Dato lo scopo della ricerca, non ho approfondito le proprietà degli integrali della (1) per $t \to -\infty$; esse offrono, sembra, in confronto del caso $t \to +\infty$, qualche maggiore complicazione.

Dò in questa Nota un rapido cenno delle mie ricerche, la cui esposizione completa comparirà in altra Raccolta.

1. *a*) Si indichi con r un integrale generico della (1), definito dalle condizioni iniziali $r = r_0 \neq 0$, $r' = r'_0$ per $t = t_0$. Si può anzitutto accertare che r conserva sempre il segno iniziale, e non può nemmeno tendere a zero per t tendente ad un certo valore t_1. Basta provare per questo che non può essere, per es., $r > 0$ a sinistra di t_1 e $\lim r = 0$ per $t \to t_1 -$.

Ora dalla (1) segue che a sinistra di t_1 è $r'' > 0$, quindi r' crescente e tendente per $t \to t_1 -$ ad un limite finito $k \leq 0$. Sicchè $r' = p$ può essere assunto come variabile indipendente dando luogo al sistema

$$\frac{dr}{dp} = \frac{2pr^3}{tr^2 - 2\alpha r^4 + 2\alpha}, \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{2r^3}{tr^2 - 2\alpha r^4 + 2\alpha}.$$

Per esso le condizioni iniziali $p = k$, $r = 0$, $t = t_1$ sono regolari, e vi corrisponde l'unico integrale $r = 0$, $t = t_1$ diverso dal dato; onde l'assurdo.

b) La (1) rimanendo inalterata per lo scambio di r in $-r$, basterà limitarci al caso $r_0 > 0$, che dà $r > 0$ per ogni t ammissibile.

Nel semipiano $r > 0$ il luogo dei punti di flesso delle curve integrali è la curva **C** di equazione

$$r = \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + 16\alpha^2}}{2\alpha}} = \omega(t).$$

cui r diviene massimo; dopo di che, se non sono assorbiti dall'anodo, essi ricadono sul catodo secondo la traiettoria simmetrica, che non segue la (1). Per la discussione di questa singolare discontinuità di comportamento analitico dobbiamo rimandare alla Nota del prof. Polvani.

La $\omega(t)$ è crescente per ogni t reale, ed è asintotica a $\sqrt{t/2\alpha}$ per $t \to +\infty$, a $\sqrt{-2\alpha/t}$ per $t \to -\infty$.

Si vede subito che le curve integrali saranno concave verso il basso ($r'' < 0$) al disopra di **C**, verso l'alto ($r'' > 0$) al disotto di **C**.

2. L'esistenza dell'integrale r è *a priori* assicurata solo in un intorno di t_0, ma si può dimostrare che *r è continuabile per ogni valore reale della variabile*. Supposto, al contrario, che, per es., r sia continuabile solo sino a $t_1 > t_0$, basta provare che a sinistra di t_1 i limiti di indeterminazione di r sono positivi e finiti. Dalla (1) segue infatti allora che lo stesso avviene per r'', onde r' ha limite finito r'_1, r ha limite finito r_1 e l'integrale risulta continuabile oltre t_1.

Si giunge allo scopo attraverso le seguenti osservazioni:

a) *A sinistra di t_1 la r non può essere decrescente.*

b) *Se per $t = \bar{t}$ la r ha un minimo, per $t > \bar{t}$ è $r > r(\bar{t})$.* Segue facilmente dalla relazione

$$r'^2 = 2\int t\,\frac{r'}{r}\,dt - \alpha r^2 - \frac{\alpha}{r^2} + \text{cost.}$$

che si ottiene dalla (1) moltiplicando per $2r'$ e integrando.

c) *I valori di r per $t \geq t_0$ ammettono un minimo positivo.* Segue da a) e b).

d) *I valori di r per $t_0 \leq t < t_1$ sono superiormente limitati.* Per c), è sempre $r > c$, ove c è costante e positivo; ora nel campo $t_0 \leq t \leq t_1$, $r \geq C$ il secondo membro della (1) ha un massimo positivo μ; dunque è sempre $r'' < \mu$. Integrando due volte segue l'asserto.

Dopo ciò resta stabilita la continuabilità dell'integrale nel senso delle t crescenti; in modo analogo si opera per le t decrescenti.

3. Studiamo ora il comportamento delle linee integrali rispetto alla curva **C** dei flessi. Con mezzi elementari si prova anzitutto che

a) *Per $t \to +\infty$ la r non può essere definitivamente decrescente.*

b) *Per $t \to +\infty$ non può essere definitivamente $r'' > 0$.*

Una linea integrale può dunque presentare due casi: o essere definitivamente al disopra di **C** oppure passare infinite volte dal disotto al disopra di **C** e viceversa.

Ammettiamo per un momento il primo caso e diciamo R un integrale per cui esso si presenti. Si ha allora:

c) *La differenza $R - \omega$ tende a zero per $t \to +\infty$ ed è (assolutamente) integrabile tra un qualunque t_0 e $+\infty$.*

Da $R'' < 0$ segue che R' decresce; si dimostra subito che il suo limite è nullo; quindi R'' è integrabile tra t_0 e $+\infty$. Ora tenendo conto della relazione tra t e ω la (1) può scriversi

$$R'' = \alpha(\omega - R)\left(1 + \frac{1}{\omega^2 R^2} + \frac{1}{\omega R^3} + \frac{\omega}{R}\right).$$

Ne segue $\alpha|\omega - R| < |R''|$, quindi $|\omega - R|$ integrabile. Di qui e dalla uniforme continuità della $\omega - R$ segue facilmente $\lim(\omega - R) = 0$.

Risultati più precisi su R si hanno ponendo $R = \omega + Y$ e dando alla (1) la forma [1]

$$(3)\quad Y'' + 2\alpha Y = \frac{\alpha Y}{\omega + Y}\left(Y - \frac{1}{\omega^2(\omega + Y)} - \frac{1}{\omega(\omega + Y)^2}\right) - \omega'' = F(t, Y) - \omega''$$

da cui, essendo $|Y|$ integrabile, segue l'equazione integrale

$$(4)\qquad Y = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_t^\infty F(\tau, Y) \operatorname{sen} \sqrt{2\alpha}\,(\tau - t)\, d\tau + Y_0$$

dove

$$Y_0 = -\int_t^\infty \omega''(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{2\alpha}\,(\tau - t)\, d\tau.$$

Si prova facilmente che $Y_0 = O(\omega^{-3}) = O(t^{-3/2})$, e che vale lo sviluppo asintotico (divergente)

$$Y_0 \sim -\frac{1}{2\alpha}\omega'' + \frac{1}{4\alpha^2}\omega^{IV} - \frac{1}{8\alpha^3}\omega^{VI} + \cdots$$

Risultando, per $t > t_0$ e per un C conveniente $F(t, Y) < CY/\omega$, la (4) dà

$$|Y - Y_0| < \frac{C}{\sqrt{2\alpha}} \int_t^\infty \frac{Y(\tau)}{\omega(\tau)}\, d\tau < \frac{C}{\sqrt{2\alpha}\,\omega(t)} \int_t^\infty Y(\tau)\, d\tau$$

e quindi Y risulta infinitesimo di ordine 1/2, almeno. Portando questo risultato nella (4) l'ordine si eleva a 1, poi, nello stesso modo a 3/2 ecc. e si trova precisamente:

d) *La differenza* $R - \omega$ *è dell'ordine di* $t^{-3/2}$; *la sua parte principale è* $-\omega''/2\alpha$ *e la parte residua è dell'ordine di* $t^{-5/2}$.

(1) La scelta della forma (3) si giustifica, *a posteriori*, osservando che in essa il secondo membro risulta per $t \to +\infty$ infinitesimo del massimo ordine possibile. Ciò vale anche per l'uso che ne faremo al n. 4.

Dopo ciò è facile dimostrare l'unicità di Y_0; cioè

1) Non possono esistere due diversi integrali per i quali sia definitivamente $\mathrm{R} > \omega$ *o* $\mathrm{R}'' < \omega$.

Se infatti esistessero due tali integrali $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2$ la differenza $\mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y}_2$ soddisferebbe all'equazione

$$(5) \qquad z'' - z\left(2x + \frac{t}{\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2} - x\,\frac{\mathrm{R}_1^2 - \mathrm{R}_1'^2 - \mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1^2 \mathrm{R}_2}\right) = 0$$

che in virtù delle valutazioni precedenti si può scrivere

$$z'' - z\,(2x - \eta) = 0$$

ove η è integrabile tra t_0 e $-\infty$. Ora si dimostra subito che un integrale di questa equazione non può tendere a zero per $t \to -\infty$ senza essere identicamente nullo [1].

Resta ancora in questione l'esistenza dell'integrale R. Essa si dimostra risolvendo l'equazione integrale (4) per approssimazioni successive, formando cioè la successione definita da

$$\mathrm{Y}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{F}(\tau, \mathrm{Y}_n) \operatorname{sen} \sqrt{2x}\,(\tau - t)\, d\tau + \mathrm{Y}_0$$

e dimostrando che le Y_n, almeno per t abbastanza grande, restano sempre positive, e tendono uniformemente ad una certa funzione Y che è la soluzione cercata. Gli sviluppi relativi sono laboriosi ma non presentano serie difficoltà.

L'equazione integrale (4) conviene ancora in pieno importante, portando infatti nel secondo membro un'espressione asintotica di Y esatta sino ai termini di un certo ordine, si ottiene al primo membro una nuova espressione contenente un ulteriore termine. Si ha così il numero definitivo.

2) Esiste una ed una sola soluzione R *della* (1) *per la quale è definitivamente* $\mathrm{R} > \omega$ *e* $\mathrm{R}' < 0$, *ed essa è sempre sviluppabile asintoticamente in serie*

$$\mathrm{R} \sim \sqrt{\frac{2}{2x}}\left(1 - \frac{a_1}{x^2} - \frac{a_2}{x^4} - \cdots\right).$$

Valgono anche sviluppi analoghi, procedenti per le potenze (inverse) di x o per le sue successive derivate (di ordine pari).

(1) La (5) ricorda le due integrali particolari di cui sopra si non tendono a zero, a meno che precisi. *Una linea integrale non può tendere a zero senza essere nulla all'infinito.*

4. Per studiare il comportamento per $t \to +\infty$ degli altri integrali della (1), tutti infinite volte oscillanti intorno ad ω e ad R, conviene riprendere la (3) scritta per la differenza generica $r - \omega = y$:

$$y'' + 2\alpha y = F(t, y) - \omega'',$$

e integrarla, considerando noto il secondo membro, con date condizioni iniziali. Si ottiene un'equazione integrale della forma:

$$y = A \cos \sqrt{2\alpha}(t - \gamma) - \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{t_0}^{t} F(\tau, y) \operatorname{sen} \sqrt{2\alpha}(t - \tau)\, d\tau - z$$

essendo

$$z = -\int_{t_0}^{t} \omega''(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{2\alpha}(t - \tau)\, d\tau.$$

Anche qui è applicabile il metodo delle approssimazioni successive, il quale, attraverso sviluppi alquanto delicati, conduce alla seguente conclusione:

(a *Un integrale qualunque della* (1) *ha la forma*

$$r = \omega + A' \cos \sqrt{2\alpha}(t - \gamma') + O(t^{-1/2}).$$

La differenza $r - \omega$ rimane dunque limitata. Si ha pure:

b) *Non esiste alcun integrale diverso da* R *per il quale la differenza* $r - \omega$ *tenda a zero per* $t \to +\infty$.

c) *Un integrale della* (1) *diverso da* R *ha sempre infiniti massimi e minimi, corrispondenti a valori di* t *della forma*

$$\tau_k = \gamma' - k \frac{\pi}{\sqrt{2\alpha}} - O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad (k > \dots).$$

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Integrale del moto.* Nota III [1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

7. Potenziale del moto e velocità. — Indichiamo con $Ve^{-i\beta}$ la velocità della corrente asintotica nel piano ζ; β rappresenta l'angolo che la direzione della corrente forma coll'asse delle x e V è il modulo della velocità stessa. Sia poi C la circolazione intorno alla lamina.

All'infinito la trasformazione (1) acquista la forma

$$dz = \frac{e^{-n\varepsilon i}}{k}\, d\zeta,$$

avendo ε e k il valore determinato ai numeri precedenti.

La corrente traslocircolatoria che nel piano ζ, forato, corrisponde a quella ora definita per il piano tagliato dalla lamina, formerà all'infinito un angolo $\beta + n\varepsilon$ coll'asse reale e avrà il modulo ridotto a $\frac{V}{k}$.

Il potenziale del moto nel piano ζ sarà allora, in base a considerazioni ben note,

$$(9) \qquad f(\zeta) = \frac{V}{k}\left(\frac{\zeta}{e^{i(\beta+n\varepsilon)}} + \frac{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta}\right) + \frac{C}{2\pi i}\log\zeta.$$

La velocità nel piano z della lamina viene poi data dalla formula

$$w = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz},$$

in cui il rapporto $\frac{d\zeta}{dz}$, viene fornito dalla (1).

Otteniamo quindi, come espressione della velocità in z, in funzione dei punti del piano rappresentativo, la formula seguente

$$(10) \qquad w = \left[V\left(\frac{\zeta}{e^{i(\beta+n\varepsilon)}} - \frac{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta}\right) + \frac{Ck}{2\pi i}\right]\cdot\frac{e^{n\varepsilon i}}{(\zeta - e^{i\sigma_1})(\zeta - e^{-i\sigma_1})}\left(\frac{\zeta + e^{-i\varepsilon}}{\zeta - e^{i\varepsilon}}\right)^n,$$

dove σ_1 è l'angolo definito dalla (2).

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1935. Vedi Nota II, questi «Rendiconti», vol. XXII, ser. 6ª, p. 244.

La w acquista all'infinito il valore $Ve^{-i\beta}$ in conformità di quanto posto sopra. Diventa infinita del primo ordine per $\zeta = e^{i\sigma_1}$ e $\zeta = e^{-i\sigma_1}$ in corrispondenza dei due estremi A e B della lamina che sono punti cuspidali salienti. Anche negli altri punti angolosi O ed O' (cioè per $\zeta = e^{i\varepsilon}$, $\zeta = e^{i(\pi-\varepsilon)}$), si riconosce facilmente il comportamento voluto della velocità. Infatti per $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la velocità è infinita in O di ordine n e nulla in O', pure di ordine n, in corrispondenza del saliente e del rientrante rispettivamente. Se $\alpha > \frac{\pi}{2}$, si scambia lo zero coll'infinito in conseguenza dello scambiarsi del saliente col rientrante. Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, scompare il comportamento singolare della velocità in O, O'.

8. Punti d'arresto. — La velocità si annulla anche per valori di ζ che soddisfano l'equazione

$$\frac{\zeta}{e^{i(\beta+n\varepsilon)}} - \frac{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta} - \frac{Cki}{2\pi V} = 0. \tag{11}$$

Avendo le radici di questa equazione i moduli reciproci, si conclude che una sola di esse apparterrà al campo del moto quando il loro modulo sia diverso ad uno. In corrispondenza si avrà un punto d'arresto per la velocità, interno al campo del moto. Perchè questo succeda, il valore di $|C|$ dovrà essere sufficientemente grande e cioè

$$|C| > \frac{4\pi V}{k}.$$

Se invece i moduli delle due radici della (11) sono uguali, e quindi entrambi uguali a 1, ζ è necessariamente della forma $e^{i\sigma}$, e l'equazione stessa diventa

$$\operatorname{sen}(\sigma - \beta - n\varepsilon) = \frac{Ck}{4\pi V}. \tag{11'}$$

Vengono così definiti due punti d'arresto sul contorno per ogni valore di C tale che si abbia

$$|C| \leq \frac{4\pi V}{k}.$$

Questi punti d'arresto coincidono quando $|C|k = 4\pi V$.

Se la corrente è puramente traslatoria, $(C = 0)$, i due punti d'arresto stanno sempre sul contorno e si hanno in corrispondenza dei due valori di σ

$$\beta + n\varepsilon, \quad \pi + \beta + n\varepsilon.$$

Per es. se la corrente traslatoria investe la lamina secondo la direzione dell'asse x, cioè secondo la bisettrice della lamina, i due punti d'arresto si hanno per $\sigma = n\varepsilon$, $\pi + n\varepsilon$ e sono quindi entrambi sul lato maggiore della lamina.

9. Regolarizzazione del moto in uno dei punti angolosi. — Disponendo opportunamente della circolazione, è possibile regolarizzare il moto in uno dei punti A , B , O (O′ se $n < 0$), in cui la w acquista valore infinito. Basterà per questo assegnare a C un valore che faccia cadere in uno dei punti angolosi indicati, uno dei punti d'arresto considerati al numero precedente.

È facile constatare che il moto risulta regolarizzato in A ($\zeta = e^{i\sigma_1}$), quando si ponga

$$C = -\frac{4\pi V}{k} \operatorname{sen}(\beta + n\varepsilon - \sigma_1). \tag{12}$$

In questo caso la velocità in A acquista il valore

$$w_A = \frac{2Ve^{-i(\pi-\alpha)}}{kl} \cdot \frac{\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\sigma_1} \cdot \cos(\beta + n\varepsilon - \sigma_1), \tag{13}$$

come si deduce facilmente dalla (10), ponendo $\zeta = e^{i\sigma}$, passando al limite per $\sigma = \sigma_1$ e tenendo conto delle (4). Nel punto A la velocità rimane quindi in generale finita e non nulla; sebbene il filone liquido debba dividersi in due rami arrivando in A, non vi è vero punto di arresto in quanto che, trattandosi di un punto cuspidale saliente, i due rami stessi non cambiano bruscamente di direzione come è per esempio nel caso di un punto angoloso non cuspidato [1].

Analogamente si avrà la regolarizzazione in B ($\zeta = e^{-i\sigma_1}$), per

$$C = -\frac{4\pi V}{k} \operatorname{sen}(\beta + n\varepsilon + \sigma_1). \tag{12′}$$

In tal caso la velocità in B diventa

$$w_B = \frac{2Ve^{-i(\pi+\alpha)}}{lmk} \cdot \frac{\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\sigma_1} \cdot \cos(\beta + n\varepsilon + \sigma_1), \tag{13′}$$

come si deduce in modo analogo a quanto s'è fatto per il punto A. Anche in B quindi la velocità non è nulla, ma finita.

È ben noto che, considerando in luogo della lamina fissa investita dalla corrente, una lamina dotata di moto traslatorio, rettilineo, uniforme, in un

(1) Cfr., p. es., la Nota del Cisotti, *Sulla regolarizzazione* ecc., citata nell'introduzione, a p. 17.

fluido in quiete all'infinito, si genera intorno alla lamina una corrente circolatoria che è atta a regolarizzare il moto nella cuspide di poppa. La (12) e la (12′) dànno appunto il valore della corrispondente circolazione quando la cuspide di poppa sia rappresentata da A e B rispettivamente [1].

Così pure un punto d'arresto si può far cadere nel punto singolare O, (supposto $n > 0$), ponendo

$$C = -\frac{4\pi V}{k}\operatorname{sen}(\beta + n\varepsilon - \varepsilon). \tag{14}$$

In tal punto la velocità è allora nulla. Analogamente per O′ se $n < 0$.

10. Regolarizzazione in entrambe le cuspidi. — Disponendo opportunamente della circolazione C e dell'angolo β della corrente asintotica coll'asse delle ascisse, è possibile ottenere la regolarizzazione del moto nei due punti A e B.

Ponendo nella (10), $\zeta = e^{i\sigma}$, e tenendo presenti le (12), (12′) si ricava facilmente che la doppia regolarizzazione delle cuspidi si avrà per

$$\beta = \frac{\pi}{2} - n\varepsilon \quad ; \quad C = -\frac{4\pi V}{k}\cos\sigma_1 = \frac{4\pi V n \cos\varepsilon}{k}, \tag{15}$$

oppure per

$$\beta = \frac{3\pi}{2} - n\varepsilon \quad ; \quad C = -\frac{4\pi V n \cos\varepsilon}{k}. \tag{15′}$$

Si noti che le (15′) corrispondono in sostanza ad invertire il moto liquido individuato dalle (15). Nel primo caso si hanno i seguenti valori per la velocità in A e in B rispettivamente

$$\begin{cases} w_A^0 = \dfrac{2V(\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varepsilon)}{lk} \cdot e^{-i(\pi-\alpha)}, \\ w_B^0 = -\dfrac{2V(\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\varepsilon)}{lmk} \cdot e^{-i(\pi+\alpha)}, \end{cases} \tag{16}$$

nel secondo caso gli stessi valori cambiati di segno.

Il valore della circolazione assegnato nella (15) acquista un interesse particolare per il fatto che ad esso è proporzionale l'azione dinamica esercitata sulla lamina, in questo caso della doppia regolarizzazione, in cui tale azione si riduce, come vedremo più avanti, alla sola spinta normale di Joukowsky.

Tenendo presente il valore di k dato dalla (5), la C della (15) diventa

$$C = 2\pi l V\sqrt{m} \cdot \Gamma, \tag{15″}$$

(1) Nel lavoro citato nell'introduzione, Tchapligin e Arjanikov considerano solo questo caso della regolarizzazione a poppa. Il valore ch'essi hanno dato per la circolazione (v. loc. cit., formula (18)), coincide con uno di quelli dati dalla (12) o dalla (12′) quando si facciano le necessarie sostituzioni.

avendo posto

$$\Gamma = \frac{n}{(1-n)^{\frac{1-n}{2}} \cdot (1+n)^{\frac{1+n}{2}}}. \tag{17}$$

Risulta perciò che detta circolazione è direttamente proporzionale alla velocità V della corrente asintotica, alla media geometrica delle lunghezze dei due lati della lamina, e dipende dall'apertura della lamina stessa mediante il fattore Γ.

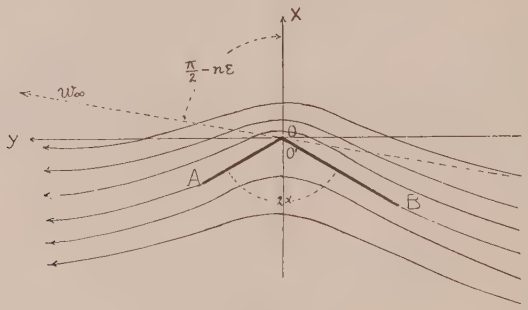


Fig. 2.

Questo fattore si annulla per $n = 0$ (lamina aperta ad angolo piatto) e assume per i valori estremi di n, $n = \pm 1$, rispettivamente il valore $\pm \frac{1}{2}$, come si ottiene con un semplice passaggio al limite.

Nell'intervallo $0 < n < 1$, ammette un massimo per $n \sim \frac{5}{6}$ $(0.83 < < n < 0.84)$, che corrisponde ad un valore della semiapertura α di circa 15° approssimato per eccesso. Il valore massimo è $0.5546\cdots$. Per $n \sim -\frac{5}{6}$ si avrà un corrispondente massimo negativo dello stesso valore assoluto. La relativa semiapertura sarà di 165° circa. (Si noti che Γ cambia semplicemente di segno cambiando n in $-n$ o, ciò ch'è lo stesso, α in $\pi - \alpha$).

È pure notevole il fatto che il valore massimo della circolazione necessaria alla doppia regolarizzazione si ha per uno stesso valore dell'apertura qualunque sia la lunghezza dei lati della lamina.

Per la lamina a lati uguali la doppia regolarizzazione si ha sempre per $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ cioè quando la corrente è perpendicolare alla bisettrice della lamina. Occorre naturalmente una opportuna circolazione che viene data dalla (15″) ponendovi $m = 1$.

Per $n = 0$ (lamina semplice), è nulla la circolazione e la doppia regolarizzazione avviene colla sola corrente traslatoria che è parallela alla lamina.

Per n tendente a ± 1 e per m tendente a zero si hanno casi interessanti di regolarizzazione e di doppi punti d'arresto che si deducono analizzando le (15), (15″), (16), (17) e che qui per brevità omettiamo.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di URANO nel 1934 e di MARTE nel 1935.* Nota [1] di L. Gialanella, presentata dal Socio G. Armellini.

Continuando la serie di osservazioni sistematiche dei pianeti grandi e medî – intrapresa fin dallo scorso anno [2] – presento [3] i risultati delle osservazioni meridiane di *Urano* eseguite alla fine del 1934 e di *Marte* eseguite nel maggio 1935. I metodi di osservazione e di calcolo sono i medesimi già descritti nella Nota citata; lo strumento adoperato è sempre l'invertibile *Bamberg* meridiano dell'Osservatorio del Campidoglio, situato in piena aria e munito di micrometro impersonale collegato al cronografo Cavignato in sincronizzazione con il pendolo Kobell (asta *invar* e compensazione barometrica).

1. Ascensioni rette di Urano nel 1934.

Il Pianeta è stato sempre osservato – nonostante le difficili condizioni atmosferiche, specialmente di qualche serata – adoperando il campo illuminato e i fili oscuri con l'ingrandimento massimo. Le stelle di confronto sono state scelte tra le fondamentali del *Nautical Almanac*, avendo cura che avessero ascensione e declinazione prossime a quelle di *Urano*, e precisamente in modo che il Pianeta riuscisse, per quanto possibile, simmetricamente disposto in mezzo alle quattro *orarie* generalmente adoperate; oltre queste sono state osservate una o due circumpolari per sera per la determinazione dell'azimut strumentale. Nella seguente tabella I riporto l'elenco delle stelle di confronto, dandone le posizioni medie e per ognuna la correzione complessiva $C_{\sec\delta}$ comprendente la correzione per l'aberrazione diurna meridiana e quella per la larghezza dei contatti e passo morto della vite micrometrica, computata mediante la formula:

$$C_{\sec\delta} = +\,0^{s}.\,0151\,\sec\delta$$

(il segno + perchè tutte le osservazioni sono state fatte in culminazione superiore).

La correzione dell'orologio Δt è stata calcolata mediante la formula di Mayer, in cui il coefficiente d'inclinazione i è stato ottenuto applicando a ciascuna stella la correzione quale è risultata dalla corrispondente lettura della livella, fatta avanti l'inizio dell'osservazione nella prima posizione del

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1935.
(2) Vedi *Ascensioni rette di Saturno nel 1934*. Questi «Rendiconti», 1935, 1° sem.
(3) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma.

cannocchiale e dopo la fine della osservazione nella seconda posizione a rovesciamento eseguito. Nella tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari di tutte le serate e i Δt medî conclusi per ognuna di esse.

Tabella I.

N.	Nome	mg.	$\alpha_{1934.0}$	$\delta_{1934.0}$	C sec δ
1	ζ^1 Piscium . .	5 6	$1^h\ 10^m\ 16^s.786$	+ 7° 13′ 36″.78	+ $0^s.02$
2	δ Cassiopeiae. .	2.8	1 21 28 .737	+ 59 53 34 .94	+ 0 .03
3	η Piscium. . .	3 7	1 27 56 .838	+ 15 00 22 .33	+ 0 .02
4	ν Piscium. . .	4.7	1 37 59 .602	+ 5 09 15 .76	+ 0.02
5	ε Cassiopeiae. .	3 4	1 49 37 .381	+ 63 20 45 .78	+ 0 .03
6	β Arietis . . .	2.7	1 50 59 .324	+ 20 29 10 .32	+ 0 .02
7	α Arietis . . .	2.2	2 03 26 .809	+ 23 09 04 .49	+ 0 .02
8	ξ^1 Ceti. . . .	4.5	2 09 29 .875	+ 8 32 17 .23	+ 0 .02

Tabella II.

Data	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z$ sec δ	a sen z sec δ	Δt	Medie serali Δt
1934								
Novembre 30	2	W	$21^m\ 34^s.56$	$22^m\ 58^s.77$	— $0^s.29$	+ $0^s.65$	— $84^s.57$	— **84.57**
	3	E	28 01 .47	29 26 61	— 0 .07	— 0 .49	— 84 .58	
	4	W	38 04 20	29 29 .37	— 0 .02	— 0 63	— 84 .52	
	6	W	51 04 .18	52 29 .21	0 .00	— 0 41	— 84 .62	
Dicembre 2	1	E	10 21 .25	11 43 .86	— 0 .12	+ 3 .69	— 86 .18	— **86 .21**
	2	W	21 34 .53	23 04 86	— 0 .16	— 3 .95	— 86 .22	
	3	E	27 61 .46	29 24 73	— 0 .02	+ 2 .99	— 86 .24	
	4	W	37 64 .19	39 26 .53	0 .00	+ 3 .82	— 86 .16	
	6	W	50 64 .17	52 27 .96	0 .00	+ 2 .48	— 86 .27	
Dicembre 6	2	W	21 34 .46	23 12 .14	+ 0 .16	— 4 .01	— 93 .85	— **93 .85**
	3	E	28 01 44	29 32 .17	+ 0 .09	+ 3 .04	— 93 .86	
	4	W	38 04 .17	39 34 .11	+ 0 .03	+ 3 .88	— 93 .85	
	6	W	51 04 .16	52 35 .44	+ 0 .03	+ 2 .52	— 93 .83	
	7	E	63 31 .79	65 03 .38	0 00	+ 2 .26	— 93 .85	

Segue: TABELLA II.

Data	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z \sec \delta$	Δt	Medie serali Δt
1934								
Dicembre 8	1	W	10 21.21	11 54.12	+ 0.06	+ 3.67	— 96.64	— **96.64**
	2	E	21 34.42	23 14.95	+ 0.03	— 3.92	— 96.64	
	6	E	51 04.15	52 38.30	+ 0.05	+ 2.46	— 96.66	
	7	W	63 31.78	65 06.19	— 0.01	+ 2.21	— 96.61	
Dicembre 28	4	W	38 04.01	40 08.77	+ 0.06	+ 3.72	—128.54	— **128.52**
	5	W	49 43.48	51 57.11	— 0.02	— 5.08	—128.53	
	7	E	63 31.65	65 38.01	— 0.06	+ 2.17	—128.47	
	8	W	69 34.52	71 39.60	+ 0.07	+ 3.41	—128.56	
Dicembre 31	3	W	27 61.24	27 57.15	+ 0.03	+ 2.89	+ 1.17	+ **1.18**
	4	E	37 63.99	37 59.09	0.00	+ 3.68	+ 1.22	
	7	W	63 31.62	63 28.23	+ 0.08	+ 2.15	+ 1.16	
	8	E	69 34.50	69 29.99	— 0.03	+ 3.38	+ 1.16	
1935								
Gennaio 1	3	W	27 61.23	27 54.85	+ 0.10	+ 2.79	+ 3.49	+ **3.53**
	4	E	37 63.98	37 56.81	+ 0.07	+ 3.56	+ 3.54	
	5	E	49 43.36	49 41.72	— 0.04	— 4.86	+ 3.54	
	7	W	63 31.61	63 25.94	+ 0.04	+ 2.07	+ 3.56	

La tabella III, infine, riporta i risultati delle osservazioni di *Urano*, le quali sono state eseguite nella stessa maniera che le precedenti stelle di riferimento. I confronti sono stati fatti con l'effemeride del *Nautical Almanac*.

TABELLA III.

Data	Cerchio	$t_{oss.}$	$i \cos z \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z \sec \delta$	Δt	$\alpha_{oss.}$	$\alpha_{calc.}$	O-C
1934						1^h	1^h	
Novembre 30	E	$46^m\ 25^s.01$	$-0^s.04$	$-0^s.56$	— $84^s.57$	$44^m 59^s.84$	$44^m 59^s.80$	$+0^s.04$
Dicembre 2	E	46 09.95	—0.03	+3.44	— 86.21	44 47.15	44 47.06	+0.09
Dicembre 6	E	45 53.78	+0.02	+3.49	— 93.85	44 23.44	44 23.31	+0.13
Dicembre 8	W	45 45.66	+0.06	+3.41	— 96.64	44 12.49	44 12.37	+0.12
Dicembre 28	E	45 06.12	+0.03	+3.31	— 128.52	43 00.94	43 00.86	+0.08
Dicembre 31	W	42 52.05	—0.02	+3.31	+ 1.18	42 56.52	42 56.51	+0.01
1935								
Gennaio 1	W	42 48.71	+0.05	+3.20	+ 3.53	42 55.19	42 55.14	+0.05

II. Ascensioni rette di Marte nel 1935.

Il pianeta è stato osservato subito dopo l'opposizione con i medesimi procedimenti usati per *Urano*. Unica modificazione apportata allo strumento *Bamberg* è stata la sostituzione del micrometro impersonale precedentemente adoperato con un secondo, completamente analogo al primo, del quale le costanti – nuovamente determinate – hanno dato i valori seguenti:

Passo della vite micrometrica	$7^s.598$
Valore di una divisione	0 .07598
Semicontatto e passo morto	0 .0251

per cui la correzione complessiva $C \sec \delta$ è risultata:

$$C \sec \delta = + 0^s.009 \sec \delta \text{ (per le culminazioni superiori).}$$

La tabella IV contiene l'elenco delle stelle di confronto adoperate, tratte dal *Nautical Almanac* 1935.

Tabella IV.

N.	Nome	Mg.	α 1935.0	δ 1935.0	C sec δ
1	ν Virginis	4.2	$11^h\ 42^m 31^s.071$	$+ 6°\ 53'\ 37''.34$	$+ 0^s.009$
2	β Leonis	2.2	11 45 44.690	+14 56 07 65	+ 0.009
3	β Virginis	3.8	11 47 18.508	+ 2 07 52.18	+ 0.009
4	γ Ursae Maioris . . .	2.5	11 50 25.200	+54 03 22.68	+ 0.015
5	π Virginis	4.6	11 57 32.494	+ 6 58 36.60	+ 0.009
6	o Virginis	4.2	12 01 53.861	+ 9 05 38.69	+ 0.009
7	ε Corvi	3.2	12 06 46.653	—22 15 29.52	+ 0.010
8	δ Ursae Maioris . . .	3.4	12 12 12.971	+57 23 37.01	+ 0.017
9	γ Corvi	2 8	12 12 27.572	—17 10 51.89	+ 0.009
10	δ Corvi	3.1	12 26 29.815	—16 09 13.25	+ 0.009
11	β Corvi	2.8	12 30 58.073	—23 02 14.77	+ 0.010
12	γ Virginis	2.9	12 38 21.836	— 1 05 35.05	+ 0.009
13	35 Virginis	6.7	12 41 32.731	+ 3 55 38.46	+ 0.009
14	ψ Virginis	4.9	12 50 58.147	— 9 11 10.50	+ 0.009
15	ε Ursae Maioris . . .	1.7	12 51 10.490	+56 18 41.92	+ 0.016
16	δ Virginis	3.7	12 52 19.649	+ 3 45 01.39	+ 0.009
17	ε Virginis	2.9	12 58 56.405	+11 18 29.56	+ 0.009
18	θ Virginis	4.5	13 06 34.879	— 5 11 32.41	+ 0.009
19	γ Hydrae	3.3	13 15 22.953	—22 49 44.99	+ 0.010
20	ζ^1 Ursae Maioris . . .	2.4	13 21 18.664	+55 15 51.51	+ 0.016

La tabella V, poi, raccoglie i risultati delle osservazioni stellari e i Δt medî conclusi:

TABELLA V.

Data	Stella	Cerchio	α app.	t oss.	$i \cos z$ sec δ	$a \operatorname{sen} z$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Maggio 1 .	10	W	$26^m32^s.73$	$26^m56^s.02$	$-0^s.02$	$+4^s.15$	$-27^s.42$	$-27^s.43$
	12	W	38 24.79	38 48.94	+ 0.03	+ 3.21	— 27.39	
	15	E	51 14.54	51 43.97	+ 0.13	— 2.12	— 27.44	
	18	W	66 37.92	67 02.02	— 0.02	+ 3.40	— 27.48	
Maggio 3 .	5	W	57 35.35	58 02.10	0.00	+ 2.64	— 29.39	— 29.32
	8	E	72 17.03	72 48.68	+ 0.15	— 2.50	— 29.30	
	14	W	111 01.15	111 26.90	— 0.01	+ 3.59	— 29.33	
	17	E	118 59.46	119 26.31	+ 0.04	+ 2.37	— 29.27	
Maggio 5 .	7	E	6 49.46	7 15.78	+ 0.01	+ 4.22	— 30.55	— 30.57
	8	W	12 16.99	12 49.65	+ 0.09	— 2.17	— 30.58	
	12	W	38 24.78	38 52.26	+ 0.07	+ 2.96	— 30.51	
	14	E	51 01.15	51 28.30	+ 0.03	+ 3.44	— 30.62	
	17	W	58 59.45	59 27.79	+ 0.01	+ 2.22	— 30.57	
Maggio 6 .	7	E	6 49.46	7 16.86	+ 0.07	+ 3.83	— 31.30	— 31.32
	8	W	12 16.97	12 50.06	+ 0.13	— 1.98	— 31.24	
	12	W	38 24.77	38 53.58	— 0.06	+ 2.68	— 31.43	
Maggio 10 .	16	W	52 22.64	52 57.36	— 0.03	+ 2.34	— 37.03	— 37.02
	17	E	58 59.44	59 34.58	— 0.04	+ 1.96	— 37.06	
	18	W	66 37.92	67 12.26	— 0.05	+ 2.75	— 37.04	
	19	E	75 26.13	75 59.45	— 0.07	+ 3.69	— 36.94	
	20	W	81 22.53	82 01.21	— 0.16	— 1.51	— 37.01	
Maggio 11 .	5	E	57 35.29	58 11.48	+ 0.04	+ 2.26	— 38.49	— 38.49
	7	W	66 49.43	67 24.12	— 0.02	+ 3.84	— 38.51	
	8	E	72 16.87	72 57.27	+ 0.08	— 1.98	— 38.50	
	11	W	90 61.00	91 35.66	0.00	+ 3.88	— 38.54	
	12	E	98 24.75	99 00.46	+ 0.04	+ 2.69	— 38.41	
Maggio 12 .	5	W	57 35.29	58 13.02	+ 0.16	+ 2.41	— 40.40	— 40.35
	6	E	61 56.68	62 34.60	+ 0.12	+ 2.29	— 40.33	
	7	W	66 49.42	67 25.72	+ 0.02	+ 4.04	— 40.36	
	12	E	98 24.75	99 02.09	+ 0.16	+ 2.83	— 40.33	
Maggio 14 .	3	W	$47^m21^s.23$	$48^m03^s.10$	$+0^s.12$	$+2^s.52$	$-44^s.51$	$-44^s.58$
	5	W	57 35.27	58 17.54	+ 0.07	+ 2.29	— 44.63	
	6	E	61 56.66	62 39.07	+ 0.09	+ 2.17	— 44.67	
	7	W	66 49.40	67 30.20	— 0.06	+ 3.82	— 44.56	
	12	E	98 24.74	99 06.66	— 0.03	+ 2.68	— 44.57	
	15	W	111 14.33	112 00.77	— 0.13	— 1.77	— 44.54	

Segue: TABELLA V.

Data	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z$ sec δ	a sen z sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Maggio 17 .	1	W	42 33.75	43 21.76	— 0.05	+ 2.16	— 50.12	**— 50.18**
	4	E	50 28.74	51 20.49	— 0.27	— 1.34	— 50.14	
	5	W	57 35.25	58 23.32	— 0.04	+ 2.16	— 50.19	
	9	W	62 30.33	63 17.20	— 0.07	+ 3.31	— 50.11	
	12	W	98 24.73	99 12.41	— 0.01	+ 2.53	— 50.20	
Maggio 20 .	2	E	45 47.41	46 39.52	+ 0.02	+ 1.56	— 53.69	**— 53.69**
	5	E	57 35.22	58 27.02	+ 0.06	+ 1.92	— 53.78	
	9	W	62 30.31	63 21.02	+ 0.02	+ 2.95	— 53.68	
	12	W	98 24.71	99 16.02	+ 0.05	+ 2.26	— 53.62	

Del Pianeta *Marte* ho osservato sempre il *primo* lembo, meno che nella prima serata (1° maggio), in cui ho osservato il secondo: in questo caso però ho tenuto conto – nella riduzione – dell'effetto di fase. La tabella VI contiene i risultati di tali osservazioni e gli O-C dedotti dal confronto con l'Effemeride del *Nautical Almanac*. Le ascensioni rette si riferiscono al centro del Pianeta.

TABELLA VI.

Data	Cerchio	$t_{oss.}$	$i \cos z$ sec δ	a sen z sec δ	Δt	$\alpha_{oss.}$	$\alpha_{calc.}$	O – C
1935		12^h				12^h	12^h	
Maggio 1 .	E	$31^m28^s.20$	$-0^s.01$	$+3^s.26$	$-27^s.43$	$31^m03^s.58$	$31^m03^s.52$	$+0^s.06$
3 .	W	29 53.02	+ 0.10	+ 3.14	— 29.32	29 27.41	29 27.56	— 0.15
5 .	E	28 30.08	+ 0.06	+ 3.00	— 30.57	28 03.03	28 03.08	— 0.05
6 .	E	27 53.32	— 0.13	+ 2.73	— 31.32	27 25.06	27 25.23	— 0.17
10 .	E	25 57.32	— 0.07	+ 2.60	— 37.02	25 23.28	25 23.47	— 0.19
11 .	E	25 35.62	+ 0.04	+ 2.73	— 38.49	25 00.35	25 00.48	— 0.13
12 .	W	25 17.22	+ 0.09	+ 2.87	— 40.35	24 40.27	24 40.36	— 0.09
14 .	E	24 50.52	+ 0.02	+ 2.72	— 44.58	24 09.12	24 09.22	— 0.10
17 .	E	24 31.24	— 0.10	+ 2.57	— 50.13	23 44.01	23 44.19	— 0.18
20 .	E	24 35.50	+ 0.03	+ 2.28	— 53.69	23 44.54	23 44.71	— 0.17

Fisica. — *Nuovo metodo per l'analisi della luce parzialmente polarizzata, diffusa dal cielo.* Nota [1] di E. Medi, presentata dal Socio A. Lo Surdo.

Chiamiamo N l'intensità della luce naturale, P l'intensità della luce polarizzata rettilineamente, che insieme costituiscono la luce parzialmente polarizzata, quale quella diffusa dal cielo. La luce attraversa un primo prisma di Nicol, all'uscita da questo la sua intensità è ridotta al valore

$$(1) \qquad I_1 = K_1\left(P\cos^2\varphi + \frac{N}{2}\right)$$

dove K_1 esprime la frazione costante di luce assorbita dal prisma, φ l'angolo formato fra il piano di vibrazione del prisma e il piano della luce polarizzata. Nella parte contenuta entro parentesi compare l'intensità della luce naturale divisa per due, cioè l'intensità dovuta alla sola componente straordinaria. Il fascio luminoso traversa poi un secondo nicol, il cui piano di vibrazione forma con quello del precedente un angolo ζ: il coefficiente di assorbimento sia K_2. All'uscita da questo prisma l'intensità luminosa è

$$(2) \qquad I_2 = K_2 K_1\left\{ P\cos^2\varphi + \frac{N}{2} \right\}\cos^2\zeta .$$

Questa luce incide infine sul catodo di una cellula fotoelettrica, la cui corrente è rivelata da un elettrometro.

Se l'angolo ζ_1, formato dai piani di vibrazione dei due prismi, è nullo, e si ruotano questi insieme, la luce presenta due massimi e due minimi di intensità per ogni rotazione eguale a 2π. Nella posizione di minimo si ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, quindi è estinta la parte di luce polarizzata, rimane solo la naturale, cioè si ha

$$(3) \qquad I_{min} = K_2 K_1 \frac{N}{2} .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1935.

Se l'angolo φ è invece zero, l'intensità è massima

$$I_{mass} = K_2 K_1 \left(P + \frac{N}{2}\right).$$

Lasciando φ eguale a zero e variando ζ, si può riportare l'intensità luminosa ad un valore I' eguale al valore I_{min} precedente: l'eguaglianza delle correnti di cellula ci permette di verificare se tale condizione è raggiunta. Si avrà allora

$$(4) \qquad I' = K_2 K_1 \left(P + \frac{N}{2}\right) \cos^2 \zeta = I_{min} = K_2 K_1 \frac{N}{2}$$

da cui

$$\cos^2 \zeta = \frac{\frac{N}{2}}{P + \frac{N}{2}} = \frac{N}{2P + N}$$

essendo

$$\frac{2P}{2P + N} = 1 - \cos^2 \zeta = \operatorname{sen}^2 \zeta$$

$$\frac{P}{2P + N} = \frac{\operatorname{sen}^2 \zeta}{2}.$$

Applicando il dividendo

$$(5) \qquad \frac{P}{P + N} = \frac{\operatorname{sen}^2 \zeta}{2 - \operatorname{sen}^2 \zeta}.$$

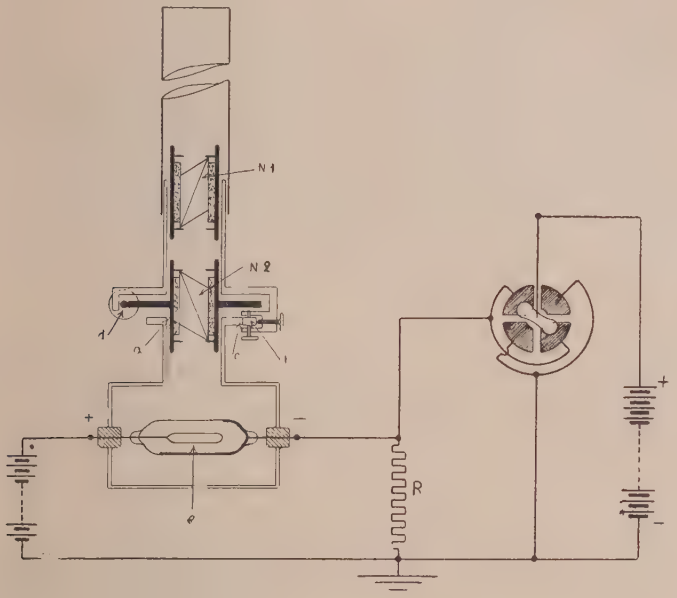
Conoscendo perciò ζ, si ha il rapporto cercato fra l'intensità della luce polarizzata e l'intensità della luce totale.

L'apparecchio (vedi figura) è costituito da una scatola metallica, annerita all'interno, contenente una cellula fotoelettrica al potassio. Nella parte superiore è praticata un'apertura (*a*) di sette centimetri di diametro, nella quale è avvitato un tubo metallico lungo settanta centimetri. Nella parte inferiore del tubo si trovano i due nicol. Mediante un pignone (*b*), che poggia sopra una ruota dentata (*c*) solidale alla scatola, si possono ruotare insieme i due prismi. Una vite tangenziale (*d*) micrometrica fa variare il piano di polarizzazione del secondo nicol, rispetto a quello dell'altro nicol, tenuto fermo: sopra un cerchio graduato si legge l'angolo formato fra i due piani dei nicol. Tutto il sistema poggia sopra un sostegno di acciaio, la cui direzione azimutale e zenitale si può variare a piacere.

L'anodo della cellula fotoelettrica (*e*) è collegato con il polo positivo di una pila da cento volta, il cui negativo è a terra. Il catodo della cellula è unito con una coppia di quadranti di un elettrometro Thomson Dolezalec,

e, attraverso una resistenza (R) di 5.10^9 ohm messo a terra. L'ago dell'elettrometro è tenuto ad un potenziale di circa cento volta mediante una pila: variando tale potenziale si regola la sensibilità del sistema.

Lo spostamento dell'ago si legge mediante un sistema canocchiale e scala.



Metodo di sperimentare:

Per eseguire la misura di dirige con una mira lo strumento verso la regione del cielo da esaminare. Si porta a zero l'angolo formato fra i piani di vibrazione dei nicol, quindi si ruotano questi fino ad ottenere la deviazione minima dell'elettrometro: cioè si estingue la porzione di luce polarizzata, l'intensità luminosa è data dalla formula (3).

Letta la deviazione minima, si ruotano i nicol di un angolo eguale a $\frac{\pi}{2}$: si ottiene un massimo di deviazione dell'ago. Si fissa il primo nicol, e con la vite micrometrica *d* si ruota il secondo, sino a riportare l'elettrometro nella precedente posizione di minimo. Si può quindi applicare l'eguaglianza (4).

Si legge il valore dell'angolo di cui si è ruotato il secondo nicol e applicando la semplice formula (5) si ha il valore del rapporto fra l'intensità della luce polarizzata e l'intensità della luce totale.

Nelle misure sinora eseguite, trattandosi di forti intensità luminose, si è adoperato l'elettrometro nel modo descritto. Per ottenere una maggiore precisione o per studiare lo stato del cielo quando vi siano deboli intensità

di luce diffusa, si amplificano le correnti di cellula con un comune amplificatore e valvole termoioniche. Essendo infatti l'apparecchio basato sopra un metodo di compensazione, non è necessaria la condizione che le intensità di corrente all'uscita dell'amplificatore siano proporzionali alle intensità di corrente fornite dalla cellula.

Qualunque altro dispositivo, che permetta di verificare l'eguaglianza delle correnti di cellula, può essere adoperato.

Questo metodo, come è facile vedere, presenta notevoli vantaggi rispetto ai metodi finora usati per lo studio della polarizzazione dal cielo. Si raggiunge una grande precisione nelle misure e una grande sensibilità, che verranno discusse in una prossima Nota. L'obiettività del metodo esclude l'errore personale dell'osservatore. L'apparecchio si trasporta facilmente e il suo uso è molto semplice: si possono perciò eseguire le misure fuori laboratorio senza ricorrere a speciali precauzioni.

Fisica (Matematica). — *Passage de l'électricité dans un champ magnétique lorsque les électrodes sont des points.* Nota [1] di G. GIRAUD, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. EQUATIONS DE LA QUESTION. — La théorie exposée par M^r Vito Volterra [2] mène à représenter la densité de courant (j_x, j_y, j_z), en coordonnées (x, y, z) orthogonales et dextrogyres, par une somme

$$(1)\quad j_x = C_1\xi_1 - C_2\xi_2 \quad , \quad j_y = C_1\eta_1 - C_2\eta_2 \quad , \quad j_z = C_1\zeta_1 - C_2\zeta_2 \qquad (C_1 \text{ et } C_2 > 0).$$

En désignant par (X, Y, Z) le champ électrique, et par (H_x, H_y, H_z) le champ magnétique, on introduit deux forces électromotrices $(E_{\nu x}, E_{\nu y}, E_{\nu z})$ $(\nu = 1, 2)$, qui ont pour expressions

$$(2)\quad \begin{cases} E_{\nu x} = X + H_y\zeta_\nu - H_z\eta_\nu, \\ E_{\nu y} = Y + H_z\xi_\nu - H_x\zeta_\nu, \\ E_{\nu z} = Z + H_x\eta_\nu - H_y\xi_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2);$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1935.

(2) V. VOLTERRA, *Flow of electricity in a magnetic field* («University of California publications in mathematics», vol. I, 1921, pp. 249-320), spécialement *Fourth lecture*, Sections I and II, pp. 298-301. Ce mémoire expose les recherches de l'auteur et celles de M^lle Elena Freda, qui a collaboré avec l'auteur. Nous modifions un peu les notations. M^lle Freda, qui a indiqué une correction au présent travaille, observe en outre que tout peut se répéter dans une théorie plus générale du même phénomène; voir ELENA FREDA, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem. 1926, pp. 77-82.

alors les composantes $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ satisfont à des équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}\,E_{1x} + a_{12}\,E_{1y} + a_{13}\,E_{1z}, \\ \eta_1 = a_{21}\,E_{1x} + a_{22}\,E_{1y} + a_{23}\,E_{1z}, \\ \zeta_1 = a_{31}\,E_{1x} + a_{32}\,E_{1y} + a_{33}\,E_{1z}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} -\xi_2 = b_{11}\,E_{2x} + b_{12}\,E_{2y} + b_{13}\,E_{2z}, \\ -\eta_2 = b_{21}\,E_{2x} + b_{22}\,E_{2y} + b_{23}\,E_{2z}, \\ -\zeta_2 = b_{31}\,E_{2x} + b_{32}\,E_{2y} + b_{33}\,E_{2z}; \end{cases}$$

C_1, C_2, les $a_{\alpha,\beta}$ et les $b_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions de x, y, z, H_x, H_y et H_z, qui ne changent pas quand on remplace (H_x, H_y, H_z) par $(-H_x, -H_y, -H_z)$. On suppose, avec M^lle Elena Freda, qu'on a toujours

$$(5)\qquad a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}\quad,\quad b_{\alpha,\beta} = b_{\beta,\alpha}.$$

La densité de courant doit satisfaire, à l'intérieur I du conducteur, à la condition

$$(6)\qquad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0;$$

sur la surface libre S de ce conducteur, on doit avoir

$$(7)\qquad j_n = 0,$$

j_n désignant la projection orthogonale de (j_x, j_y, j_z) sur la normale à S, dirigée dans le sens sortant.

Quand on donne les dix-sept fonctions C_1, C_2, $a_{\alpha,\beta}$, $b_{\alpha,\beta}$, H_x, H_y et H_z, les conditions (6) et (7) contiennent comme inconnue le potentiel électrique V, déterminé à une constante près par les conditions

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -X\quad,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Y\quad,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Z.$$

2. Nouvelles hypothèses. — En vue du raisonnement mathématique, nous supposons que les composantes H_x, H_y et H_z sont continûment dérivables par rapport à x, y et z. De plus C_1, C_2, les $a_{\alpha,\beta}$ et les $b_{\alpha,\beta}$ sont supposés continûment dérivables par rapport à x, y, z, H_x, H_y et H_z; si on les regarde comme fonctions composées de x, y et z, ces fonctions sont donc aussi continûment dérivables.

Nous aurons encore besoin de supposer que *les deux formes quadratiques* $\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, p_\alpha\, p_\beta$ *et* $\Sigma_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha,\beta}\, p_\alpha\, p_\beta$ *sont positivement définies* (1). Cela revient,

(1) Bien que les lettres $a_{\alpha,\beta}$ et $b_{\alpha,\beta}$ n'aient pas ici la même signification que dans le Mémoire de M^r Volterra, cette hypothèse s'exprime exactement de même avec les notations de ce Mémoire. Dans le travail cité de M^lle Freda, on peut supposer, à la page 80, que la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta}\, k_{\alpha,\beta}\, p_\alpha\, p_\beta$ est définie et négative.

pour les $a_{\alpha,\beta}$, à supposer que le vecteur (ξ_1, η_1, ζ_1) ne s'annule que si (E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}) s'annule, et que les deux vecteurs ne sont jamais directement opposés; l'angle des deux vecteurs est alors toujours aigu ou nul, mais non droit [1]. Ces hypothèses sont conservées dans tout changement d'axes rectangulaires.

3. Nature de l'équation aux dérivées partielles. — Les équations (2) et (3) nous donnent alors

$$(9)\quad \begin{cases} (1 + a_{13} H_y - a_{12} H_z)\,\xi_1 + (a_{11} H_z - a_{13} H_x)\,\eta_1 + (a_{12} H_x - a_{11} H_y)\,\zeta_1 \\ \qquad = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z, \\ (a_{23} H_y - a_{22} H_z)\,\xi_1 + (1 + a_{21} H_z - a_{23} H_x)\,\eta_1 + (a_{22} H_x - a_{21} H_y)\,\zeta_1 \\ \qquad = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z, \\ (a_{33} H_y - a_{32} H_z)\,\xi_1 + (a_{31} H_z - a_{33} H_x)\,\eta_1 + (1 + a_{32} H_x - a_{31} H_y)\,\zeta_1 \\ \qquad = a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z. \end{cases}$$

Soit D le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$; D est nécessairement positif. Le déterminant des coefficients de ξ_1, η_1 et ζ_1, dans les équations (9), est

$$(10)\qquad \Delta_1 = 1 + A_{11} H_x^2 + A_{22} H_y^2 + A_{33} H_z^2 + 2 A_{23} H_y H_z + \\ + 2 A_{31} H_z H_x + 2 A_{12} H_x H_y,$$

où $A_{\alpha,\beta}$ est le mineur algébrique de $a_{\alpha,\beta}$ dans D; Δ_1 est $\geqq 1$, l'égalité ne se produisant que quand (H_x, H_y, H_z) s'annule. Les équations (9) peuvent donc être résolues par rapport à ξ_1, à η_1 et à ζ_1:

$$(11)\quad \begin{cases} \xi_1 \Delta_1 = (a_{11} + \Delta_1 H_x^2)\,X + (a_{12} - A_{31} H_x - A_{23} H_y - A_{33} H_z + \Delta_1 H_x H_y)\,Y \\ \qquad + (a_{13} + A_{21} H_x + A_{22} H_y + A_{32} H_z + \Delta_1 H_x H_z)\,Z, \\ \eta_1 \Delta_1 = (a_{21} + A_{13} H_x + A_{32} H_y + A_{33} H_z + \Delta_1 H_y H_x)\,X + (a_{22} + \Delta_1 H_y^2)\,Y \\ \qquad + (a_{23} - A_{11} H_x - A_{12} H_y - A_{31} H_z + \Delta_1 H_y H_z)\,Z, \\ \zeta_1 \Delta_1 = (a_{31} - A_{12} H_x - A_{22} H_y - A_{23} H_z + \Delta_1 H_z H_x)\,X \\ \qquad + (a_{32} + A_{11} H_x + A_{21} H_y + A_{13} H_z + \Delta_1 H_z H_y)\,Y + (a_{33} + \Delta_1 H_z^2)\,Z. \end{cases}$$

Un calcul semblable peut être fait pour ξ_2, η_2, ζ_2; nous désignons par Δ_2 le déterminant positif analogue à Δ_1.

Regardons le premier membre de (6) comme une opération portant sur V; soit $-\mathcal{F}V$ cette opération. Nous voyons que $\mathcal{F}V$ est une opération

(1) Si l'on se reporte à la théorie physique exposée par Mr Volterra, ces indications feront paraître toute naturelle la nouvelle hypothèse.

linéaire, contenant les dérivées partielles jusqu'au second ordre. L'opération $\mathfrak{F}$ est du type elliptique, car si, dans les termes du second ordre, on remplace les dérivées secondes de V par des produits portant sur les variables p_1, p_2, p_3, on obtient la forme quadratique

$$\frac{C_1}{\Delta_1}\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, p_\alpha p_\beta + \frac{C_2}{\Delta_2}\Sigma_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha,\beta}\, p_\alpha p_\beta + (C_1 + C_2)(H_x p_1 + H_y p_2 + H_z p_3)^2,$$

qui est positivement définie.

4. Nature de la condition sur la frontière. — Examinons maintenant la condition (7). Le premier membre est linéaire et homogène par rapport aux dérivées de V; on peut donc dire que j_n est le produit de la dérivée de V dans une direction connue, par un facteur connu. Pour être renseignés sur la direction dans laquelle on dérive, nous nous ramenons, par changement des axes, au cas où le plan tangent est $z = 0$, le sens des z croissants étant le sens sortant sur la normale. Alors j_n coïncide avec j_z; le coefficient de $\frac{\partial V}{\partial z}$, dans j_n, est donc

$$-C_1\frac{a_{33}}{\Delta_1} - C_2\frac{b_{33}}{\Delta_2} - (C_1 + C_2)H_z^2 < 0;$$

par conséquent la direction cherchée ne peut être située dans le plan $z = 0$. En revenant au cas général, nous voyons que $-j_n$ est le produit d'une fonction positive par la dérivée de V suivant une direction non tangente à S, et qui sort du conducteur. Nous posons $-j_n = \Theta V$.

5. Un problème mathématique. — Soient f et φ deux fonctions continues, dont la première est donnée dans $I + S$, la seconde sur S. Cherchons les fonctions U, continues dans $I + S$, qui satisfont aux conditions

$$\mathfrak{F}U = f \quad \text{dans} \quad I, \tag{12}$$

$$\Theta U = \varphi \quad \text{sur} \quad S. \tag{13}$$

Une publication récente (1) donne la solution théorique d'une question plus générale, moyennant de larges hypothèses relatives à S, et nous allons en tirer les conclusions relatives au cas présent.

(1) G. Giraud, *Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (« Ann. scient. Ec. norm. sup. », to. 51, 1934, pp. 251-372), spécialement Chap. IV, pp. 350-372. Dans ce travail, on ne traite pas le cas des fonctions φ continues les plus générales, mais ce cas est traité dans un autre travail, *Equations à intégrales principales d'ordre quelconque*, qui doit paraître dans le même recueil.

Si les fonctions f et φ sont identiquement nulles, c'est-à-dire s'il s'agit du *problème homogène*, la solution générale est une constante arbitraire. Il en résulte aussitôt que, si f ou φ n'est pas identiquement nul, les conditions (12) et (13) ne sont compatibles que moyennant une condition.

Cette condition de compatibilité se trouve tout de suite si l'on remarque que la solution générale du problème homogène *adjoint* est une constante arbitraire. En effet ce problème *adjoint* se déduit du problème donné en y remplaçant (H_x, H_y, H_z) par $(-H_x, -H_y, -H_z)$: c'est en effet un résultat essentiel, découvert par M^lle^ Freda; la relation de réciprocité, découverte par M^r^ Volterra dans le cas de deux dimensions, et étendue à l'espace par M^lle^ Freda [1], est en effet ce qui est signifié par l'expression: problèmes adjoints l'un à l'autre. Si $\mathfrak{S}$ et Z désignent ce que deviennent $\mathfrak{F}$ et Θ quand on remplace (H_x, H_y, H_z) par $(-H_x, -H_y, -H_z)$, cette relation de réciprocité est

$$(14)\qquad \int_I^{(3)} (U_2 \mathfrak{F} U_1 - U_1 \mathfrak{S} U_2)\, d\omega = \int_S^{(2)} (U_2 \Theta U_1 - U_1 Z U_2)\, d\sigma$$

($d\omega$ = élément de volume; $d\sigma$ = élément d'aire)

La condition de compatibilité résulte de (14) quand on y remplace U_1 par U et U_2 par *un*; c'est par suite

$$(15)\qquad \int_I^{(3)} f\, d\omega = \int_S^{(2)} \varphi\, d\sigma.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour les fonctions continues f et φ, à condition de prendre l'opération $\mathfrak{F}$ dans un sens généralisé, applicable même à certaines fonctions dépourvues de dérivées secondes. Pour assurer l'existence des dérivées secondes de U, il suffit de se borner au cas où la fonction f et les dérivées des dix-sept fonctions $C_1, C_2, a_{\alpha,\beta}, b_{\alpha,\beta}, H_x, H_y$ et H_z remplissent des conditions de Lipschitz, avec des exposants quelconques.

6. Fonction de Green au sens étendu. — Le fait que ce problème n'est pas toujours compatible, entraîne l'inexistence d'une véritable fonction de Green, correspondant à ce problème. Mais il existe une *fonction de Green au sens étendu*, que nous allons définir, en la nommant G(P, Q).

Nous supposons d'abord que le point Q est dans I. Alors:

1° G(P, Q) doit être continu par rapport à P en tout point de I + S — Q.

2° Pour indiquer la façon dont G se comporte quand P tend vers Q, nous considérons la forme quadratique que nous avons fait correspondre

(1) Voir le Mémoire cité de M^r^ Volterra, spécialement *Fourth lecture*, section II, pp. 300-301; Elena Freda, « Rend. Acc. dei Lincei », 2° sem. 1916, pp. 28-35 et 60-65.

aux termes du second ordre de l'opération $\mathfrak{F}$; nous désignons par Δ le discriminant de cette forme, et par $c_{\alpha,\beta}$ les mineurs algébriques de Δ. Alors le produit

$$L(P,Q)\left[G(P,Q) - \frac{1}{4\pi\sqrt{\begin{array}{l}c_{11}(Q)(x-\xi)^2+2c_{12}(Q)(x-\xi)(y-\eta)+2c_{13}(Q)(x-\xi)(z-\zeta)+\\ +c_{22}(Q)(y-\eta)^2+2c_{23}(Q)(y-\eta)(z-\zeta)+c_{33}(Q)(z-\zeta)^2\end{array}}}\right]$$

doit tendre vers zéro quand P tend vers Q (x, y et z sont les coordonnées de P; ξ, η et ζ sont celles de Q; L est la distance des deux points).

3° Sur S, on doit avoir

$$\Theta G(P,Q) = 0, \tag{16}$$

l'opération portant sur P.

4° Dans I — Q, on doit avoir

$$\mathfrak{F}G(P,Q) = \frac{1}{\Omega}, \tag{17}$$

où Ω est le volume du conducteur, l'opération étant encore relative à P.

5° Enfin on doit avoir

$$\int_I^{(3)} G(P,Q)\, d\omega_P = 0. \tag{18}$$

Démontrons que cette fonction G existe et est unique. Soit F (P, Q) une solution fondamentale de $\mathfrak{F}$ relativement à P, et de $\mathfrak{G}$ relativement à Q, en sorte que L × (F — G) doit tendre vers zéro avec L; on suppose que les dérivées de F par rapport à P sont continues en tout point de I + S — Q, et que les dérivées de F par rapport à Q sont continues en tout point de I + S — P [1]. Soit

$$F(P,Q) - G(P,Q) = H(P,Q).$$

On doit avoir

$$\mathfrak{F}H(P,Q) = -\frac{1}{\Omega}$$

en tout point de I — Q, et de plus LH tend vers zéro avec L; donc H est continu et cette relation subsiste même en Q. En outre on doit avoir sur S

$$\Theta H(P,Q) = \Theta F(P,Q).$$

(1) Des résultats utilisés dans l'article cité, montrent que F existe certainement.

La condition (15) est-elle vérifiée? Elle devient

$$-\int_{I}^{(3)} \frac{d\omega}{\Omega} = \int_{S}^{(2)} \Theta F(P, Q)\, d\sigma_P ;$$

le premier membre est égal à — 1, et le second membre aussi, d'après un calcul connu. Donc les quatre premières conditions imposées à G, sont satisfaites par des fonctions qui diffèrent de l'une d'entre elles par une constante arbitraire; la cinquième condition achève de déterminer G [1].

Si, P restant fixe, Q tend vers un point de S, distinct de P, on démontre que G (P, Q) a une limite, ce qui nous permet de définir par continuité G (P, Q) quand les deux points occupent des positions distinctes quelconques dans I + S.

En échangeant les rôles des deux points dans G, on a la fonction analogue, relative au problème adjoint.

Quand la condition (15) est remplie, la fonction

$$(19)\quad U(P) = -\int_{I}^{(3)} G(P, Q) f(Q)\, d\omega_Q + \int_{S}^{(2)} G(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\sigma_Q$$

est une solution du problème du paragraphe 5, à savoir la solution qui est caractérisée par la relation

$$(20)\qquad \int_{I}^{(3)} U\, d\omega = 0 ;$$

les autres solutions diffèrent de celle-ci par une constante arbitraire.

7. Expression du potentiel cherché. — Si Q appartient à I, on a, en intégrant sur une sphère infiniment petite de centre Q,

$$\lim \int^{(2)} \Theta G(P, Q)\, d\sigma_P = -1 ,$$

l'opération Θ se définissant sur cette sphère de la même façon que sur S.

Soient A et B deux points distincts dans I. En intégrant sur une sphère infiniment petite de centre A, nous avons donc

(1) Une démonstration semblable, relative à une question analogue, a été donnée dans l'ouvrage de G. Bouligand, G. Giraud et P. Delens, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (un volume de 78 pages, Paris, 1935), spécialement 2me partie, Chap. IV. Si, dans la question relative aux opérations $\mathfrak{F}$ et Θ, nous supposons que les dix-sept fonctions $C_1, C_2, a_{\alpha,\beta}, b_{\alpha,\beta}, H_x, H_y$ et H_z sont constantes, un changement de variables permet de changer $\mathfrak{F}$ dans le laplacien, ce qui ramène au problème traité dans l'ouvrage cité; les deux fonctions de Green au sens élargi, qui sont définies dans cet ouvrage, se rencontrent alors avec ce que devient la fonction ici définie.

$$\lim \int^{(2)} \Theta\,[G(P, A) - G(P, B)]\, d\sigma_P = -1.$$

Mais l'opération $\mathfrak{F}$, appliquée à la différence $G(P, A) - G(P, B)$, donne un résultat nul tant que P n'est ni en A ni en B. Il en résulte, d'après la formule (14) appliquée à cette fonction et à une constante, qu'on a

$$\int^{(2)} \Theta\,[G(P, A) - G(P, B)]\, d\sigma_P = -1, \tag{21}$$

l'intégrale étant étendue à la frontière d'un domaine quelconque, contenant A à son intérieur et situé à une distance non nulle de B.

Si A est sur S, un résultat analogue s'obtient par continuité: il suffit d'appliquer d'abord la formule (21) à un domaine dont la frontière a une région commune avec S, et l'on amène ensuite A à l'intérieur de cette région commune.

Si l'on intègre sur la frontière d'un domaine qui contient B à son intérieur, et qui est situé à une distance non nulle de A, on a

$$\int^{(2)} \Theta\,[G(P, A) - G(P, B)]\, d\sigma_P = 1, \tag{22}$$

et un résultat analogue a lieu quand B est sur S.

D'après la formule (21), la fonction

$$V(P) = G(P, A) - G(P, B)$$

correspond à un flux d'électricité égal à *un*, pénétrant dans le conducteur par le point A et sortant par le point B. En la multipliant par l'intensité donnée du courant et en ajoutant une constante arbitraire, on a le potentiel correspondant aux électrodes données A et B. Il est physiquement nécessaire que ces électrodes soient situées sur S, mais le problème mathématique est résolu indépendamment de cette circonstance [1].

(1) M^r Volterra a aussi considéré le cas où le conducteur est une plaque, plane ou gauche. On peut reproduire pour ce cas des raisonnements semblables à ceux qui viennent d'être développés.

Chimica. — *Esame coi raggi di elettroni di alcuni eteri grassi* [1]. Nota [2] di G. Natta e R. Rigamonti, presentata dal Socio G. Bruni.

In un precedente lavoro sull'esame di alti polimeri con i raggi di elettroni si era dimostrata la facilità che presentano i grassi e gli oli di diffondere alla superficie dei preparati, formando degli strati mono- o bi-molecolari, che forniscono dei fotogrammi tipici, talvolta erroneamente attribuiti in passato alla stessa sostanza in esame [3].

La frequenza con cui si osserva tale fenomeno ci ha indotti ad esaminare dei grassi puri di costituzione diversa, per stabilire le cause di tale identità dei fotogrammi tipici dei grassi, indipendente entro certi limiti dalla loro costituzione chimica.

Già precedentemente, coi raggi X, J. Thibaud [4], J. J. Trillat [5], A. Müller [6], G. M. de Boer [7], F. Francis, S. H. Piper e collaboratori [8] esaminarono gli acidi grassi puri, dimostrando la facilità con cui si presentano fenomeni di polimorfismo, ed inoltre la variazione regolare, per ogni serie polimorfa, di uno dei lati della cella elementare coll'aumentare del numero degli atomi di carbonio dell'acido, mentre gli altri due lati rimangono praticamente inalterati.

Un fenomeno analogo, per quanto riguarda il lato maggiore della cella, si è osservato per i chetoni [9] e per gli eteri alchilici degli acidi grassi [10],

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pavia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1935.

(3) G. Natta, M. Baccaredda, R. Rigamonti («Gazz. Chim. It.», *65*, 182 [1935]; «Monatshefte f. Chem.», *66*, 64, [1935]) dimostrarono che i fotogrammi attribuiti precedentemente ad eteri della cellulosa eran dovuti esclusivamente a veli superficiali mono- o bi-molecolari di sostanze grasse. La sorprendente concordanza nelle costanti reticolari trovate per la paraffina con quella attribuita al collodio era stata precedentemente notata da J. Hengstemberger e K. Wolf («Hd. u. Jahrb. d. Chem. Phys.», Leipzig, 1934, Bd. 6, I A.) senza però che questi ne chiarissero la ragione.

(4) J. Thibaud, «Compt. rend.», *184*, 24, 96 (1927).

(5) J. J. Trillat, «Compt. rend.», *184*, 812 (1927); *180*, 280, 1329, 1838 (1925).

(6) A. Mueller, «J. Chem. Soc.», *123*, 2043, (1923); A. Mueller e G. Shearer, «J. Chem. Soc.», *123*, 3156 (1923).

(7) G. M. de Boer, «Nature», *119*, 50, 635 (1927).

(8) F. Francis, S. H. Piper, T. Malkin, «Proc. Roy. Soc. (A).», *128*, 214 (1930); S. H. Piper, T. Malkin, H. E. Austin, «J. Chem. Soc.», *129*, 2310 (1926).

(9) W. B. Saville, G. Shearer, «J. Chem. Soc.», *127*, 591 (1925).

(10) G. Shearer, «J. Chem. Soc.», *123*, 3152 (1923).

mentre per gli altri due lati della cella si hanno solo piccolissime variazioni irregolari, che sono di poco superiori ai normali errori sperimentali, e potrebbero attribuirsi a questi.

Coi raggi di elettroni furono esaminati da Trillat [1] alcuni acidi grassi confermando i risultati röntgenografici e dimostrando però che lamine sottilissime raccolte su acqua presentano le catene perpendicolari alla superficie di questa e mostrano una simmetria rombica, mentre le lamine più spesse oppure i veli di acidi grassi su solidi presentano la simmetria monoclina già riscontrata coi raggi X.

Abbiamo ora esteso le ricerche coi raggi E ad una serie di eteri alchilici degli acidi cerotico e palmitico e di altri derivati (chetoni ed eteri ossidi). Si sono scelti questi alti termini, perchè per l'esame ai raggi E occorrono delle sostanze a punto di fusione alquanto superiore alla temperatura ambiente.

Le lamine di spessore estremamente piccolo ($< 10^{-5}$ cm.), trasparenti ai raggi E, furono ottenute lasciando evaporare su uno specchio d'acqua alcune gocce di una soluzione eterea o benzolica della sostanza in esame. Per evitare l'inquinamento dei preparati si sono prese le opportune precauzioni indicate in un precedente lavoro [2]. Le film, sopportate da sottili reti di rame, sono state esaminate per trasparenza con l'apparecchiatura precedentemente descritta [3] anteponendo e posponendo ad ogni serie di due fotogrammi un fotogramma di fluoruro sodico per il controllo della lunghezza d'onda. I risultati ottenuti sono raccolti nella seguente tabella. Per maggior sicurezza è stato ripetuto l'esame almeno 2–3 volte per ogni composto.

(1) J. J. Trillat, Th. v. Hirsch, «Compt. rend.», *195*, 215 (1932).
(2) G. Natta, M. Baccaredda, R. Rigamonti, loc. cit.
(3) G. Bruni, G. Natta, «Rend. R. Acc. Naz. Linc.», *19* (6), 206 (1934).

Tabella I.

Sostanza esaminata	Tipo di fotogramma	Costanti reticolari		Autore
		a	*b*	
Paraffina	—	7.45	4.95	Hengstenberg e Garrido
»	—	7.30	4.84	Trillat e Hirsch
»	a punti	7.41	4.96	Natta e Rigamonti
Acido stearico α	—	9.85	4.85	Trillat e Hirsch
» » β	—	7.30	5.46	» »
» » γ	—	7.30	5.02	» »
Acido cerotico	a linee	7.53	4.96	Natta e Rigamonti
Cerotato di metile . . .	a punti	7.46	4.98	» »
Cerotato di etile	a punti	7.43	4.99	» »
» »	a linee	7.47	5.00	» »
Cerotato di propile . . .	a punti	7.46	4.98	» »
» »	a linee	7.43	4.98	» »
Cerotato di butile . . .	a punti	7.42	5.—	» »
Palmitato di cetile . . .	a linee	7.47	5.01	» »
Palmitato di miricile . .	a punti	7.47	4.95	» »
» » . .	a linee	7.47	5.01	» »
Palmitone	a punti	7.49	4.94	» »
»	a linee	7.47	4.97	» »
Etere cetilico	a punti	7.47	4.99	» »

I fotogrammi presentano il tipico aspetto a linee od a punti dei fotogrammi di paraffina ed anche le stesse costanti reticolari (a meno di piccole divergenze comprese entro l'1 %) e così pure eguali intensità per le linee o punti corrispondenti, come si vede dalla tabella II.

TABELLA II.

Paraffina			Ac. Cerotico	Cerotato di metile	Cerotato di propile	Palmitato di miricile	Palmitato di cetile	Palmitone
d	hkl	int.	int.	int.	int.	int.	int.	int.
4.09	110	ff	ff	ff	ff	ff	ff	ff
3.72	200	f	f	f	f	f	f	f
2.96	210	md	d	d	md	d	md	md
2.46	020	m	mf	mf	mf	mf	mf	mf
2.33	120	dd	dd	dd	dd	d	dd	dd
2.20	310	m	m	m	m	m	m	m
2.04	220	mf	m	mf	m	mf	mf	m
1.85	400	md	d	md	md	md	d	d
1.73	410 320	d	dd	d	d	d	d	d
1.59	130	d	d	d	d	dd	d	d
1.49	230 420	d	dd	d	dd	dd	dd	d
1.42	510	dd	—	—	—	—	—	dd
1.37	330	dd	—	dd	—	d	d	d
1.28	520	dd	—	—	—	dd	—	dd
1.24	600 040 430	d	—	d	—	d	d	d
1.17	240	dd	—	—	—	—	—	dd
1.10	340 530 620	dd	—	dd	—	dd	—	dd

L'unica spiegazione attendibile di questo fatto è quella data da Trillat [1] per gli acidi grassi, che le molecole si dispongano nelle lamine estremamente sottili normalmente alla superficie. I due periodi di identità che giacciono nel piano della film sono allora indipendenti dalla lunghezza della

(1) J. J. TRILLAT, TH. v. HIRSCH, loc. cit.

catena per composti di egual tipo. I risultati ottenuti dimostrano che le catene degli eteri alchilici degli acidi grassi hanno una molecola il cui asse è perfettamente rettilineo.

Si può giustificare una tale costituzione solo ammetteudo che l'angolo tra le due valenze dell'ossigeno del legame etereo sia un po' maggiore di quanto normalmente ammesso (100°) [1], raggiungendo il valore di 109° 30' noto per le valenze del carbonio. Infatti si avrebbe altrimenti, a meno di non ammettere una deformazione dell'angolo delle valenze del carbonio, una forma non rettilinea della molecola degli eteri a differenza di quella degli acidi liberi e della paraffina, ciò che contrasterebbe con la identità dei fotogrammi elettronici. Alla stessa conclusione si deve giungere per gli eteri ossidi, secondo i risultati da noi ottenuti per l'etere cetilico.

Si potrebbe avanzare l'ipotesi che il radicale acido ed il gruppo alchilico, nel caso degli eteri esteri, od i due radicali alchilici, per i chetoni e per gli eteri ossidi, dispongano le loro catene affiancate rivolgendo verso l'acqua i gruppi più idrofili (-CO , O- , -CO- , -O-). A ciò si oppongono anzitutto considerazioni steriche: non si riesce infatti, rispettando i raggi atomici e gli angoli tra le valenze, a collegare due catene di atomi vicine nel reticolo della paraffina con una serie di tre o quattro atomi di C o di O. A prova di ciò sta il fatto cha A. Müller [2] nell'esame röntgenografico dei chetoni ciclici di Ruzicka, riscontrò una sezione retta della cella, normale alle lunghe catene, di 9,25 per 8,1 Å completamente diversa da quella riscontrata nei composti in esame (7,45 Å per 4,98 Å).

Inoltre, se si confrotano le lunghezze delle catene paraffiniche date da Müller [3] con quelle dei chetoni, date da Saviile e Shearer (loc. cit.), e degli eteri esteri, date da Shearer (loc. cit.) e da Malkin [4], si riscontra quanto segue: tra paraffina e chetoni si ha identità di lunghezza a parità di numero di atomi di carbonio. Gli eteri, come gli acidi, sono dimorfi, una delle due forme presentandosi con le catene inclinate, l'altra colle catene normali al piano basale; considerando quest'ultima forma, si trova identità tra la lunghezza di una paraffina normale ad n atomi di carbonio e quella di un etere avente un numero di atomi di carbonio n — 1. L'ossigeno del legame etereo si comporta cioè come un atomo di carbonio della catena. Questi fatti trovano appunto la loro spiegazione nell'ipotesi che le catene degli eteri e dei chetoni abbiano asse rettilineo.

Gli identici periodi di identità, che presentano nelle film sottili i termini normali delle paraffine, degli acidi grassi, degli eteri ossidi e sali, dimostrano che per tutte queste sostanze si presenta un particolare tipo di

(1) L. Bru, « Ann. Soc. Esp. Fis. Chim. », *30*, 483 (1932).
(2) A. Mueller, « Helv. Chim. acta », *16*, 155 (1933).
(3) A. Mueller, « Proc. Roy. Soc. (A) », *127*, 427 (1930).
(4) T. Malkin, « J. Chem. Soc. », *1931*, 2796.

isomorfismo bidimensionale. Tale ipotesi accorderebbe con i risultati ottenuti da Murison [1] con i raggi di elettroni per le sostanze grasse, le cui miscele cristallizzano facilmente in cristalli unici.

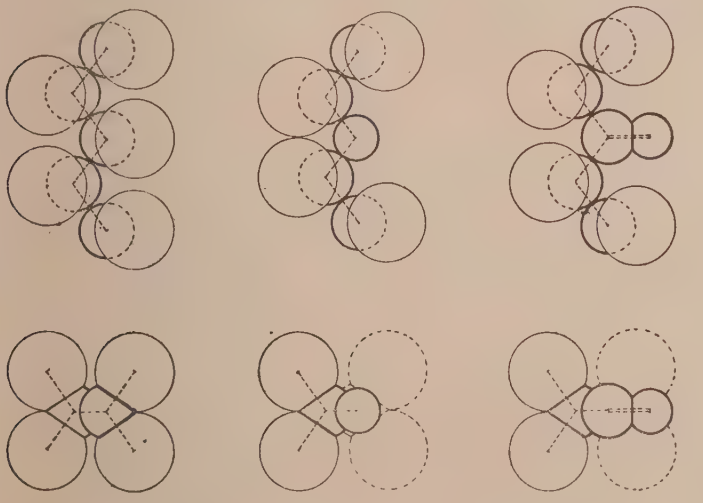
È forse utile qui ricordare che le ricerche coi raggi X sugli acidi grassi elevati ($n > 10$) e sulle loro miscele [2] portarono a questi interessanti risultati:

Due lati della cella elementare si mantengono costanti per tutti gli acidi normali elevati.

Il terzo lato aumenta regolarmente col numero degli atomi di carbonio.

Le miscele a numero atomico n ed $n+1$ od $n+2$ presentano un isomorfismo completo secondo la legge di Vegard.

Per differenze molto forti nel numero degli atomi di carbonio (maggiori di 4), non si ha più tale isomorfismo, a meno che non si aggiungano termini intermedi, che agiscano da leganti. In tale caso però le costanti reticolari si avvicinano a quelle dei termini più alti.



I risultati röntgenografici concordano con quelli elettronici, ma questi ultimi, permettendo l'esame di lamine estremamente sottili, corrispondenti allo spessore di poche molecole, risentono meno della lunghezza delle catene ed in pratica solo delle loro dimensioni normali all'asse delle stesse.

(1) C. A. Murison, «Phil. Mag.», *17*, 201 (1934).

(2) F. Francis, S. H. Piper, T. Malkin, loc. cit.; E. Ott, F. B. Seagle, «J. Phys. Chem.», *37*, 257 (1933); J. J. Trillat, «Compt. rend.», *184*, 812 (1927).

Si capisce quindi la scarsa influenza dei gruppi finali e la possibilità di un isomorfismo bidimensionale nelle lamine sottili tra catene aventi diverse funzioni terminali.

Il concetto di *isomorfismo bidimensionale* non pare sia stato finora oggetto di studio, ma merita di diventarlo oggi in cui tanto si discute sulla struttura dei reticoli bidimensionali (Flächengitter). Esso spiega come impurezze occasionali di natura grassa e certamente costituite da miscele di sostanze diverse, inquinando le superfici dei preparati nell'esame dei raggi E, abbiano permesso di osservare fenomeni di interferenza nettissimi e di ottenere bellissimi fotogrammi a punti, analoghi a quelli dati da sostanze pure. Si tratta invece naturalmente di cristalli di soluzioni solide di sostanze grasse diverse in reticoli a notevole sviluppo bidimensionale.

In figura sono confrontati, in vista ed in sezione, dal punto di vista sterico, dei tratti di catena paraffinica, chetonica ed eterea. L'analoga struttura di queste catene giustifica il loro isomorfismo nel senso predetto.

In una prossima nota uno di noi riferirà sulla posizione dei singoli atomi nel reticolo determinata a mezzo del calcolo del fattore di struttura per i fotogrammi elettronici.

Conclusioni.

Si riscontra per le lamine sottili dei termini elevati normali degli acidi grassi, eteri ossidi, eteri sali, chetoni ed idrocarburi, una struttura cristallina con gli stessi periodi di identità nelle direzioni fondamentali giacenti nel piano della lamina e normali all'asse delle catene (7,46 e 4,98 Å).

Si discute la possibilità per composti a lunga catena di un particolare isomorfismo bidimensionale indipendente dai gruppi funzionali terminali, il quale rimarrebbe sussistente per la sostituzione a certi intervalli di un gruppo $-CH_2-$ con un gruppo carbonilico -CO- o con un atomo di ossigeno etereo. Probabilmente quest'ultima condizione si verifica solo quando il numero di questi atomi o gruppi vicarianti è piccolo rispetto a quello dei gruppi metilenici della catena, come è nei casi ora studiati.

Chimica. — *Sullo spettro Raman di alcuni derivati del pirrolo* [1]. Nota [2] di G. B. Bonino e R. Manzoni-Ansidei, presentata dal Socio M. Betti.

L'esame degli spettri Raman del pirrolo e derivati che già abbiamo pubblicato in alcuni precedenti lavori ci ha mostrata la necessità di poter discutere ulteriore materiale sperimentale specie per ciò che riguarda i pirroli N-sostituiti. In questo lavoro perciò riferiamo intorno alle ricerche eseguite su alcuni pirroli N–sostituiti e su un pirrolo alchilato al carbonio di cui non si potè riferire nelle precedenti pubblicazioni.

N–etilpirrolo. – Preparato da noi secondo Ciamician e Zanetti [3] facendo agire sul pirrolato potassico a caldo l'J C_2H_5. Il prodotto fu purificato per distillazione su potassio metallico per togliere le tracce di pirrolo rimasto inalterato nella reazione come si era già fatto per l'N–metilpirrolo [4]. P. E. 130°-31° a 756 mm.

N–allilpirrolo. – Preparato da noi secondo Ciamician e B. Dennsted [5] facendo agire sul pirrolato potassico a caldo per cinque ore il bromuro di allile. Il prodotto fu purificato per distillazione frazionata a pressione ridotta. P. E. 110° a 55 mm.

N–metil–2–5–dietil–pirrolo. – Proveniente dalla collezione dell'Istituto di chimica organica del Politecnico di Monaco di Baviera gentilmente concesso dal prof. Geh. H. Fischer. P. E. 102° a 20 mm.

N–etil–2–5–dimetil–pirrolo. – P. E. 176–177° a 756 mm.

2–5–dimetil–3–etil–pirrolo. – P. E. 187–188° a 760 mm.

Ambedue questi prodotti provengono dalla collezione dell'Istituto di chimica farmaceutica della R. Università di Bologna gentilmente concessi dal Prof. G. Charrier. Tutti i pirroli furono purificati per distillazione a pressione ridotta e corrispondevano alle costanti per essi segnate dalla bibliografia.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1935.

(3) Ciamician, Zanetti, «Ber.», *22*, 659 (1889).

(4) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, P. Pratesi, «Z. phys. chem.», B *25*, 349 (1934).

(5) Ciamician, Dennsted, «Ber.», *15*, 2581 (1882).

TABELLA.

Spettri Raman dei pirroli studiati; frequenze in cm^{-1}.

N. Etil pirrolo	N. Allil pirrolo	N. Metil 2–5 dietil pirrolo	N. Etil 2–5 dimetil pirrolo	2–5 dimetil 3 etil pirrolo	*Note*
—	—	—	—	3342 (1/2)	N–H
3138 (2)	3121 (2)	—	—	—	
3111 (1)	—	3115 (3)	3103 (2)	—	C–H
—	—	—	—	3065 (1/2)	C–H
2970 (1)	2997 (2)	2978 (3 dif)	2974 (2 1/2)	2957 (1/2)	
2940 (1)	—	2942 (3 1/2 dif)	2927 (3dif)	—	
2915 (1)	—	—	—	2914 (3 dif)	CH_2, CH_3
—	2892 (2)	2896 (2 dif)	—	—	
—	—	2860 (2 dif)	—	2860 (2 dif)	
—	1636 (5)	—	—	—	C=C allilico
—	—	1567 (1/2)	—	1585 (1/2)	C=C pirrolico
1499 (2)	1502 (6)	1510 (7)	1514 (6)	1519 (7)	→ ω β (nucleo pirrolico)
—	1467 (2)	1454 (2 dif)	1475 (2 1/2)	1460 (3 dif)	
1445 (1/2 dif)	—	1439 (2 dif)	1450 (2 1/2)	1445 (3 dif)	CH_2
—	—	1410 (1/2)	—	—	
—	—	—	—	1392 (1)	
1386 (4dif)	3191 (2 1/2)	1373 (1/2 dif)	1380 (2 1/2)	1376 (2 1/2)	→ ω (nucleo pirrolico)
—	—	1327 (1)	—	1310 (1 1/2)	
1279 (3)	1286 (3)	1294 (2)	1298 (5)	1293 (2)	
—	1247 (1 1/2)	1260 (1/2)	—	—	
—	—	1175 (1/2)	1184 (2)	—	
1088 (3)	1089 (1 1/2)	—	1075 (2)	—	
1062 (1)	1032 (1 1/2)	1060 (3)	—	1056 (1 1/2)	
—	—	—	—	1001 (4)	
976 (0)	981 (2)	960 (1/2)	969 (2)	—	
937 (1)	912 (1 1/2)	924 (1)	950 (1 1/2)	948 (1)	
873 (1/2)	—	—	—	—	
829 (1/2)	—	—	—	—	
—	—	790 (1/2)	—	—	
—	—	746 (1)	737 (1)	—	
—	—	721 (1)	—	—	

Segue: TABELLA.

N. Etil pirrolo	N. Allil pirrolo	N. Metil 2-5 dietil pirrolo	N. Etil 2-5 dimetil pirrolo	2-5 dimetil 3 etil pirrolo	*Note*
695 (1/2)	—	—	688 (2)	—	
652 (1)	—	—	—	—	
613 (1/2)	—	—	—	609 (2)	
—	—	—	553 (1)	574 (2 1/2)	
—	—	—	502 (1)	—	
—	—	—	379 (1)	378 (1/2)	
—	—	—	284 (2 1/2)	254 (2)	
—	—	—	—	206 (1 1/2)	
—	—	—	177 (1)	141 (1 1/2)	

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Righe riferibili ai gruppi NH, CH, CH_2, CH_3. — Si osserva che la riga diffusa oltre 3300 cm^{-1} [che in precedenti lavori per analogia con i risultati di ricerche di Kohlrausch e della sua scuola (1) si era attribuita alle oscillazioni N–H (2) e si era riscontrata solo negli spettri dei pirroli « liberi » all'azoto] anche per gli spettri qui riportati si presenta solo nel caso del 2·5·dimetil–3·etilpirrolo mentre manca in tutti in tutti i pirroli sostituiti all'azoto.

Il doppietto 3100-3150 cm^{-1} presentato dallo spettro del pirrolo non sostituito e attribuito alle oscillazioni dei C–H del nucleo pirrolico si presenta nei pirroli anche N-sostituiti ma liberi nelle posizioni α e β confermando quanto era già stato da noi trovato per l'N–metilpirrolo (3). Nel caso dei pirroli sostituiti in α o β delle due righe ne permane una sola. Le righe tra 2990 e 2800 cm^{-1} mancano nel pirrolo non alchilato e sono da riferire alle oscillazioni interne dei gruppi metilici ed etilici sostituenti. Notevole la riga a 2970 cm^{-1} circa che si presenta solo nei pirroli etilsostituiti distinguendone così gli spettri da quelli dei pirroli solo metilsostituiti.

Di notevole interesse è la riga dovuta ad una delle oscillazioni simmetriche dei gruppi CH_2 a 1450 cm^{-1} circa. Si era già osservato (4) che i

(1) K. W. F. KOHLRAUSCH, *Der Smekal-Raman-Effekt*, p. 330.

(2) G. B. BONINO R. MANZONI-ANSIDEI, P. PRATESI, « Z. physic. Chem. », B. *22*, 28 (1933).

(3) G. B. BONINO, R. MANZONI–ANSIDEI, P. PRATESI, « Z. physic. Chem. », *25*, 351 (1934).

(4) G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, P. PRATESI, « Z. physic. Chem. », B. *25*, 352 (1934).

pirroli metilati solo in α– presentano una sola riga in questa regione mentre i pirroli metilati in α e β mostrano due righe. Tale fatto si poteva interpretare come una distinzione tra le proprietà dei gruppi CH_3 α e β sostituiti. Va ricordato che una tale distinzione si osserva anche nelle proprietà chimiche [1].

Una analoga coincidenza si ha per i pirroli N– e α– sostituiti. Così mentre l'N-etilpirrolo e il 2·5·dimetilpirrolo, presentano rispettivamente solo una riga in detta zona (spostata verso le minori frequenze per l'N–etilpirrolo e verso le maggiori per il 2·5·dietilpirrolo) l'N–etil–α·α′ dimetilpirrolo presenta due righe riferibili ai CH_2 sostituiti in posizioni diverse nel nucleo pirrolico. In precedenza si era notata la posizione notevolmente bassa della riga in questione nel caso dell'N-metilpirrolo. L'esame comparativo dell'N-metil; N-etil, N-allilpirrolo mostra come per la riga in discussione aumenta il valore della frequenza con l'aumentare della complessità dello alchile N-sostituito.

α–metilpirrolo	1469 cm^{-1}
N–metilpirrolo	1415 »
N–etilpirrolo	1445 »
N–allilpirrolo	1478 »

Righe riferibili al nucleo pirrolico. — Delle righe caratteristiche del nucleo pirrolico si osservano nettamente nei pirroli studiati quelle righe che già in precedenti lavori abbiamo mostrato permanere nei pirroli sostituiti e cioè la riga a 1460–1500 cm^{-1} e la riga a 1370–1390 cm^{-1} circa. Abbiamo già riferito altrove [2] che tali due righe caratteristiche del nucleo pirrolico permangono anche nel tetracloropirrolo nonostante la completa sostituzione dei 4 idrogeni legati al carbonio con atomi di massa molto superiore. Mentre la posizione della riga 1370–1390 cm^{-1} varia assai di poco negli spettri dei pirroli studiati in questa Nota rispetto al pirrolo non sostituito la 1460 cm^{-1} del pirrolo si porta a 1500 cm^{-1} circa nei pirroli alchilati all'azoto, a 1510–1515 nei dimetilpirroli e raggiunge e supera anche i 1520 cm^{-1} circa nei pirroli polialchilati al carbonio. Tale spostamento è ormai confermato costantemente dagli spettri dei numerosi derivati del pirrolo da noi pubblicati in questo ed in precedenti lavori. È nostra opinione che questo fatto sperimentale ormai nettamente e stabilmente acquisito possa venire chiarito attribuendolo ad una tendenza del nucleo pirrolico polialchilato nella forma

(1) H. Fischer, Baumann, Riedl, «Lieb. Ann.», *475*, 205 (1929); H. Fischer, Scheyer, «Lieb. Ann.», *434*, 237 (1923); W. Siedel, H. Fischer, Hoppe–Seylers, «Z. physiol. Chem.», *214*, 146 (1933); H. Fischer, E. Adler, Hoppe–Seylers «Z. physiol. Chem.», *197*, 248 (1931).

(2) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, P. Pratesi, «Z. physic. Chem.», B. *25*, 348 (1934).

« aromatica » ad attenuare man mano detta configurazione per passare ad una forma esclusivamente « periferica » dalla quale sarebbe anche più probabile la graduale evoluzione ad una forma nettamente olefinica a tipo classico Kekuleiano. Ci riserviamo di ritornare su questo argomento in un prossimo lavoro d'insieme sulla costituzione del nucleo pirrolico non appena ultimate le ricerche chimico–fisiche ancora in corso ed atte ad ampliare ulteriormente le conoscenze sperimentali su questo delicato argomento.

Strettamente collegato con il problema della costituzione del nucleo pirrolico è lo studio della riga a 1560–1600 cm.$^{-1}$ riferibile alla presenza di « doppi legami » nel nucleo stesso. Le nostre precedenti ricerche ci avevano mostrato che mentre il pirrolo non sostituito non mostra nel suo spettro Raman le righe del « doppio legame » queste righe cominciano ad apparire con debole intensità nei pirroli alchilati al carbonio. Si spiegava tale fatto con l'ipotesi (appoggiata anche su dati puramente chimici [1]) che nei pirroli alchilati al carbonio diventi non trascurabile la probabilità di una forma a « doppi legami » del nucleo pirrolico, forma caratterizzata da una più netta « basicità ». Lo studio dello spettro del 2·5·dimetil. 3·etilpirrolo riconferma le precedenti conclusioni mostrando una debole riga del « doppio legame » a 1585 cm.$^{-1}$. L'N–metilpirrolo viceversa non mostra la riga del « doppio legame ». Però le ricerche riportate in questa Nota riescono a rilevare che tale assenza non è una caratteristica di tutti i pirroli N–sostituiti. Si comportano come l'N–metilpirrolo anche l'N–etil e l'N–allilpirrolo (per il quale la intensa riga del doppio legame a 1636 cm.$^{-1}$ non deriva dal nucleo pirrolico ma va riferita al doppio legame allilico). Anche l'N–etil α–α′dimetilpirrolo non mostra riga del doppio legame nucleare. Viceversa l'N–metil α–α′–dietilpirrolo mostra nel suo spettro Raman debole ma netta una riga di « doppio legame » nucleare. Dunque resta confermato anche per i pirroli N–sostituiti che una forte alchilazione al carbonio aumenta la probabilità di « doppi legami nucleari ». Tale aumento della probabilità di doppi legami nucleari per sostituzione di alchili al nucleo è risentita in massimo grado dal nucleo furanico (come già abbiamo dimostrato in precedenti lavori [2] lavori confermati da Glockler e Wiener [3] e da Matsuno e Han [4]), in grado minore, se pure nettissimo, dal nucleo pirrolico libero all'azoto. Le ricerche che qui illustriamo mostrerebbero che i pirroli sostituiti all'azoto risentono pur essi di un tale aumento per effetto dell'alchilazione al carbonio ma in grado minore dei pirroli liberi all'azoto. Infatti mentre α–α′·dimetilpirrolo [5] mostra già la riga del C=C, l'N–etil α–α′ dimetilpirrolo

(1) P. Pratesi, « Gazz. Chim. It.», *65*, 658 (1935).

(2) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, « Z. physic. Chem.», B. *25*, 338 (1934).

(3) G. Glockler, B. Wiener, « J. Chem. Phys.», *2*, 47 (1934).

(4) K. Matsuno, K. Han, « Bull. Chem. Soc. Japan», *9*, 327 (1934).

(5) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, P. Pratesi, « Z. physic. Chem.», B. *25*, 348 (1934).

non ne presenta tracce nel suo spettro. Sostituendo in quest'ultimo i due metili con due gruppi etilici si ha netta la comparsa di una riga del C=C a 1567 cm^{-1}.

Su altre minori particolarità di questi spettri ritorneremo in un lavoro di insieme dove ci proponiamo di riassumere le numerose osservazioni emerse dalla già forte massa di dati sperimentali sui quali in parte si è riferito nelle precedenti pubblicazioni.

Prendiamo occasione di questo lavoro pubblicato nella *Bibliografia Italiana* per ringraziare l'illustre prof. Geh. Hans Fisher per il vivo interesse addimostrato per le nostre ricerche sullo spettro Raman dei pirroli (le prime parti sono già apparse sullo *Zeis. für Phys. Chem.* »[1]) per il suo appoggio, per gli efficaci consigli e per le numerose sostanze messe a nostra disposizione.

Biologia. — *Osservazioni sopra una malattia del trifoglio rara in Italia: l'antracnosi da "Kabatiella caulivora (Kirchn.) Karak."*[2]. Nota[3] di G. Goidànich, presentata dal Corrisp. L. Petri.

Nella primavera decorsa, la Cattedra ambulante di Agricoltura di Verona, denunciava a questa R. Stazione di Patologia vegetale, la comparsa, nelle zone collinari di quella provincia, di una malattia gravemente dannosa alla cultura del trifoglio.

Fino dai primi esami che feci dell'abbondante materiale di studio (*Trifolium pratense*) pervenutoci in quella occasione, dopo che il mio Direttore, prof. L. Petri, mi affidò lo studio di questa malattia, rilevai come essa meritava di essere studiata e segnalata: e ciò per le caratteristiche che possiede il fungo che la produce e perchè la sua presenza era finora ignorata in Italia (quantunque, come dirò poi, essa vi esista invece da parecchio tempo).

Si tratta dell'antracnosi causata dal fungo melanconiaceo *Kabatiella caulivora* (Kirchn.) Karak., malattia diffusa ed assai temuta all'estero, in Europa ed in America. (Nome tedesco « Stengelbrenner des Klees », inglese « Clover anthracnose »).

Riservandomi ad altra occasione di farne una trattazione più accurata, descrivo qui brevemente i caratteri macroscopici e microscopici presentati dalle piante ammalate ed espongo alcune osservazioni sulla posizione sistematica che occupa il fungo parassita che fu per lungo tempo, e lo è ancora erroneamente da certuni, ritenuto (più che altro per l'aspetto delle alterazioni che produce sulla pianta ospite) una specie del genere *Gloeosporium* Desm. a cui appartengono i più comuni agenti di antracnosi.

(1) G. B. Bonino e collab., « Z. physic. Chem. », B. *22*, 21 (1933); B. *25*, 348 (1934).

(2) Lavoro eseguito presso la R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1935.

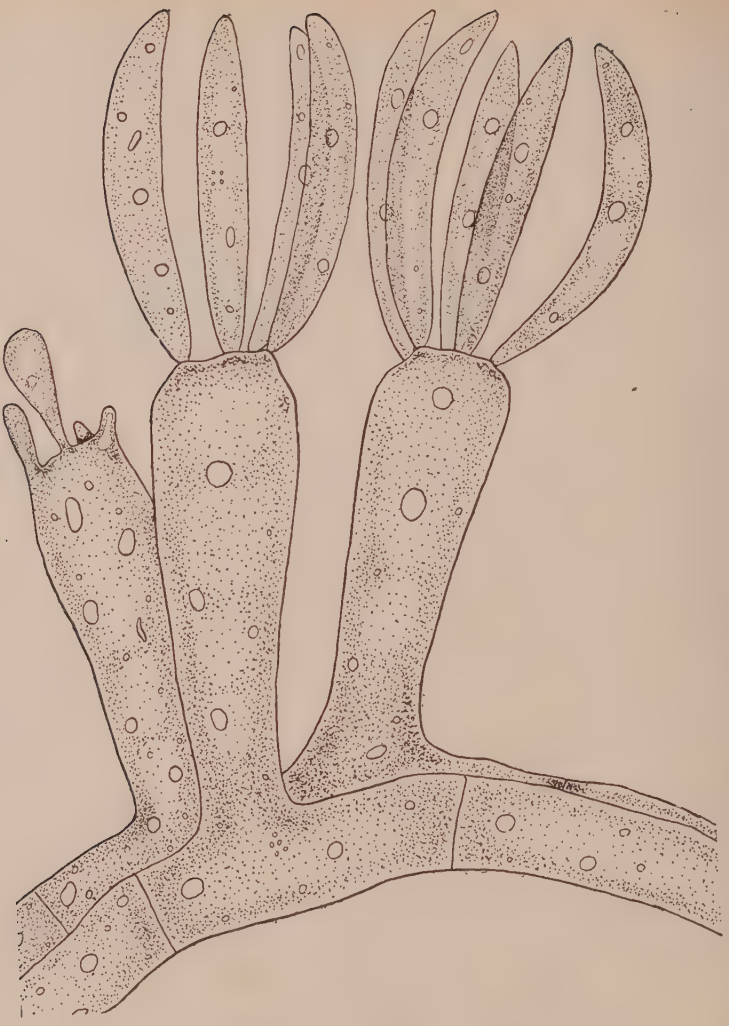
Sui fusti e sui piccioli fogliari delle piante ammalate si osservano delle macchie, di pochi millimetri di diametro, in genere allungate, di un colore dapprima uniformemente scuro, in seguito con una parte centrale più chiara. In corrispondenza di tali macchie, che possono comparire in gran numero sopra uno stesso stelo ed in casi di forte attacco anche confluire, i tessuti vanno soggetti ad un graduale disfacimento, che può giungere in breve fino al midollo. La parte di tessuto così alterato allora si affloscia e la lesione viene ad assumere l'aspetto di una fenditura. Le parti della pianta che si trovano al di sopra dei punti in cui è comparsa una simile lesione, avvizziscono rapidamente e disseccano: in ciò consiste il danno che produce la malattia.

Microscopicamente si osserva che i tessuti alterati sono invasi da un micelio, le cui ife, ialine, ad andamento abbastanza regolare, sono inter- ed intracellulari. Il colore bruno che assumono i tessuti è dovuto in parte ad accumulo di antociani ed in parte ai prodotti di disfacimento e necrosi a cui soggiacciono le cellule del parenchima. Nell'interno dei vasi si può riscontrare talvolta una sostanza gommosa, scura.

Le fruttificazioni del fungo parassita che compaiono abbondanti in corrispondenza delle macchie (specialmente se si ha cura di mantenere per un poco di tempo il materiale ammalato in ambiente umido) si presentano macroscopicamente come piccole masserelle piuttosto consistenti, di un colore bianco-grigio, le quali fuoriescono dalle aperture stomatiche o direttamente attraverso una lacerazione dell'epidermide. Sono costituite da un ammasso compatto dei conidiofori del fungo, la cui caratteristica costituzione merita di essere particolarmente descritta.

Il conidioforo si innalza sopra un fitto intreccio di ife, che può assumere talvolta l'aspetto di pseudostroma; ha forma di clava con l'ingrossatura rivolta in alto (vedi figura). Su questa ingrossatura sono disposti i conidi, in vario numero, da 3 ad 8, portati da esili sterigmi la cui presenza non compare se non dopo la caduta dei conidi stessi. Quest'ultimi sono ialini, continui, a forma di falce (vedi figura). Nel suo aspetto generale, quindi, il conidioforo ricorda un basidio: si tratta, però, qui di una pura somiglianza morfologica perchè questo fungo è ben lontano sistematicamente dalle *Exobasidiaceae* o dalle *Corticiaceae* a cui, nel caso, dovrebbe essere avvicinato. Del pari, nel suo aspetto generale, il fungo del trifoglio ricorda i generi *Microstroma* v. Niessl. e *Helostroma* Pat., parassiti fogliari di diverse piante, che sono da taluni inclusi fra i basidiomiceti, da altri, ed io ritengo con maggior ragione, fra le melanconiacee dei funghi imperfetti.

Dalla descrizione che ho sopra riportato del fungo del trifoglio, appare chiaramente come fosse errato il mantenerlo nel genere *Gloeosporium* Desm., in cui, si sa, i conidiofori sono di calibro pressapoco uniforme in tutta la loro lunghezza ed i conidi portati singolarmente all'apice del conidioforo.



Conidiofori e conidî di *Kabatiella caulivora* (Kirchn.) Kerak.

Come *Gloeosporium caulivorum* n. sp. fu descritto in Germania dal Kirchner (1) nel 1902. Fu accettato come tale fino a che, nel 1923, il Karakulin (2), lo incluse nel genere *Kabatiella* del Bubak, col nome di *Kabatiella caulivora*. Il carattere fondamentale di questo genere è appunto quello

(1) O. Kirchner, *Bemerkungen über den Stengelbrenner des Rotkleees.* « Ztschr. für Pflanzenkrankh. », *12*, 1902, pp. 10–14.

(2) B. P. Karakulin, *On the question of the systematic position of fungi belonging to the type of « Exobasidiopsis mihi »*. « Not. Syst. ex Inst. Horto Bot. Petropol. », *2*, 1923, pp. 101–108.

di avere le fruttificazioni pseudobasidiali; vi appartengono ora le specie, oltre la *caulivora*: *microsticta* Bub., *ribis* Vassil., *nigricans* (Atk. et Edg.) Karak., *polyspora* (Bub. et Syd.) Karak.

Gli studî più accurati sul valore sistematico di questo genere sono quelli del Karakulin; questo A. ha messo in sinonimia a *Kabatiella* (di cui ha modificato la diagnosi generica e la ha trasportata dagli ifali alle melanconiacee) il suo genere *Exobasidiopsis*, ed i generi *Protocoronospora* Atk. et Edg., *Pachybasidiella* Bub. et Syd. Sistematicamente assai prossimi, ritiene il Karakulin anche i generi *Helostroma* e *Microstroma*.

Un altro fungo che va tenuto presente è pure quello descritto dal Lafferty [1] come parassita del lino col nome di *Polyspora lini* n. gen. et sp. Anche qui si hanno numerosi conidî all'apice di un conioforo. Non avendo però di questo fungo altro che la pura descrizione, non so dire quanto possa essere avvicinato a *Kabatiella*.

Non vi è dubbio che la fruttificazione pseudobasidiale tipo *Kabatiella* è comune anche ad altri funghi oltre a quelli sopra ricordati, ed è da credere che sulla base di questa caratteristica morfologica si possano trovare affinità fra forme fungine ritenute di posizione sistematica anche distante. Bisogna, però, tenere ben distinto quando si tratti di una vera e propria identità morfologica, che può essere assunta come carattere sistematico, da quando si ha a che fare con una semplice somiglianza. Martin [2] ad esempio ha creduto di poter indicare come *Kabatiella* sp. una forma gemmante riscontrata nel ciclo di sviluppo di *Leptosphaeria coniothyrium* (Fkl.) Sacc.; e ciò perchè coltivando questo fungo ha ottenuto un micelio sporificante con disposizione dei conidi che ricordava quella di *Kabatiella*. È chiaro che qui non si tratta altro che di un caso simile a quello della mucedinacea di *Ophiostoma ulmi* (Buis.) Nannf. che viene da taluni chiamata col nome di *Cladosporium*, e di certe forme toruliodi appartenenti a diversi funghi, che prendono il nome di *Monilia*, sebbene che con questi generi non abbiano alcuna parentela reale.

Da un primo sguardo alla letteratura fitopatologica italiana avevo creduto che questa malattia non fosse ancora stata osservata in Italia. Ho potuto accorgermi poi che, al contrario, lo è stata parecchi anni fa; ma fu confusa con un'altra e descritta sotto falso nome. Nel 1908 il Voglino studiò [3] un deperimento del trifoglio pratense in Piemonte: il fungo isolato lo classificò come *Gloeosporium trifolii* Peck. che lui ritenne sinonimo di

(1) H. A. Lafferty, *The 'browning' and 'stem-break' disease of coltivated flax «Linum usitatissimum» caused by «Polyspora lini n. gen. et sp.»* «Sci. Proc. Roy. Dubl. Soc.», *16*, 1921, pp. 248-274.

(2) G. H. Martin, *Polymorphism of «Leptosphaeria conjothyrium» (Fckl.) Sacc.* «Phytopath.», *19*, 1929, p. 879.

(3) P. Voglino, *I parassiti delle piante osservati nella provincia di Torino e regioni finitime nel 1908*. «Ann. R. Acc. d'Agric. Torino», *51*, 1908, pp. 221-256.

Gloeosporium (Kabatiella) caulivorum. Questi due parassiti sono invece ben diversi tra di loro avendo, il primo tutti i caratteri di un vero e proprio *Gloeosporium* che mancano, come ho già detto, al secondo.

La descrizione del Voglino, in ogni modo, non lascia alcun dubbio che anche allora si trattava di *Kabatiella caulivora*, così che si può affermare con sicurezza che l'antracnosi del trifoglio prodotta da questo fungo è presente in Italia da quasi una ventina di anni. È interessante inoltre rilevare che il Voglino dice di aver osservato la forma ascofora del fungo, sia in natura che in cultura artificiale: e precisamente le *Pseudopeziza trifolii* (Bern.) Fuckel, essa pure agente di una nota malattia del trifoglio. Tale osservazione, però, non è stata ripetuta da alcuno dei numerosi altri AA. che in seguito ebbero occasione di occuparsi della malattia.

La malattia che ho descritto è diffusa in molti paesi di Europa e di America. Vanno soggette all'infezione diverse specie di leguminose da foraggio appartenenti ai generi *Trifolium* (specialmente *Trif. pratense, incarnatum, hybridum*), *Medicago, Onobrichys*. Discordanti sono le opinioni nei riguardi della resistenza delle piante a seconda della loro provenienza: da taluni si ritiene che le varietà europee siano meno recettive all'infezione che quelle americane; da altri la cosa opposta. Secondo Sampson [1], poi, sono più resistenti le varietà che fioriscono tardi. Del pari discordanti sono le opinioni se il seme possa trasmettere o meno l'infezione.

Condizione indubbiamente favorevole allo sviluppo della malattia è l'eccesso di umidità, sebbene che sembri che un periodo più o meno lungo di siccità possa avere lo stesso effetto [2].

L'antracnosi da *Kabatiella* è, in altri paesi, ritenuta come malattia pericolosa e notevolmente dannosa. È cosa buona, quindi, che in Italia abbia scarsa diffusione, e sarà opportuno che essa venga combattuta ogni volta che faccia la sua comparsa. A tale scopo non si potrà agire meglio, di come ha consigliato questa Stazione alla Cattedra ambulante di Verona; e cioè l'immediata sfalciatura dei prati infetti, con distruzione del materiale raccolto, ed astensione dalla coltivazione sul luogo del trifoglio o di altre leguminose foraggere per diversi anni. In tal modo si verranno a sopprimere i germi che si trovano sulle piante ed il fungo che sverna nelle parti di queste che rimangono sul terreno, non trovando per lungo tempo l'ospite da attaccare, è destinato a soccombere.

(1) K. Sampson, *Comparative studies of «Kabatiella caulivora» (Kirch.) Karak. and* Colletotrichum trifolii *Bain et Essary, two fungi wich cause red clover anthracnose*. «Trans. Brit. Mycol. Soc.», *13*, 1928, 103-142.

(2) Cfr. S. J. Wellensiek, *Waarnemingen over de Klaverstengelbrandziekte*. «Tijdschr. ov. Plantenziekt.», *32*, 1926, pp. 266–303.

Fisiologia. — *Presenza e distribuzione di alcune sostanze riducenti nel neurasse* [1]. Nota [2] di M. Mitolo, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Lo studio dei fenomeni ossido–riduttivi del sistema nervoso centrale, non avendo richiamato l'attenzione di molti ricercatori, può ritenersi soltanto all'inizio, specialmente per quanto riguarda i rapporti fra intensità di tali fenomeni e grado di attività funzionale dell'organo nervoso. I vari AA. si sono occupati con predilezione del potere ossidante della sostanza nervea, anzichè della proprietà riducente; in realtà, al lume delle attuali conoscenze sulle ossidazioni intraorganiche, non possono considerarsi distinte le azioni ossidanti dalle riducenti; trattasi, cioè, di reazioni di ossido-riduzione accoppiate e concatenate fra loro.

Un metodo che, secondo la teoria dell'attivazione dell'ossigeno, svela il potere ossidante dei tessuti, e che ha avuto molta fortuna nella tecnica istochimica, è quello basato sulla sintesi ossidativa dell'indofenolo bleu, a partire dall'α–naftolo e dalla p-fenilendiamina (reattivi di Röhmann e Spitzer) in presenza di ossigeno, sintesi operata da una ossidasi diretta dei tessuti; talchè la reazione, già segnalata da P. Ehrlich e più tardi da Winkler, indi modificata da Schultze, oggi ha assunto in istologia il termine di reazione delle ossidasi. Essa è stata applicata anche al sistema nervoso centrale (metodo di Gräff, detto anche della *Nadireaktion*); nei pezzi freschi si osservano, dopo l'azione del reattivo di Röhmann e Spitzer, particolari granulazioni colorate in bleu; secondo alcuni (Gräff), il colore metterebbe in evidenza granuli non preesistenti nel tessuto nervoso; la maggior parte degli AA. però sostiene che tali granulazioni preesistono alla reazione (sarebbero, secondo v. Giercke e Marinesco, quei granuli che si rendono visibili sia al microscopio, sia all'ultramicroscopio, senza impiego di reattivi speciali); Dietrich li considera costituiti di lipoidi, Bertrand e Katsunuma li ritengono accumoli di catalizzatori metallici (particolarmente di Fe), v. Giercke e Marinesco granuli di fermenti (ossidasi), deputati alla respirazione interna cellulare. Vernon (3) in più lavori ha studiato questa indofenolossidasi dei tessuti, fra cui il cervello di vari animali; ma una prima ricerca sistematica per il sistema nervoso centrale si deve a Pighini (4), il quale, trattando pezzi di encefalo, bulbo e midollo spinale di diversi animali e dell'uomo col reattivo di Röhmann e Spitzer, osservò che la sostanza grigia si colorava in bleu, mentre quella bianca non assumeva il colore. Tali conclusioni, conformi a quelle successive di Marinesco (5), che localizza il fermento soltanto nelle cellule nervose della sostanza grigia, sono state modificate più tardi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1935.

(3) H. M. Vernon, «Journ. of Physiol.», XLII, 402, 1911; XLIII, 96, 1911–12; XLV, 195, 1912-13.

(4) G. Pighini, «Bioch. Zeitschr.», XLII, 124, 1912.

(5) G. Marinesco, «Libro en honor de R. S. Ramon y Cajal», I, 361, 1922.

da Bielschowsky e Rose (1), i quali hanno riscontrato le granulazioni non solo nella cellula nervosa, ma anche nella glia della sostanza grigia; fatto questo confermato e più dettagliatamente studiato da Berlucchi (2) su vari gangli della base degli animali e dell'uomo (centri del sistema extrapiramidale). Anzi la glia di alcuni gangli contiene più granuli che non le stesse cellule nervose, per cui dovrebbe ritenersi errato il parere di Marinesco, secondo il quale le granulazioni ossidasiche sono intimamente legate all'attività funzionale dell'elemento cellulare. Cade qui a proposito ricordare alcuni esperimenti, che non trovo citati dai ricercatori che si sono occupati della questione, eseguiti dal compianto Sereni (3): servendosi dello stesso reattivo di Röhmann e Spitzer, l'A. vide che nel sistema nervoso centrale di rospo i granuli di ossidasi si trovano sparsi per tutta la sostanza grigia, accumulati però in corrispondenza delle cellule, che appaiono come zone più intensamente colorate e granulose rispetto al fondo bleu-grigio; nei preparati che siano sopravvissuti per un tempo più o meno lungo, le granulazioni sono nettamente diminuite di numero ed anche meno intensamente colorate; esse scompaiono nelle cellule più precocemente che nella sostanza grigia intercellulare, anzi in taluni casi le cellule possono essere del tutto prive di granuli, mentre questi sono ancora dimostrabili nella sostanza grigia interposta. Di più, sembrò al Sereni che l'applicazione locale di stricnina sul neurasse favorisse la formazione dei granuli; per cui ritenne esservi un certo rapporto fra determinati stati funzionali del tessuto nervoso centrale ed il maggior numero dei granuli di ossidasi.

Il potere ossidante di diverse parti del sistema nervoso di coniglio e uomo è stato saggiato con vari metodi da Leone (4); tale potere raggiunge l'*optimum* a 37-40° C.; dopo bollitura della sostanza nervosa l'A. ha notato scarsissima diminuzione del potere ossidante, per cui ha concluso che questa proprietà del tessuto nervoso è indipendente dalla presenza dei cosiddetti granuli di ossidasi o del Fe, ma è inerente alle proteine del neurasse, che avrebbero funzione catalizzatrice, ora più spiccatamente di ossidazione, ora di riduzione, secondo le condizioni sperimentali e il dispositivo tecnico. Leone ha pertanto escluso che il potere ossidante sia dovuto a fermenti veri e propri (Vernon (5) aveva osservato che le indofenolossidasi dei tessuti dei mammiferi, compreso il cervello, sono estremamente termolabili) ed ha proposto che la *proprietà* ossido-riducente della sostanza nervosa (comune anche al liquido cerebro-spinale) sia indicata col nome *ossido-reducasi termostabile* (termine che mi sembra assai improprio, senza che peraltro riesca a chiarire il concetto dell'A).

Ho già detto che sul potere riducente del tessuto nervoso centrale si hanno pochissime ricerche; prescindo, naturalmente, dalle reazioni di riduzione date dagli zuccheri che entrano nella composizione chimica del neurasse e da quelle utilizzate in istologia per mettere in evidenza gli elementi nervosi. Ehrlich (6) fu il primo a dimostrare per via istochimica, che la sostanza grigia, per stimolazione elettrica, acquista un potere di riduzione, che diviene più evidente con l'aumentare dell'intensità dello stimolo. Secondo Herter (7), la proprietà riducente della corteccia cerebrale diminuise nel coniglio, raffreddando l'animale. Anche Thunberg (8), impiegando il suo metodo al bleu di metilene, ha studiato i processi ossido-riduttivi delle fibre nervee. Le più recenti indagini in proposito si devono a Leone (9), il quale ha calcolato il potere riducente di piccoli pezzi di sostanza nervosa

(1) M. Bielschowsky e M. Rose, « Journ. f. Psychol. u. Neurol. », XXXIII, 73, 1927.
(2) C. Berlucchi, « Arch. Ist. Biochim. Ital. », I, fasc. 2°, 1929.
(3) E. Sereni, « Arch. di Fisiol. », XXII, 185, 1924.
(4) F. Leone, « Rass. di Studi psichiatr. », XIX, 677, 1930.
(5) H. M. Vernon, « Journ. of Physiol. », XLIV, 150, 1912.
(6) P. Ehrlich, *Das Sauerstoffbedürfnis des Organismus*. Berlino, 1885.
(7) C. A. Herter, « Zeitschr. f. Physiol. Chem. », XLII, 493, 1904.
(8) T. Thunberg, « Skand. Arch. f. Physiol. », XLIII, 275, 1923.
(9) F. Leone, loc. cit.

di coniglio e uomo (sostanza grigia e bianca, nucleo lenticolare, talamo ottico, *substantia nigra*, corteccia cerebellare, nucleo dentato, midollo spinale, nervi periferici), in base al tempo di decolorazione di una soluzione di bleu di metilene all'uno per centomila (riduzione del bleu di metilene a leucobase). Nessuna apprezzabile differenza l'A. ha notato tra le diverse parti di sostanza nervosa (sostanza grigia, bianca ecc.) circa l'intensità del potere riducente, il quale è un po' più spiccato per i nervi periferici (sciatico di coniglio); nessuna differenza v'è anche tra pezzi freschi e pezzi fissati in formolo da diversi anni. Mentre a temperatura ambiente lo scoloramento del bleu di metilene avviene dopo circa 4 giorni, ad alta temperatura (100-120° C.) esso si compie dopo circa 2 ore soltanto; per pezzi di tessuto esaminati dopo bollitura i fenomeni riducenti diventano più rapidi e più intensi; infine, anche i processi putrefattivi a carico della sostanza nervosa agevolano la proprietà riducente. Tale proprietà il Leone mette in rapporto con le proteine del tessuto nervoso, sostenendo che essa si manifesta meglio ogni volta che i protidi tendono a modificarsi o disintegrarsi (bollitura, alte temperature, putrefazione).

Sin da quando sono stati elaborati metodi semplici e rapidi (chimici e istochimici) per la dimostrazione del glutatione nei tessuti, numerosi AA. hanno svelato e dosato il tripeptide nell'asse cerebro-spinale dei diversi animali; per ragioni di brevità ometto i molti dati esistenti nella letteratura, e mi limito soltanto a ricordare che tutti gli sperimentatori ritengono che la quantità di glutatione ridotto, presente nella sostanza nervosa, è più esigua di quella dei surreni e del fegato. Comunque, dato l'alto valore che oggi si assegna al tripeptide nel determinismo dei processi ossido-riduttivi, anche per il neurasse esso appare tra le sostanze ossido-riducenti più importanti.

Nel 1934, studiando assieme a F. G. Young le basi istochimiche di alcune reazioni di colorazione del cervello, ho dimostrato (1) che tutti i tessuti cerebrali esaminati (di topo, ratto, cavia, bue) contengono una sostanza che ha la proprietà particolare di ridurre il $AgNO_3$ in soluzione neutra o acida, a temperatura ambiente, mentre non è in grado di ridurre il $AgNO_3$ ammoniacale. Estratti idroalcoolici di tessuto cerebrale contenenti questa sostanza riducono l'indicatore di ossido-riduzione 2: 6-diclorofenoloindofenolo sotto le stesse condizioni descritte da Birch, Harris e Ray (2) per la determinazione dell'acido ascorbico nei tessuti; ma le proprietà chimiche e biologiche di questa sostanza (o gruppo di sostanze) la differenziano nettamente dall'acido ascorbico. Lasciando impregiudicata la questione della natura chimica di detta sostanza riducente cerebrale (che è tuttora oggetto di studio da parte di F. G. Young e mia), ho ritenuto che il metodo di Birch, Harris e Ray, basato sulla riduzione, in mezzo acido, del 2: 6-diclorofenoloindofenolo, applicato al tessuto nervoso, potesse esprimere, con dati quantitativi, il potere riducente di cui è fornito il tessuto; con l'impiego di un tal metodo, si escludono dalle determinazioni il glutatione ed altre sostanze riducenti note (pirogallolo, composti fenolici ecc.), ma si svelano l'acido ascorbico, la cisteina, l'adrenalina ed altri corpi riducenti ignoti, contenuti nell'estratto acquoso acido di tessuto nervoso.

In questa Nota riferisco le cifre di riduzione delle diverse parti del neurasse di vari animali, le quali esprimono anche la distribuzione topografica di alcune sostanze riducenti (quelle, cioè, rivelate dal metodo usato) nei diversi distretti del sistema nervoso centrale. Appena sacrificato l'animale (in laboratorio o al mattatoio pubblico) si prelevavano le varie parti del neurasse e si sottoponevano subito alle diverse manualità tecniche della ricerca; ho seguito nelle determinazioni tutti i dettagli del metodo, sugge-

(1) F. G. Young e M. Mitolo, «Nature», CXXXIII, 572, 1934.
(2) T. W. Birch, L. J. Harris e S. N. Ray, «Biochem. Journ.», XXVII, 590, 1933.

riti da Birch, Harris e Ray, apportandovi alcune modificazioni descritte in altro mio lavoro [1]. Il potere riducente è quantitativamente indicato nella tabella dal numero dei cc. della soluzione 1:10000 di indicatore scolorati (ridotti) da 1 gr. di tessuto nervoso; nella 3ª colonna è specificata (peso in mgr.) la parte aliquota di sostanza nervosa su cui si è eseguìto il dosaggio. Le esperienze sono state fatte durante il mese di maggio di quest'anno.

Una prima constatazione, di indole generale, è che gli estratti acidi di tutte le varie parti del neurasse sono dotati della proprietà di ridurre l'indicatore 2: 6–diclorofenoloindofenolo. Inoltre, mano mano che si va da specie animali inferiori a specie situate più in alto nella scala zoologica, le cifre esprimenti i valori di riduzione della sostanza nervosa si fanno sempre più piccole: quelle più alte si riferiscono al rospo, le più basse appartengono al bue. Si può dire che questo comportamento non soffra eccezioni, sia per il sistema nervoso centrale *in toto*, sia per le singole parti di esso (midollo spinale, bulbo, ponte, cervelletto, lobi ottici e rispettivamente corpi quadrigemini, talami ottici, emisferi cerebrali). La diminuzione delle cifre non è brusca, ma avviene gradatamente, andando dal rospo al ratto albino, al piccione, alla cavia, al coniglio, al gatto, alla pecora, al cavallo e al bue.

Per ciascun animale esaminato i valori di riduzione aumentano gradualmente dal midollo spinale agli emisferi cerebrali; in altri termini, l'intensità del potere riducente del neurasse segue di pari passo l'ordine secondo cui si dispongono i vari distretti nervosi: le cifre più basse si hanno per il midollo spinale ed encefalico, quelle medie per il ponte, il cervelletto, i lobi ottici e rispettivamente i corpi quadrigemini, quelle più alte per i nuclei centrali di sostanza grigia (talami ottici) e gli emisferi cerebrali. Una eccezione è data dalla cavia, in cui il cervelletto ha il piu elevato potere riducente: nel piccione, probabilmente in conformità delle speciali funzioni dei lobi ottici negli uccelli (Kschischkowski, Martino), si osservano in queste parti valori notevoli, paragonabili a quelli degli emisferi cerebrali.

Generalmente, la sostanza grigia (talami ottici, corteccia cerebellare, corteccia cerebrale del lobo parietale) ha proprietà riducente superiore a quella della sostanza bianca (sostanza bianca o centro midollare del cervelletto, centro ovale degli emisferi cerebrali); se tale differenza non è netta nel coniglio e nel gatto, diviene chiara nella pecora, per rendersi molto evidente nel cavallo e nel bue.

Un confronto fra le parti di sinistra e quelle di destra nel neurasse delle singole specie animali non porta a conclusioni univoche circa il comportamento del potere riducente; tuttavia, mano mano che si sale da specie inferiori a specie situate a un livello zoologico più alto (specialmente nel bue), si nota che i segmenti nervosi della metà sinistra (in particolar modo quelli gerarchicamente più elevati, come la corteccia cerebellare e, più chia-

(1) M. Mitolo, « Arch. di Fisiol. », XXXIV, 102, 1934.

TABELLA.

Specie animale	Parte del neurasse	Aliquota mgr.		cc. di indicatore scolorati da 1 gr. di sostanza nervosa	
		I	II	I	II
I – *Rospo* ♀	midollo spinale	—	390	—	7.29
II – *Rospo* ♂	intumescenza posteriore	205	—	6.87	—
(N. B. – In ciascuna determinazione si sono mescolate insieme le parti di neurasse di sei animali).	intumescenza anteriore	205	—	7.26	—
	bulbo	135	135	7.40	7.80
	lobi ottici	160	120	10.00	9.80
	encefalo	—	335	—	14.14
	emisfero cerebrale D	170	—	13.76	—
	emisfero cerebrale S	170	—	13.35	—
	midollo cervico-dorsale	190	200	6.63	6.55
I – *Ratto albino* ♂ (gr. 185)	bulbo	135	180	7.84	7.88
	cervelletto	200	165	12.55	12.72
II – *Ratto albino* ♂ (gr. 162)	cervello medio	300	365	11.56	10.27
	emisfero cerebrale D	430	380	12.55	12.02
	emisfero cerebrale S	470	365	13.30	12.79
	midollo cervicale	105	215	4.70	4.65
I – *Piccione* ♂ (gr. 435)	bulbo	190	280	7.42	6.78
	cervelletto	300	240	9.60	11.08
II – *Piccione* ♀ (gr. 450)	lobo ottico D	130	125	10.53	9.12
	lobo ottico S	140	125	9.64	9.12
	emisfero cerebrale D	635	665	9.76	8.52
	emisfero cerebrale S	640	720	9.90	10.88
	midollo cervico-dorsale	345	410	4.44	4.46
I – *Cavia* ♂ (gr. 420)	bulbo	360	410	5.72	5.70
	cervelletto	370	440	8.24	9.65
II – *Cavia* ♀ (gr. 450)	ponte	630	1070	5.90	5.61
	corpi quadrigemini	280	220	6.92	7.63
	emisfero cerebrale D	935	1160	6.17	5.79
	emisfero cerebrale S	925	1090	5.92	5.27

Segue: TABELLA.

Specie animale	Parte del neurasse	Aliquota mgr.		cc. di indicatore scolorati da 1 gr. di sostanza nervosa	
		I	II	I	II
I – *Coniglio* ♂ (gr. 1300)	midollo cervicale	455	295	5.18	4.88
	bulbo	525	600	5.23	5.06
	cervelletto	850	900	7.23	6.57
	ponte	385	450	5.55	4.88
II – *Coniglio* ♂ (gr. 1210)	corpi quadrigemini	485	400	5.31	5.55
	sostanza bianca centro ovale D	205	360	6.02	6.75
	sostanza bianca centro ovale S	170	285	6.82	6.63
	corteccia lobo parietale D	560	655	6.55	6.13
	corteccia lobo parietale S	425	605	7.24	6.26
I – *Gatto* ♀ (gr. 1820)	midollo cervicale	550	415	3.47	3.53
	bulbo	660	320	3.83	4.28
	cervelletto	—	1075	—	7.44
	emisfero cerebellare D	520	—	6.94	—
	emisfero cerebellare S	585	—	6.94	—
II - *Gatto* ♀ (gr. 2450)	corpi quadrigemini D	220	210	6.31	7.76
	corpi quadrigemini S	280	330	6.03	8.21
	sostanza bianca centro ovale D	360	280	5.55	5.57
	sostanza bianca centro ovale S	350	220	5.71	6.36
	corteccia lobo parietale D	725	450	5.63	6.80
	corteccia lobo parietale S	680	350	5.83	7.80
I – *Pecora*	midollo cervicale: metà D	—	555	—	2.64
	midollo cervicale: metà S	820	—	2.58	—
	bulbo: metà D	—	955	—	3.22
	bulbo: metà S	1035	—	3.14	—
	corteccia cerebellare S	700	545	5.85	5.39
	sostanza bianca cerebellare D	—	305	—	4.36
	sostanza bianca cerebellare S	305	—	4.42	—
	corpo quadrigemino anteriore D	405	630	4.29	4.55
	corpo quadrigemino anteriore S	385	—	4.49	—
II – *Pecora*	corpo quadrigemino posteriore D	—	350	—	4.71
	corpo quadrigemino posteriore S	—	285	—	5.22
	talamo ottico S	—	380	—	5.39
	sostanza bianca centro ovale D	880	—	2.92	—
	sostanza bianca centro ovale S	915	480	2.56	3.12
	corteccia lobo parietale D	875	—	4.05	—
	corteccia lobo parietale S	995	425	3.50	5.03

Segue: TABELLA.

Specie animale	Parte del neurasse	Aliquota mgr.		cc. di indicatore scolorati da 1 gr. di sostanza nervosa	
		I	II	I	II
I – *Cavallo*	midollo cervicale: metà D	—	1310	—	2.90
	midollo cervicale: metà S	1065	—	2.69	—
	bulbo: metà S	1860	—	2.50	—
	corteccia cerebellare D	—	730	—	5.82
	corteccia cerebellare S	1145	—	4.98	—
	sostanza bianca cerebellare D	—	730	—	4.21
	corpo quadrigemino anteriore D	645	—	4.62	—
	corpo quadrigemino anteriore S	725	—	4.38	—
	corpo quadrigemino posteriore S	—	345	—	4.97
II – *Cavallo*	talamo ottico D	—	700	—	5.95
	talamo ottico S	785	710	5.56	5.63
	sostanza bianca centro ovale D	1185	670	2.13	3.83
	sostanza bianca centro ovale S	775	875	2.73	3.25
	corteccia lobo parietale D	745	635	4.21	5.48
	corteccia lobo parietale S	670	705	4.79	5.48
I – *Bue*	midollo cervicale: metà D	—	2155	—	2.10
	midollo cervicale: metà S	1540	—	2.46	—
	bulbo: metà D	—	1775	—	2.01
	bulbo: metà S	1545	—	2.34	—
	corteccia cerebellare D	—	1365	—	4.57
	corteccia cerebellare S	915	—	5.85	—
	sostanza bianca cerebellare D	940	595	3.13	4.33
	corpo quadrigemino anteriore D	705	—	4.05	—
	corpo quadrigemino anteriore S	755	—	4.23	—
II – *Bue*	talamo ottico D	—	810	—	4.69
	talamo ottico S	—	870	—	4.13
	sostanza bianca centro ovale D	770	1130	3.11	3.01
	sostanza bianca centro ovale S	520	645	3.65	3.—
	corteccia lobo parietale D	590	670	4.76	4.82
	corteccia lobo parietale S	685	760	5.21	5.11

ramente, quella cerebrale), posseggono un più spiccato potere di ridurre l'indicatore, rispetto alla metà destra del neurasse.

Per i corpi quadrigemini nessuna sostanziale differenza si riscontra fra la proprietà riducente degli anteriori e quella dei posteriori; nè pare che vi siano diversità in rapporto al sesso degli animali impiegati nelle ricerche.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

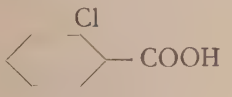
Seduta del 17 novembre 1935 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

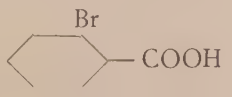
MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati* [1]. Nota III [2] del Socio M. BETTI e di E. LUCCHI.

In una precedente pubblicazione [3] fu mostrato che dalla costante di dissociazione degli acidi *orto*–clorobenzoico ed *orto*–bromobenzoico:



$K \cdot 10^4 = 13.2$

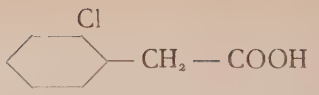


$K \cdot 10^4 = 14.5$

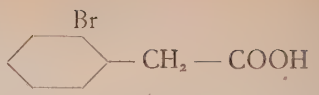
risulta che l'acido cloro–sostituito è meno energico del corrispondente acido bromurato, contrariamente a ciò che si verifica nella generalità dei casi e contrariamente a tutto il ben noto comportamento chimico dei due alogeni. Gli acidi alogeno–benzoici che portano il cloro ed il bromo in posizione *meta* e *para* non presentano invece la anomalia. Particolarità analoghe si riscontrano pure negli acidi alogeno-benzoici nitrosostituiti.

Successivamente [4] fu pure riconosciuto che anche gli acidi orto–alogeno-fenilacetici si comportano irregolarmente:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1935.
(3) «Rendiconti R. Accad. dei Lincei», ser. 6ª, vol. XV, 1° sem., p. 509 (1932).
(4) «Rendiconti R. Accad. dei Lincei», ser. 6ª, vol. XXII, 2° sem., Nota II (1935).



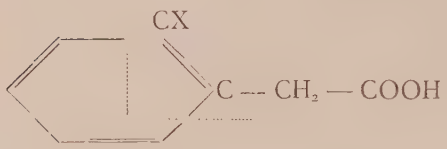
$K \cdot 10^4 = 1.35$



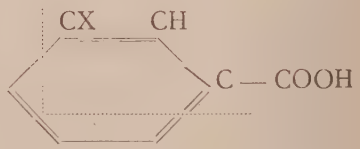
$K \cdot 10^4 = 1.92$

per quanto questi non abbiano l'alogeno così *vicino* al gruppo carbossilico come gli acidi o–alogenobenzoici, ma esso si trovi rispetto al carbossile distante come negli acidi meta–alogenati:

X = Cl o Br



Acidi o–alogeno–fenilacetici

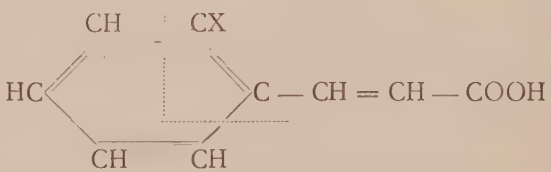


Acidi m–alogeno–benzoici

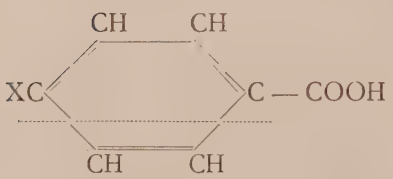
di comportamento, come si è detto, normale.

Era pertanto interessante prendere ora in esame gli acidi orto-alogenocinnamici nei quali l'alogeno ed il carbossile stanno fra loro ad una *distanza* maggiore che nei casi precedenti, si trovano cioè in una condizione in certo modo paragonabile a quella degli acidi *para*–alogenobenzoici:

X = Cl o Br



Acidi orto alogeno-cinnamici



Acidi para–alogenobenzoici

i quali, analogamente ai meta–alogenobenzoici, si comportano regolarmente.

Per gli acidi cinnamici è però necessario tenere presente la possibilità delle due formule stereo–isomere trans e cis:

$$C_6H_5-C-H \qquad\qquad H-C-C_6H_5$$
$$\quad\;\|\qquad\qquad\quad\;\|$$
$$H-C-COOH \qquad\qquad H-C-COOH$$

Acido cinnamico (trans) Acido allocinnamico (cis)

In questa Nota ci occupiamo dei composti corrispondenti alla forma dell'acido cinnamico ordinario (trans).

La preparazione degli acidi orto–clorocinnamico ed orto–bromocinnamico presenta una certa difficoltà, specialmente volendo ottenere prodotti assolutamente puri.

L'*acido orto–clorocinnamico* si prepara [1] dall'aldeide o–clorobenzoica trattandola, secondo la classica reazione di Bertagnini–Perkin, con acetato potassico in presenza di anidride acetica. Il prodotto si purifica facendolo cristallizzare moltissime volte dall'alcool caldo, dal quale si ottiene finalmente in forma di aghi bianchi splendenti che fondono a 207–208°.

Per l'*acido orto–bromo–cinnamico* [2] si parte dall'o–bromo–toluolo, che per ossidazione con cloruro di cromile fornisce la aldeide o–bromobenzoica. Ottenuta questa si procede come nel caso precedente. L'acido, dopo molte cristallizzazioni dall'alcool, si presenta in aghi lucenti incolori, fusibili a 215–216°.

Tanto l'uno che l'altro di questi due composti sono pochissimo solubili nell'acqua e perciò *la misura della costante di dissociazione* presenta gravi dificoltà. È stata effettuata stabilendo per via potenziometrica il pH di una soluzione di acido puro della quale per titolazione si misurava la concentrazione grammimolecolare. Fu seguìto il metodo a compensazione di Poggendorf, mediante pila Weston ed elettrodo a calomelano saturo. La temperatura era di 25°.

Per la misura del pH fu impiegato l'elettrodo a chinidrone, perchè coll'elettrodo a idrogeno si aveva una incipiente riduzione degli acidi alogenati. Questa delicatissima misura del pH fu anche controllata mediante un metodo fotochimico di misura del pH basato sull'impiego del fotometro graduale di Pulfrich e i due metodi condussero a risultati in ottimo accordo fra loro.

Anche per la titolazione delle soluzioni degli acidi, la quale coll'impiego degli indicatori sarebbe andata incontro ad errori assai gravi, fu impiegato il metodo potenziometrico, facendo le curve di salificazione per stabilire la caduta potenziale (punto di flesso), che rappresenta l'esatta salificazione totale dell'acido mediante soda caustica di concentrazione nota.

Per queste misure è stato posto in opera anche l'elettrodo ad antimonio, che specie per le curve di salificazione si è dimostrato di impiego veramente

(1) G. Lasch, « Monatshefte » *34*, 1654 (1913).
(2) Rich e Charkelis, « Bull. », [4], *19*, 289 (1916).

soddisfacente ed ha fornito valori ottimamente concordanti con quelli ottenuti coll'elettrodo a chinidrone.

Per la pochissima solubilità degli acidi, dovendo sperimentare con soluzioni molto diluite, prive affatto di potere tampone, è facile intendere come la introduzione sia pure di piccole quantità di chinidrone o di triossido di antimonio (nel caso della misura potenziometrica del pH) oppure l'aggiunta della soluzione dell'indicatore (nel caso della misura fotometrica del pH), potessero dar luogo ad oscillazioni nei valori ai quali si giungeva. Ma anche prescindendo da queste circostanze, dato che le misure venivano fatte nell'aria, la inevitabile presenza di CO_2 nella soluzione non consentiva di raggiungere nei dati un'approssimazione maggiore di $\pm$ 0,01 di pH.

Ora i risultati ottenuti coi due acidi sono stati i seguenti:

Acido orto–cloro–cinnamico	K. $10^4 = 0.39$
Acido orto–bromo–cinnamico	» $10^4 = 0.39$

e, come si vede, non permettono di riconoscere alcuna differenza nella loro energia.

D'altra parte queste costanti sono di poco diverse da quella dell'acido cinnamico libero, per il quale si ha:

$$K.\ 10^4 = 0.365$$

e ciò significa che l'introduzione dell'alogeno nella posizione orto dell'acido cinnamico esercita una assai scarsa influenza sulla sua dissociazione.

Dato che i metodi chimico–fisici ora ricordati [1] non permettono di riconoscere se gli acidi orto–alogeno–cinnamici presentino o no la anomalia della quale ci stiamo occupando, era opportuno vedere se ciò si potesse dedurre per via polarimetrica [2]; se cioè dal potere rotatorio dei derivati aldeido–aminici che il β naftol–fenil–animo–metano (destrogiro) forma colle aldeidi orto–clorocinnamica ed orto–bromocinnamica si potesse stabilire il carattere più o meno « elettronegativo » dei radicali contenuti in queste:

e contenuti anche negli acidi carbossilici ad esse corrispondenti. I risultati di questo studio saranno riferiti in una prossima pubblicazione.

Ha collaborato alle ricerche riportate in questa Nota la laureanda Dea Dal Monte Casoni, alla quale esprimiamo i più vivi ringraziamenti.

(1) Anche gli altri metodi chimico–fisici, come quello catalitico, quello conduttometrico ecc., che pure abbiamo sperimentati, si sono mostrati del pari inadatti a dare risultati di una approssimazione maggiore di quelli riportati.

(2) Cfr. M. Betti, « Transactions of the Faraday Society », loc. cit.

Geologia. — *Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino.* Nota I[1], del Socio F. Sacco.

È noto che il multiplo corrugamento che fece emergere l'Appennino ha il suo allineamento regolare, normale, diretto da N–O a S–E (salvo numerose irregolarità più o meno locali), cioè, com'è naturale, nel senso dell'andamento appenninico, che del resto ne è la risultante; si tratta cioè, di pieghe longitudinali, più o meno parallele all'asse dell'Appenino, come ho segnato in una tavola annessa al volume sopra *L'Appennino settentrionale e centrale* (1904).

Però tratto tratto vi si verificano pure casi di corrugamenti ortogonali o quasi all'andamento generale della Catena appenninica.

Il caso più occidentale è rappresentato dall'ampia emersione degli argilloscisti ofiolitiferi, cretacei, di *Voltaggio–Genova* o della *Polcevera* (l. s.) *Scrivia–Lemno* (n. I dell'annesso schema tettonico); ma il fatto è facilmente spiegabile per l'addossarsi, ed addensarsi ivi, delle formazioni mesocenozoiche di tipo appenninico sul compatto Massiccio o Gruppo di Voltri, costituito dalle formazioni mesozoiche, metamorfiche, cristalline, di tipo alpino[2].

È quindi naturale che contro tale Massiccio di Voltri abbiano dovuto emergere, per forte sollevamento e intensi ripiegamenti (colle ondulazioni periferiche di Montoggio, S. Olcese, Val Bisagno, Struppa, Bavari ecc.), i terreni più antichi dell'Appennino Ligure, i quali essendo argilloscistosi originarono la depressione dei Giovi e l'ampia Vallata della Polcevera ecc.

Un secondo caso è costituito dall'esteso affioramento trasversale, per quanto arcuato, di argilloscisti ofiolitiferi di *Varzi–Ottone–Torriglia* (n. II dello schema) che, mentre verso ovest cinge, sostenendola, la potentissima quanto corrugatissima formazione eocenica dei Calcari a Fucoidi, di M. Antola–M. Ebro, si connette invece variamente qua e là, verso est, coi corrugamenti normali, longitudinali, dell'Appennino ligure–piemontese.

Ne derivò, anche in questo caso, per la natura prevalentemente argillosa dell'emergente cretaceo, una vasta zona di depressione solcata quindi in gran parte dalla media ed alta Val Trebbia.

Questo esteso corrugamento trasversale, possiamo dire, sinteticamente, della Trebbia, potrebbe quasi interpretarsi come una grandiosa onda, forse ancora in relazione col pur lontano Massiccio di Voltri.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1935.

(2) È notevole che anche questo Gruppo di Voltri presenta una vasta emersione anticlinalica di Calcemicascisti, con direzione da nord a sud (Val Stura di Campoligure–Passo del Turchino–Voltri), ortogonale all'andamento della catena montuosa.

Tralasciando corrugamenti analoghi, ma meno estesi e meno regolari, come quello delle regioni di S. Stefano d'Aveto–Ferriere ecc., notiamo un terzo caso di corrugamento trasversale all'andamento dell'Appennino, caso però molto complesso, vasto e con andamento tettonico irregolare, che si sviluppa dalla media *Valle del Taro*, per Borgotaro, sino alla regione di *Varese Ligure* ecc. (n. III dell'annesso schema).

Anche in questo caso, prevalendovi in detta complessa anticlinale, i soliti scisti ofiolitiferi del Cretaceo, ne risultò una vastissima regione relativamente depressa, in cui la fiumana del Taro a nord e quella del Vara ed altre a sud, poterono ampiamente incidere ed erodere, risultandone anche il Passo di Cento Croci.

Tale zona di vasta depressione dovette esistere sin dalla lontana epoca del primo emergere dell'Appennino, come è provato dalla penetrazione oligocenica nella bassa Val Taro e specialmente dalla grande formazione oligocenica marina (per quanto di mare basso), assolutamente entrappenninica, di M. Barigazzo–Borgotaro, di cui è quasi un lontano, recente ricordo il deposito fluvio-lacustre, villafranchiano–diluviale, di Bedonia.

Un corrugamento trasversale, però non molto importante, e di cui l'incisione fluviale accentuò la parvenza, sembra corrispondere alla parte medio-superiore di *Val Parma* (Regione di Corniglio ecc.).

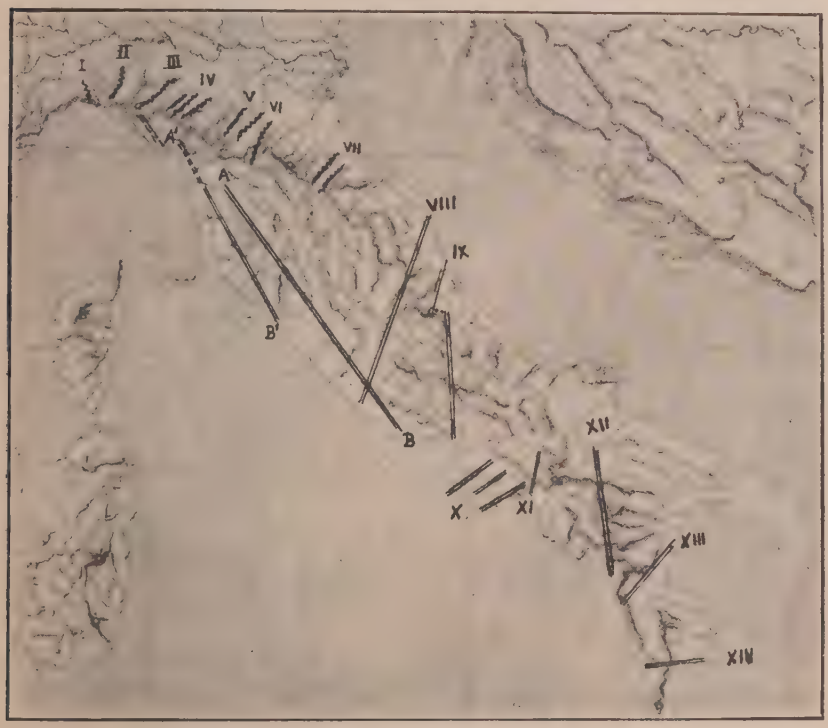
Anche la grande irregolare insenatura miocenica di *Vetto-Castelnuovo nei Monti* corrisponde ad un'emersione anticlinalica, complessivamente duplice (n. IV) di argilloscisti cretacei, prolungatasi, sempre trasversalmente alla Catena appenninica, come ci indicano le emersioni triasiche dell'Alta *Val Secchia*, sino a quelle triasiche e giurassiche dall'alta *Val Turano*, senza dimenticare l'interessantissimo affioramento di svariati scisti cristallini pretriasici del *Passo del Cerreto*.

L'altra vastissima e frastagliata insenatura miocenica di *Pavullo–Vergato* (l. s.) può corrispondere ad una complessa, multipla, vasta zona anticlinalica trasversale (n. V dello schema geotettonico) degli Argilloscisti ofiolitiferi del Cretaceo, nella quale erosero largamente e profondamente le fiumane del Panaro e del Reno; ma essa si fermò completamente verso Fanano ed i Bagni della Porretta, arrestata, si potrebbe dire, dal rigido sbarramento, trasversale, di *Macigno*, dell'alto Appennino.

Invece molto più chiaro è il corrugamento anticlinalico trasversale (n. VI dello schema) che, ad est dell'Appennino bolognese, taglia nettamente la fascia miocenica separando in modo caratteristico l'Emilia dalla Romagna; emergendovi principalmente le Argille scagliose del Cretaceo, l'azione degli agenti esterni potè verificarsi intensamente, risultandone essenzialmente la desolata *Vallata del Sillaro* e poi le depressioni dei Passi della Raticosa e della Futa.

Questa zona anticlinalica trasversale del Sillaro, connettendosi e complicandosi lateralmente (per es. nel Bacino di Firenzuola) colle longitudinali

ed inoltre suddividendosi irregolarmente, discende in Mugello e pare estendersi ancora oltre sin nel Bacino fiorentino, dove si collega colla grande e complessa anticlinale cretacea longitudinale, parzialmente rovesciata, che originò il lungo ed ampio Bacino di Pistoia–Prato-Firenze; qui essa pare spingersi ancora a sud, per la depressione di Galluzzo, sino alla regione di S. Casciano in Val di Pesa (dove si connette colla anticlinale longitudinale che originò il Monte Albano) prolungandosi infine (irregolarizzata da tali connessioni) per la depressione di Greve, sino a Radda ecc., verso il Senese.



Schema delle Direttive tettoniche trasversali dell'Appennino.

I-VII *(segnate con linee ondulate)* Direttrici a tipo specialmente di corrugamento.
VIII-XIV *(segnate con doppia linea retta)* Direttrici a tipo specialmente di fratture-faglie.
A-B ed A'-B' *(segnate con doppia linea retta)* Direttrici longitudinali complesse, a tipo misto, di pieghe e di fratture-faglie.

Un altro tipico caso di corrugamento trasversale è quello *Feltrino* (n. VII dello schema); si tratta di una anticlinale che fa apparire (come quella del Sillaro) una vasta zona di argille scagliose del Cretaceo, ma ancora più ampia, più irregolare, complicata, complessivamente duplice, cioè con un ramo occidentale (che si può indicare come di Val Marecchia) ed uno orientale (o di S. Marino–Carpegna); essa, sorgendo dalla fascia sub-

appennina del Riminese, affiora irregolarmente nelle regioni di S. Marino–S. Leo–Pennabilli–Simoncello, estendendosi sin sotto Badia Tedalda; prolungandosi poi sin nelle regioni di Pieve S. Stefano–Anghiari, nell'alta Val Tiberina.

Per l'Appennino settentrionale bisogna notare che i corrugamenti normali, longitudinali, quelli che essenzialmente originarono il sollevamento appenninico, costituiscono la regola tettonica, sono numerosissimi, spesso accavallati, rovesciati ed anche con scorrimenti suborizzontali sviluppati per chilometri come i carreggiamenti. Questo fenomeno geotettonico è spiegabile in gran parte col fatto che, sotto la potente coltre generale, calcarea ed arenacea, eocenica, che forma il terreno principale, si potrebbe dire superficiale (malgrado il suo spessore frequente di centinaia di metri), si sviluppa ovunque, amplissima quanto potentissima, una formazione cretacea di argilloscisti; formazione quindi sommamente plastica, scorrevole, direi quasi lubrificante; questa, sotto la spinta delle pressioni tangenziali potè più volte piegarsi, corrugarsi in onde orogenetiche, irregolarmente tra loro subparallele e variamente connesse, anastomizzate, più o meno ravvicinate che dovettero talora anche accatastarsi, rovesciarsi, stirarsi (anche per chilometri), talora sino al distacco delle loro radici e quindi a scorrere suborizzontalmente, trascinando con sè e sopra di sè la coltre eocenica, generalmente meno plastica, ma tuttavia pure corrugata, ma anche più o meno lacerata, frantumata e ridotta in lembi sparsi, più o meno estesi.

È a tale azione di facile corrugamento compiuta da detto potente ed esteso *substratum* di argilloscisti cretacei che devesi pure la ripetuta formazione di pieghe anticlinaliche ortogonali all'asse appenninico; pieghe che, come grandiose onde trasversali, vennero a tagliare quasi ortogonalmente le normali e ben più frequenti onde longitudinali, pur con esse spesso intrecciandosi e connettendosi in modo da costituire quasi un irregolare reticolato a grandiose maglie orotettoniche.

Tali più o meno grandiosi, estesi e complessi corrugamenti anticlinalici trasversali, facendo emergere dai compatti terreni calcarei ed arenacei dell'Eocene, i terreni argilloscistosi facilmente intaccati, erosi ed abrasi dagli agenti esterni, influirono notevolmente nel plasmare, nel corso di milioni di anni, l'oroidrografia dell'Appennino settentrionale; come ora ne sono esempio le zone relativamente depresse di Voltaggio–Genova o della Polcevera, di Varzi–Ottone Torriglia o di Val Trebbia (l. s.), di alta Val Taro-Borgotaro-Varese Ligure (o di Val Taro-Val Vara l. s.), di Val Parma (pr. p.), di Valle Enza (pr. p.), dell'alta Val Secchia (dove affiorano anche i terreni triasici e pretriasici), di Paullo–Vergato–Bagni di Porretta (Val Panaro–Valle del Reno), di Val Sillaro–Bacini del Mugello e di Firenze ecc. nonchè del Feltrino (Val Marecchia l. s.).

Inoltre tali corrugamenti trasversali e le conseguenti depressioni sovraccennate influirono notevolmente non solo in generale sulla formazione, per

erosione, delle Vallate appenniniche (basti ricordare a tale riguardo notevole parte delle Valli di Polcevera, Trebbia, Taro, Parma, Enza, Secchia, Panaro, Reno, Sillaro e Marecchia) come sovraccennato, ma anche, più anticamente, sullo sviluppo e sul tipo di formazione dei depositi oligo–miocenici.

Così la depressione argilloscistosa di Voltaggio–Genova permise la penetrazione dell'Oligocene sino a sud di Busalla–Savignone, con tipo grossolano, in gran parte ciottoloso, per la sua ubicazione entro la regione alpino–appenninica.

Il corrugamento trasversale di Val Taro non solo diede luogo alla estesa penetrazione dell'Oligocene (a tipo di mare basso, spesso litoraneo) nella parte inferiore di detta valle e valli limitrofe (Varano-Pellegrino Parmense, Lesignano-Calestano in Val Baganza), ma si connette anche colla costituzione della grande zona oligocenica, assolutamente entrappenninica, di M. Baganza–Borgotaro.

Quello di Valle Enza-Alta Val Secchia originò l'ampio e profondo sviluppo oligomiocenico, prevalentemente arenaceo, di insenatura a basso fondo, di Vetto-Castelnuovo Monti nell'Appennino reggiano.

Quello di Valle Panaro–Val Reno o di Vergato diede luogo alla grande penetrazione del mare miocenico entro l'Appennino emiliano in modo da deporre le estese e potenti formazioni mioceniche calcareo–arenacee, di mare poco profondo, di Pavullo nel Frignano e di Montese–Castel d'Ajano Monte Vigese, Grizzana ecc.

Quello di Val Sillaro fu causa di una specie di gigantesco distacco della fascia miocenica, avente una *facies* a grossi banconi arenaceo–calcarei ad ovest, ed invece una *facies* a regolare alternanza di strati arenacei e marnosi ad est, separando così l'Appennino dell'Emilia da quello della Romagna e limitando (col corrugamento feltrino) una speciale potente formazione miocenica, romagnola, addentrantesi per una ventina di chilometri nella regione appenninica, con una estensione di oltre una settantina di chilometri e costituendo così uno speciale, tranquillo ambiente geologico, miocenico.

Infine il corrugamento feltrino (Val Marecchia-Alta Valle del Tevere) interessa, un po' analogamente a quello del Sillaro, la fascia miocenica, separando così l'Appennino romagnolo da quello marchigiano e permettendo una notevolissima penetrazione del mare miocenico molto profondamente entro il cuore dell'Appennino, naturalmente con una *facies* di mare basso e sovente molto atto ad una intensa vita organica svariatissima.

Ciò ci spiega la formazione di questi depositi calcarei, organogenici, compatti che, già lentiformi e staccati in origine e poi ancora più separati dai fenomeni orogenetici, vediamo ora, largamente dispersi, costituire (per la loro relativa resistenza agli agenti esterni) speciali rilievi svariatissimi, come quelli di Verucchio, Scorticata, S. Marino, Talamello, S. Leo, Monte Copiolo, Pennabilli, Sassi Simone e Simoncello e, lateralmente, il Monte Fumaiolo, alle origini del Tevere.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni.* Nota II [1] di R. Caccioppoli, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

5. Prima di proseguire, occorre segnalare un'estensione, d'altronde ovvia, dei nostri teoremi al caso che si consideri non più un'equazione fissa, ma un'equazione contenente un parametro (*punto* di uno spazio ad una o più, anche infinite, dimensioni) [2]. La formulazione di un problema di Dirichlet andrà allora completata assegnando, accanto ai valori al contorno, una determinazione particolare del parametro in quistione.

I risultati precedenti si estendono ad equazioni contenenti un parametro sempre che *le richieste determinazioni a priori di limiti e di moduli di continuità siano possibili indipendentemente dal valore assunto dal parametro nel suo campo di variabilità* (più precisamente, in ogni dato campo *compatto* di variabilità).

Naturalmente, l'ipotesi dell'esistenza di una soluzione particolare andrà fatta per un unico valore del parametro.

6. Indicheremo ora qualche applicazione dei teoremi IV e V. La più semplice si riferisce all'equazione ellittica

$$(5) \qquad A(x, y, p, q)\, r + 2B(x, y, p, q)\, s + C(x, y, p, q)\, t = 0$$

quando il contorno di Δ consti di *un'unica curva a curvatura positiva:* in tal caso l'inclinazione dei piani tangenti ad una superficie integrale si può notoriamente limitare mediante quella dei piani osculatori al contorno, sicchè (teorema V) *il problema di Dirichlet relativo alla* (5) *è risolubile con dati al contorno a derivata seconda continua, o limitata.* Questo risultato è sostanzialmente dovuto a Bernstein; nuova è solo la precisazione delle ipotesi qualitative.

Rinunziando a particolarizzare Δ, supponiamo invece nella (2) le funzioni A, B, C, D indipendenti da z e limitate con le loro derivate prime al variare arbitrario di p e q, il limite inferiore di $AC - B^2$ risultando

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1935.
(2) Ved. le note B) e D).

peraltro positivo. Allora la (3) è a coefficienti limitati, ciò che permette, mercè la solita considerazione delle funzioni

$$u = e^{kp} + k(x^2 + y^2) \quad , \quad v = -e^{-kp} - k(x^2 + y^2)$$

e delle analoghe per z e q, di limitare z, p, q in funzione esclusivamente di $\max|\zeta| + \max|\zeta'|$. Propriamente, la (2) consentirà di limitare z in Δ e p, q sul contorno (n. 3), mentre la (3) e l'analoga forniranno [1] limitazioni per p e q in Δ. Gli stessi risultati si otterranno per l'equazione (n. 5)

$$Ar + 2Bs + Ct + \lambda D = 0 \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

che ammette, quando $\lambda = 0$, $\zeta \equiv 0$, l'unico integrale $z \equiv 0$.

Si ricava così dal teorema V il risultato:

Se nell'equazione

$$(6) \quad A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t + D(x, y, p, q) = 0 \qquad (AC - B^2 > a > 0)$$

i coefficienti sono limitati con le loro derivate prime, il problema di Dirichlet è risolubile, per ogni sistema di valori al contorno con derivata prima continua (o limitata), mediante funzioni a derivate seconde hölderiane internamente a Δ.

Circa la (1) ci contenteremo di stabilire il risultato che ci occorrerà per la dimostrazione del teorema generale sul carattere analitico delle soluzioni. Supponiamo che per valori convenientemente elevati di $|z| + |p| + |q| + |r| + |s| + |t|$ la F si identifichi con una funzione lineare a coefficienti costanti di r, s, t, p. es., con $c(r+t)$. Ne seguirà in particolare che le derivate di F si conservano limitate, sicchè l'equazione a variazioni risulterà illimitatamente risolubile, purchè Δ *sia sufficientemente piccolo*. L'equazione

$$(1') \qquad \lambda F(x, y, z, p, q, r, s, t) + (1 - \lambda)(r + t) = 0$$

si troverà nelle medesime condizioni della (1), cui si ridurrà per $\lambda = 1$, ed ammetterà la soluzione particolare $z \equiv 0$ per $\lambda = 0$.

Le funzioni p, q, r, s, t verificheranno equazioni del tipo (3), a coefficienti limitati: per limitare z, p e q in funzione di $\max|\zeta| + \max|\zeta''|$ basterà osservare che la somma $r + t$ si conserva limitata, dopo di che le equazioni soddisfatte dalle derivate prime forniranno delle limitazioni per le derivate seconde al contorno, e si passerà nell'interno di Δ servendosi delle equazioni soddisfatte da r, s, t. Ed altrettanto potrà farsi per l'equazione (1'), assegnato un qualunque limite per $|\lambda|$. Donde, per il teorema IV, la conclusione:

(1) Come conseguenza della mancanza di massimi per u e di minimi per v.

Se F *non differisce da una funzione lineare a coefficienti costanti di* r, s, t *che in una regione limitata dello spazio* (x, y, z, p, q, r, s, t), *e se il campo* Δ *è sufficientemente piccolo, il problema di Dirichlet per l'equazione ellittica*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

è risolubile, per ogni sistema di valori al contorno con derivata seconda continua (o limitata), mediante funzioni a derivate seconde hölderiane internamente a Δ.

7. Consideriamo ora una qualunque soluzione z_0 della (1), a derivate seconde continue in Δ. Fissiamo nell'interno di Δ un punto qualunque (x_0, y_0), e indichiamo con P il punto dello spazio (x, y, z, p, q, r, s, t) individuato da x_0, y_0 e dai valori di z_0 delle sue derivate in (x_0, y_0); sia poi Δ' un cerchio di centro (x_0, y_0), contenuto in Δ. Potremo ovviamente costruire una funzione Φ coincidente con F in un intorno di P, lineare a coefficienti costanti in r, s, t per valori convenientemente elevati di $|z| + |p| + |q| + |r| + |s| + |t|$, dotata di derivate terze continue, e ottemperante alla diseguaglianza $4 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 > 0$.

Per Δ' sufficientemente piccolo, sarà assicurata l'unicità di una soluzione in Δ' dell'equazione $\Phi = 0$, coincidente con z_0 sul contorno Γ'; e una siffatta soluzione non potrà essere che z_0. Ma d'altra parte l'ultimo teorema del numero precedente assicura che ai valori al contorno di z_0 corrisponde una soluzione di $\Phi = 0$ avente derivate seconde hölderiane; questa proprietà appartiene dunque a z_0 in un intorno di (x_0, y_0), che è d'altronde un punto arbitrario.

Dunque (n. 1) *una soluzione della* (1) (F *tre volte derivabile*), *continua con le sue derivate seconde, ammette derivate terze.* In particolare:

Una soluzione, continua con le sue derivate seconde, dell'equazione analitica ellittica (1), *è analitica.*

Ovviamente, basta che l'equazione sia ellittica solo per la soluzione particolare considerata.

8. Passiamo ora a stabilire il risultato enunciato in principio sui problemi regolari del Calcolo delle variazioni. La funzione $z_0(x, y)$ abbia derivate prime continue e sia estremale per l'integrale

$$\iint_{\Delta} F(x, y, p, q)\, dx\, dy, \tag{7}$$

dove F abbia derivate terze continue, essendo inoltre $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$.

Indichiamo come dianzi con (x_0, y_0) un punto interno a Δ, e con Δ' un suo intorno circolare. Costruiamo una funzione Φ che coincida con F in un intorno del punto $[x_0, y_0, p_0(x_0, y_0), q_0(x_0, y_0)]$, che verifichi con

le sue derivate seconde la stessa diseguaglianza di F, e che esternamente ad una regione limitata dello spazio (x, y, p, q) si riduca ad una forma quadratica definita positiva, a coefficienti costanti, in p, q, p. es. a $c(p^2+q^2)$. L'equazione di Lagrange relativa all'integrale $\iint_{\Delta'} \Phi\, dx\, dy$ sarà del tipo (6) e nelle condizioni del teorema relativo (n. 6), ed ammetterà quindi un integrale z_1, a derivate seconde hölderiane, coincidente con z_0 sul contorno Γ'. D'altronde se Δ' è sufficientemente piccolo z_0 sarà estremale anche per $\iint_{\Delta'} \Phi\, dx\, dy$, e pertanto si avrà $z_1 \equiv z_0$ [1]. Ne segue che z_0 è dotata di derivate seconde hölderiane internamente a Δ.

Pertanto *estremali a derivate prime continue hanno derivate seconde continue* (anzi hölderiane); donde in particolare:

Ogni estremale dell'integrale analitico regolare (7), *continua con le sue derivate prime, è analitica.*

Matematica. — *Rappresentazione conforme e superficie quadrabili.* Nota di R. Caccioppoli, presentata [2] dal Corrisp. G. Scorza.

1. L'esistenza di rappresentazioni piane conformi di una superficie regolare semplicemente connessa (sotto ipotesi assai larghe, implicanti poco più che la continuità dei piani tangenti [3]) è oggi un risultato classico; si hanno anche conoscenze sulla variazione continua di queste rappresentazioni al variare della superficie (e dei parametri da cui dipendono). Si pone allora il problema di *prolungare*, attraverso passaggi al limite, l'operazione di rappresentazione conforme in nuove classi, estese al possibile, di superficie. Non è stato finora, ch'io sappia, trattato che qualche caso particolare di questo problema [4].

Qui affronto la quistione generale, pervenendo sostanzialmente al risultato che *le rappresentazioni conformi si conservano, sotto appena qualche condizione qualitativa supplementare, nei passaggi al limite attraverso superficie ad aree equilimitate*; a patto però di estendere il concetto di rappresentazione conforme, consentendo qualche deviazione dalla definizione ordinaria, sicchè le nuove rappresentazioni che si ottengono al limite possono più propriamente dirsi *quasi-conformi*, secondo un termine di cui più oltre daremo il significato preciso.

(1) L'*unicità* dell'estremale è ben nota e si dimostra elementarmente. V. Haar, *Zur Variationsrechnung*. « Abhandl. Math. Sem. Hamburg. », B. 8.

(2) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(3) Ved. l'articolo di Lichtenstein in « Enzyklopädie der Math. Wiss. », II, C 3.

(4) Ved. Mc Shane, « Transactions of the Am. Math. Soc. », vol. 35 (1933).

Il teorema generale che dimostro consente interessanti applicazioni alla teoria delle superficie quadrabili generali, di cui ho posto le basi in precedenti lavori [1]. Conformemente a questa, intenderò per area di una superficie

$$(1) \qquad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) ,$$

l'*integrale*

$$(2) \qquad \iint \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2} ,$$

dove W_1 , W_2 , W_3, funzioni additive d'insieme sul piano uv, sono le *variazioni delle coppie*

$$[x(u, v), y(u, v)] \quad , \quad [y(u, v), z(u, v)] \quad , \quad [z(u, v), x(u, v)] ,$$

coppie a variazione limitata quando la superficie è quadrabile.

I nuovi risultati riguardano le superficie che chiamo *decomponibili* (e che sono sostanzialmente quelle suscettibili di suddivisione indefinita mediante curve rettificabili). Per tali superficie, che si presentano spontaneamente in un approfondimento della teoria, la definizione di area di Lebesgue collima con la precedente, e quindi con la definizione generale di Peano, sulla quale ritorno nel n. 6. Sarebbe anzi facile, a questo punto, risalire ad un'unica *definizione assiomatica* dell'area.

2. Sia S una superficie di equazioni parametriche (1), (u, v) variando in un dominio semplicemente connesso D, un cerchio per fissare le idee, e sia $S_1 , S_2 , \cdots$ una successione di superficie *regolari* [2], di equazioni

$$x = x_n(u, v) \quad , \quad y = y_n(u, v) \quad , \quad z = z_n(u, v) ,$$

tendente ad S nel senso che

$$\lim_{n \to \infty} x_n(u, v) = x(u, v) \ , \ \lim_{n \to \infty} y_n(u, v) = y(u, v) \ , \ \lim_{n \to \infty} z_n(u, v) = z(u, v)$$

uniformemente in D. Supporremo dapprima che S sia a punti semplici, cioè che a punti distinti di D corrispondano su S punti distinti.

(1) A) *Gli integrali doppi di forma parametrica nel calcolo delle variazioni.* « Atti del R. Ist. Veneto », to. XCIII (1934); B) *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie.* « Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo », to. 54 (1930). Ved. anche: *Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi.* « Atti del Congresso internaz. di Bologna », 1928.

(2) Queste potranno presentare peraltro *punti di diramazione* analoghi a quelli degli ordinari modelli di superficie di Riemann. Si definiranno, per la rappresentazione conforme, gli angoli in tali punti con le note convenzioni. D'altronde si potrebbero anche prendere superficie S_n *poliedriche*, e considerarne come *rappresentazioni conformi* quelle, notoriamente possibili, continue e conformi internamente ad ogni faccia.

Rappresentiamo conformemente S_n su D, facendo corrispondere a tre punti fissi P_1, P_2, P_3 della circonferenza di D tre punti $Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_3^{(n)}$ del contorno di S_n, con la condizione che questi, per $n \to \infty$, tendano a tre punti distinti Q_1, Q_2, Q_3; e siano

$$x = \varphi_n(u, v) \quad , \quad y = \psi_n(u, v) \quad , \quad z = \chi_n(u, v)$$

le nuove equazioni di S_n.

Dimostreremo che le funzioni $\varphi_n, \psi_n, \chi_n (n = 1, 2, \cdots)$ sono *equicontinue* se le superficie S_n hanno aree *equilimitate*. Invero, se fosse impossibile assegnare un unico modulo di continuità per tutte queste funzioni, si potrebbe, data ε piccola a piacere, trovare in D due punti P′ e P″, a distanza $< \varepsilon$, cui corrispondessero su una certa superficie S_n due punti a distanza $> \sigma$, σ non dipendendo da ε. Consideriamo allora in D la corona circolare Γ con centro nel punto medio O del segmento P′P″ e raggi ε e $\sqrt{\varepsilon}$; se questa corona non è tutta compresa in D, diciamone Γ la porzione appartenente a D. In virtù delle ipotesi fatte su S e sulle rappresentazioni conformi delle S_n, ad ogni circonferenza (o arco di circonferenza) di Γ, con centro in O, corrisponde su S_n una curva alla lunghezza si può assegnare un limite inferiore δ (per ε abbastanza piccola e quindi n sufficientemente grande) funzione di σ soltanto. Sia allora $\mu(u, v)$ il rapporto fra gli elementi lineari corrispondenti di S_n e di D: μ^2 sarà il rapporto fra gli elementi d'area e si avrà, introducendo coordinate polari con polo in O,

$$\iint_{\Gamma} \mu^2 \, du \, dv = \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} d\rho \int \mu^2 \rho \, d\theta \geqq \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d\rho}{2\pi\rho} \left[\int \mu\rho \, d\theta \right]^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\delta^2}{4\pi} \log \varepsilon ,$$

ciò che è incompatibile con l'ipotesi che le S_n abbiano aree equilimitate.

Possiamo dunque ottenere, selezionando una successione convergente, una rappresentazione

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v) \quad , \quad y = \psi(u, v) \quad , \quad z = \chi(u, v)$$

di S [1], dove le funzioni φ, ψ, χ sono quasi sempre assolutamente continue in u, v separatamente, e gli integrali

$$\Delta[\varphi] = \iint_{D} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right] du \, dv \quad , \quad \Delta[\psi] \quad , \quad \Delta[\chi]$$

sono convergenti.

(1) Le superficie S e $x = \varphi$, $y = \psi$, $z = \chi$ coincidono nel senso che ammettono rappresentazioni parametriche arbitrariamente prossime (la loro *distanza*, definita secondo Fréchet, è allora nulla).

3. Si può dire di più se, come ora supporremo, le aree delle superficie S_n tendono al *minimo* limite possibile. In tale ipotesi, le derivate prime di $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ tendono in media (di ordine 2) alle corrispondenti derivate di φ, ψ, χ o, ciò che è lo stesso, gli integrali (inferiormente semicontinui) $\Delta[\varphi_n], \Delta[\psi_n], \Delta[\chi_n]$ tendono a $\Delta[\varphi], \Delta[\psi], \Delta[\chi]$ rispettivamente. Ciò è conseguenza del fatto che si possono sempre costruire, per ogni ε, tre funzioni regolari $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\chi}$ approssimanti φ, ψ, χ e tali che gli integrali $\Delta[\bar{\varphi}], \Delta[\bar{\psi}], \Delta[\bar{\chi}]$ approssimino i precedenti a meno di ε.

Ne segue che l'integrale classico

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

coincide col limite dell'area di S_n, e che si ha quasi ovunque, in D, $E = G, F = 0$, ciò che esprimeremo dicendo che la rappresentazione (3) di S è *quasi-conforme*.

Le condizioni sotto cui si è stabilito questo risultato sono poi ovviamente troppo restrittive. Non occorre che S sia a punti semplici; ciò che importa è che il contorno di S sia a punti semplici, e inoltre che una porzione di S avente frontiera di diametro infinitesimo abbia anch'essa diametro infinitesimo, il che equivale a dire che, se per una porzione D′ di D le funzioni x, y, z sono costanti sulla frontiera, esse dovranno risultare costanti ovunque in D′. Se si verifica quest'ultima circostanza, diremo brevemente che S non presenta *strozzature*. Quindi *una superficie a contorno semplice e priva di strozzature, limite di superficie regolari ad aree equilimitate, ammette rappresentazioni quasi-conformi.*

Definita così una rappresentazione conforme generalizzata, si vede subito che il ragionamento precedente contiene la dimostrazione di un *teorema generale del passaggio al limite* in una rappresentazione conforme, sotto le due condizioni: 1) che a tre punti del contorno di D corrispondano tre punti del contorno della superficie variabile tendenti a posizioni limiti distinte; 2) che l'area della superficie variabile tenda al suo *minimo limite*, cioè all'area della superficie limite (ved. n. seg.) [1].

4. Notevoli conseguenze si lasciano trarre dal teorema precedente. Innanzi tutto l'area A di S, nella rappresentazione (3), è data dall'integrale classico, poichè quest'integrale dà il limite delle aree delle superficie S_n, e

(1) Osserviamo ancora che è implicita nella dimostrazione precedente la constatazione della *compattezza di certe famiglie di superficie ad aree equilimitate*, ciò che estende in qualche modo alle superficie un teorema di Hilbert sulle curve. Ma v'è la differenza essenziale che per le curve è sufficiente la condizione che le lunghezze siano equilimitate, mentre che per le superficie subentra la nuova ipotesi che *porzioni a contorno infinitesimo siano (uniformemente) infinitesime.*

quindi è $\geqq A$, laddove esso deve risultare in tutti i casi $\leqq A$. Le coppie (x, y), (y, z), (z, x) sono dunque *a variazione limitata*; le altre coppie (φ, ψ), (ψ, χ), (χ, φ) sono poi addirittura *assolutamente continue*, (2) diventando un integrale ordinario; la definizione (2) dell'area coincide con quella di Lebesgue.

Per ognuna delle superficie considerate esiste poi quasi ovunque un piano *asintoticamente tangente*, conformemente ad un teorema da me enunciato anni or sono [1]. Invero le tre funzioni φ, ψ, χ sono quasi ovunque derivabili in D, e però quasi ovunque *asintoticamente differenziabili*. Quindi il piano di equazione

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}(X - x) + \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}(Y - y) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(Z - z) = 0$$

presenta in ogni punto P di S, che non appartenga ad un conveniente insieme di area nulla, la proprietà del piano tangente ordinario relativamente ad un insieme di punti avente in P *densità* 1. Ne segue una interpretazione geometrica della rappresentazione quasi-conforme, che giustifica pienamente il termine adottato.

5. Questi risultati si possono ulteriormente estendere. Innanzi tutto se il contorno C di S è rettificabile, si può sempre far passare una superficie rettificabile Σ per C e per un contorno C′ prossimo a C, regolare e privo di punti multipli; e applicare alla superficie S′ ottenuta prolungando S con l'aggiunta di Σ il teorema generale, purchè S sia priva di strozzature.

Ma v'ha di più: i risultati del numero precedente si estendono a tutte le superficie che si possono decomporre mediante curve rettificabili in porzioni aventi diametri arbitrariamente piccoli. Invero suddiviso D nei domini $D_1, D_2, \cdots$ mediante curve trasformate dalle (1) in curve rettificabili, indichiamo con $S_1, S_2, \cdots$ le porzioni corrispondenti di S. Da S deduciamo una nuova superficie $\bar{S}$ sopprimendo le strozzature di ciascuna superficie parziale S_i: cioè per ogni porzione Δ di D_i, sulla cui frontiera x, y, z si riducano a tre costanti (ciò non avendo luogo per nessuna altra porzione di D_i contenente Δ) sostituiamo queste costanti ai valori che x, y, z assumono nell'interno di Δ. $\bar{S}$ risulta somma di superficie prive di strozzature e limitate da curve rettificabili, ed approssima quanto si vuole S, mentre la sua area esaurisce un'aliquota arbitrariamente grande dell'area di S. Si comprende allora come le proprietà dell'area e del piano asintoticamente tangente si estendano ad S.

Si introduce così naturalmente nello studio delle superficie, dal punto di vista della quadratura e delle quistioni connesse, la nozione di *superficie*

(1) *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili*. Questi « Rendiconti », 1° semestre 1928.

decomponibile, cioè divisibile mediante curve rettificabili in porzioni di diametro piccolo a piacere. Senza d'altronde infirmare le conclusioni precedenti, potrebbero sostituirsi alle curve rettificabili curve dotate di proprietà più generali, estendendo così la definizione di decomponibilità; ma su questo non ci soffermeremo.

6. Ogni superficie quadrabile è divisibile mediante curve semirettificabili (cioè aventi una proiezione piana rettificabile) in porzioni di *area* piccola a piacere [1], ma non è necessariamente *decomponibile*. La restrizione a superficie decomponibili è però, come s'è detto, ben naturale, e sopra tutto quando si voglia passare dalla teoria alle applicazioni, scartando i casi eccessivamente, e può dirsi artificiosamente, singolari.

Per l'area di tali superficie si ritrova la definizione di Lebesgue, purchè il minimo limite in questa considerato sia finito, – ipotesi d'altronde non essenziale. Si semplifica inoltre la definizione di Peano, da me già applicata al caso generale.

Secondo quest'ultima definizione, l'area di una superficie è l'estremo superiore delle quantità ottenute suddividendo arbitrariamente la superficie mediante curve, e sommando le cosiddette *aree interne* ai contorni delle varie porzioni ottenute. Per le superficie decomponibili, la suddivisione può operarsi mediante le curve postulate dalla definizione.

Ricordo che per area interna ad una curva spaziale chiusa va inteso (in un senso convenzionale) la massima fra le aree interne alle proiezioni piane della curva. Dell'area racchiusa da una curva piana ho dato due definizioni [2], equivalenti ai fini dell'applicazione alla quadratura delle superficie; ed ho tentato di sviluppare una teoria analitica, fondata sull'introduzione di un integrale generalizzato di Stieltjes [3]. Purtroppo tale teoria non è valida senza restrizioni (vanno escluse curve di misura positiva) e bisogna restare alle definizioni generali. Ma naturalmente, per una superficie decomponibile si potranno ottenere rappresentazioni analitiche approssimate dell'area, ricorrendo a decomposizioni mediante curve rettificabili.

(1) Ved. Memoria B, n. 11.
(2) Ved. Memoria A, n. 5.
(3) Ved. Memoria B, Appendice.

Matematica. — *A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari.* Nota di G. Scorza Dragoni, presentata [1] dal Socio F. Severi.

I seguenti due teoremi [2] di Hammerstein:

L'equazione integrale non lineare

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x,y) f(y, \varphi(y))\, dy = g(x) \qquad (a < b) \tag{1}$$

ammette una ed una sola soluzione, se il nucleo $k(x,y)$ *è continuo, simmetrico e semidefinito positivo* [3] *e se la funzione* $f(y,u)$ *è continua* [4] *insieme con la* $f'_u(y,u)$, *riuscendo*

$$f'_u(y,u) \geqq 0; \tag{2}$$

e

L'affermazione fatta vale, anche se la (2) *è sostituita dalla*

$$|f'_u(y,u)| < \alpha < \lambda_1, \tag{3}$$

con $\alpha = \text{cost.} > 0$, λ_1 *essendo il primo valore eccezionale (autovalore) del nucleo* $k(x,y)$

sono stati da Golomb [5] riuniti nell'unico enunciato, che li generalizza entrambi:

(1) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(2) A. Hammerstein, *Nichtlinearen Integralgleichungen nebst Anwendungen.* [« Acta Mathematica », vol. 54 (1930), pp. 117-176], §§ 8 e 9. I teoremi di Hammerstein sono stati da me recentemente estesi ai sistemi, usando metodi analoghi a quelli tenuti in questa Nota; ved. G. Scorza Dragoni, *Sui sistemi di equazioni integrali non lineari* [in corso di stampa].

Passando poi a tutt'altro argomento, e con riferimento ad un'osservazione fattami dal prof. Rosenthal, colgo l'occasione per avvertire come, sia il lemma che il teorema enunciati nella mia Nota *Un teorema sulle funzioni di Baire* [questi « Rendiconti », ser. 6ª, vol. XXI (1935), pp. 741-744], siano e falsi e riconosciuti tali già da tempo; cfr. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* [Gauthier-Villars, Parigi, 1930], pp. VII-VIII, 146-150 e 318-320.

(3) Cioè, se $\int_a^b \int_a^b k(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\, dx\, dy \geq 0$, per ogni unzione continua $\varphi(x)$.

(4) Naturalmente $f(y,u)$ sarà tale per $a \leq y \leq b$, $-\infty < u < +\infty$.

(5) M. Golomb, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen.* [« Mathematische Zeitschrift », vol. 39 (1934-1935), pp. 45-75], p. 75.

La (1) *ammette una ed una sola soluzione, se, ferme restando le altre ipotesi, è*

$$f'_u(y, u) > -\alpha. \tag{4}$$

Golomb stabilisce questo teorema servendosi di un suo criterio circa l'esistenza e l'unicità di una radice per un'equazione funzionale [1]. Ma, usufruendo di un altro criterio sull'esistenza di un'unica radice per una simile equazione, Caccioppoli [2] aveva già dimostrato molto rapidamente entrambi i due teoremi di Hammerstein. Ed in questa Nota mi propongo di mostrare come il criterio di Caccioppoli si presti a dedurre, con altrettanta rapidità, anche il teorema di Golomb relativo alla (1).

1. Un criterio generale di esistenza e di unicità per le soluzioni della (1). — Detto Σ lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo $a \leq x \leq b$, spazio che riesce lineare, metrico e completo [3] se la distanza di due suoi elementi (punti di Σ) si definisce come uguale al massimo del modulo della loro differenza, il criterio di Caccioppoli circa le radici di un'equazione funzionale [4], applicato alla (1), permette di affermare che

Essa (1) *ammette un'unica soluzione, se la trasformazione funzionale*

$$\psi(x) = \varphi(x) - g(x) + \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y))\, dy, \tag{5}$$

definita per i punti di Σ,

I) *è localmente invertibile, cioè invertibile nell'intorno di due punti omologhi;*

II) *trasforma in successioni convergenti di punti di* Σ [5] *solo successioni compatte, cioè tali che ogni loro sotto-successione ne contenga un'altra convergente.*

E noi vedremo che, se è soddisfatta la (4), allora sono verificate la I) e la II).

(1) Loc. cit., § 6, pp. 70-72.

(2) R. Caccioppoli, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni.* [« Rendiconti del Seminario Matematico di Padova », vol. III (1932), pp. 1–15], nn. 3 e 5.

(3) Per una esposizione completa degli assiomi, che presiedono alla definizione di un simile spazio, ved. T. H. Hildebrandt–L. M. Graves, *Implicit functions and their differentials in general analysis.* [« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 29 (1927), pp. 126–153], n. 1.

(4) Loc. cit., n. 6.

(5) Data la definizione di distanza e dato che (come sempre nell'analisi generale) la convergenza è intesa come tendenza a zero della distanza fra il limite e la variabile, la convergenza qui considerata è l'ordinaria convergenza uniforme di una successione di funzioni.

2. Dimostrazione della I). — In virtù di risultati noti [1], *L'invertibilità locale della* (5) *è certa, se l'equazione integrale lineare* [2]

$$\vartheta(x) = \tau(x) + \int_a^b k(x, y) f'_u(y, \varphi(y)) \tau(y)\, dy$$

è risolubile (in maniera univoca) *qualunque siano le funzioni continue* $\vartheta(x)$ *e* $\varphi(x)$; *vale a dire* [3], *se per una funzione continua* $\tau(x)$ *da*

$$\tau(x) + \int_a^b k(x, y) f'_u(y, \varphi(y)) \tau(y)\, dy = 0 \tag{6}$$

segue, identicamente,

$$\tau(x) = 0. \tag{7}$$

E questo è sicuramente il caso, se è verificata la (4); la cosa essendo notoria, anche a prescindere dai teoremi di Hammerstein, se è vera la (2) o la (3).

Posto infatti, per semplicità di scrittura,

$$p(x) = f'_u(x, \varphi(x));$$

$$p_1(x) = p(x), \quad \text{se} \quad p(x) \geqq 0; \quad p_1(x) = 0, \quad \text{se} \quad p(x) < 0;$$

$$p_2(x) = p_1(x) - p(x),$$

di guisa che le due funzioni continue $p_1(x)$ e $p_2(x)$ verificano le

$$p_1(x) \geqq 0 \quad ; \quad 0 \leq p_2(x) < \alpha \tag{8}$$

mentre la (6) diventa

$$\tau(x) + \int_a^b k(x, y)(p_1(y) - p_2(y)) \tau(y)\, dy = 0, \tag{9}$$

moltiplichiamo la (9) per $(p_1(x) + p_2(x))\tau(x)$ ed integriamo rispetto ad x.

Otteniamo così, tenuto conto della simmetria di $k(x, y)$,

$$\int_a^b p_1(x) \tau^2(x)\, dx + \int_a^b \int_a^b k(x, y) p_1(x) \tau(x) p_1(y) \tau(y)\, dx\, dy + \tag{10}$$

$$+ \int_a^b p_2(x) \tau^2(x)\, dx - \int_a^b \int_a^b k(x, y) p_2(x) \tau(x) p_2(y) \tau(y)\, dx\, dy = 0.$$

(1) Per la bibliografia relativa rimando alla mia Memoria: *Sui sistemi* ecc., n. 1.

(2) Ottenuta dalla (5) per *differenziazione*; cfr., per la bibliografia, Scorza-Dragoni, *Sui sistemi* ecc., nn. 1 e 8.

(3) Teorema di Fredholm.

Ma dalla proprietà di minimo dei valori eccezionali di un nucleo simmetrico e da $0 \leq p_2(x) < \alpha < \lambda_1$, segue

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y)\, p_2(x)\, \tau(x)\, p_2(y)\, \tau(y)\, dx\, dy \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b p_2^2(x)\, \tau^2(x)\, dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda_1} \int_a^b \frac{p_2(x)}{\alpha}\, p_2(x)\, \tau^2(x)\, dx \leq \frac{\alpha}{\lambda_1} \int_a^b p_2(x)\, \tau^2(x)\, dx \leq \int_a^b p_2(x)\, \tau^2(x)\, dx,$$

il segno uguale potendo sussistere, fra il primo e l'ultimo membro, solo a patto che sia identicamente $p_2(x)\, \tau^2(x) = 0$; mentre

$$\int_a^b p_1(x)\, \tau^2(x)\, dx \geq 0 \quad ; \quad \int_a^b \int_a^b k(x,y)\, p_1(x)\, \tau(x)\, p_1(y)\, \tau(y)\, dx\, dy \geq 0,$$

perchè $p_1(x)\, \tau^2(x) \geq 0$ e $k(x,y)$ è semidefinito positivo; quindi la (10) può esser soddisfatta solo a patto che sia, identicamente, $p_1(x)\, \tau(x) = p_2(x)\, \tau(x) = 0$, cioè $p(x)\, \tau(x) = 0$; da cui, per la (6), segue senz'altro la (7).

3. Dimostrazione della II). — Definito, per ogni punto $\varphi(x)$ di Σ, uno *scarto*, $\sigma[\varphi(x)]$, dall'origine ponendo

$$\sigma[\varphi(x)] = \int_a^b |f(x, \varphi(x))|\, dx \geq 0,$$

allora, se gli scarti di una successione $\chi_1(x), \chi_2(x), \cdots$ di punti di Σ sono limitati nel loro insieme, la successione

$$\int_a^b k(x,y)\, f(y, \chi_1(y))\, dy \quad , \quad \int_a^b k(x,y)\, f(y, \chi_2(y))\, dy, \cdots$$

è formata da funzioni evidentemente equicontinue ed equilimitate e quindi è compatta [1].

Indi, come è noto [2], per assicurare la validità della II) basta dimostrare che

Se $\sigma[\varphi(x)] \to +\infty$, *allora è anche*, $\psi(x)$ *essendo data dalla* (5),

$$\max |\psi(x)| \to +\infty. \tag{11}$$

(1) Cfr. L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni.* (Zanichelli, Bologna, 1922), vol. I, pp. 78-84; ved. poi Caccioppoli, loc. cit., n. 3.

(2) Caccioppoli, loc. cit., nn. 1, 2, 6.

4. A questo scopo osserviamo che – modificando convenientemente $g(x)$, ove occorra – è lecito supporre $f(x, 0) = 0$; di guisa che per ogni punto $\varphi(x)$ di Σ si può porre

$$f(x, \varphi(x)) = p(x)\,\varphi(x),$$

con $p(x)$ continua e della forma $f'_u(x, q(x)\varphi(x))$, dove $0 < q(x) < 1$.

Definite allora le funzioni continue $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in maniera analoga a quella tenuta nel n. 2 – di guisa che saranno sempre soddisfatte le (8) – e posto

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \text{ se } f(x, \varphi(x))\,\varphi(x) \geq 0;\ \varphi_1(x) = 0, \text{ se } f(x, \varphi(x))\,\varphi(x) < 0;$$
$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x),$$

allora oltre che le (8) sono verificate anche le

$$(12) \qquad \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) = 0 \quad ; \quad p_1(x)\,\varphi_1(x) = p_1(x)\,\varphi(x);$$
$$p_2(x)\,\varphi_2(x) = p_2(x)\,\varphi(x)$$

e le

$$(13) \quad f(x, \varphi_1(x)) = p_1(x)\,\varphi_1(x) \quad ; \quad f(x, \varphi_2(x)) = -p_2(x)\,\varphi_2(x);$$
$$f(x, \varphi_1(x))\,f(x, \varphi_2(x)) = 0,$$

mentre, per la $f(x, 0) = 0$ e per la prima delle (12),

$$(14) \qquad f(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi_1(x)) + f(x, \varphi_2(x)),$$

relazione che, unita all'ultima delle (13), dà

$$(15) \qquad |f(x, \varphi(x))| = |f(x, \varphi_1(x))| + |f(x, \varphi_2(x))|.$$

Dalle (12) e (13) appare, fra l'altro, che, pur potendo le funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ essere eventualmente discontinue, tali non sono mai $f(x, \varphi_1(x))$, $f(x, \varphi_2(x))$.

Dalla (14) si trae invece che

$$\psi(x) = \varphi(x) - g(x) + \int_a^b k(x, y)\,f(y, \varphi_1(y))\,dy +$$
$$+ \int_a^b k(x, y)\,f(y, \varphi_2(y))\,dy,$$

cioè, tenuto conto delle (13) e della $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ e posto per semplicità di scrittura

$$\chi(x) = \psi(x) + g(x),$$

che la (5) equivale alla

$$(16) \qquad \chi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \int_a^b k(x,y)\, p_1(y)\, \varphi_1(y)\, dy - \int_a^b k(x,y)\, p_2(y)\, \varphi_2(y)\, dy;$$

mentre, per la (15) e le (13),

$$(17) \qquad \sigma[\varphi(x)] = \sigma_1[\varphi_1(x)] + \sigma_2[\varphi_2(x)],$$

se

$$\sigma[\varphi(x)] = \int_a^b p_i(x)\, \varphi_i^2(x)\, dx \geqq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Inoltre, poichè $g(x)$ è limitata, il comportamento all'infinito di $\max \psi(x)$ coincide con quello di $\max \chi(x)$; e, per la (17), la verifica della (11) si riduce a dimostrare che

$$(18) \qquad \max |\chi(x)| \to +\infty,$$

se $\sigma_1 + \sigma_2 \to +\infty$.

5. Moltiplichiamo allora la (16) per $p_1(x)\varphi_1(x) + p_2(x)\varphi_2(x) = (p_1(x) + p_2(x))\varphi(x)$ ed integriamo rispetto ad x [1].

Avremo, tenuto conto della prima delle (12) e – cfr. n. 2 – della simmetria di $k(x,y)$,

$$\int_a^b \chi(x)\,(p_1(x)\varphi_1(x) + p_2(x)\varphi_2(x))\, dx =$$

$$= \int_a^b p_1(x)\varphi_1^2(x)\, dx + \int_a^b \int_a^b k(x,y)\, p_1(x)\varphi_1(x)\, p_1(y)\varphi_1(y)\, dx\, dy -$$

$$- \int_a^b p_2(x)\varphi_2^2(x)\, dx - \int_a^b \int_a^b k(x,y)\, p_2(x)\varphi_2(x)\, p_2(y)\varphi_2(y)\, dx\, dy;$$

cioè, come si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 2 (tenendo fra l'altro conto anche qui del fatto che $k(x,y)$ è semidefinito positivo),

(1) Si noti che $\varphi_i(x)$, anche se discontinua, è pur sempre limitata e sommabile; vuol dire che gli integrali che incontreremo nel seguito saranno eventualmente integrali di Lebesgue e non di Cauchy, come quelli considerati finora.

$$(19) \qquad \int_a^b \chi(x)\,(p_1(x)\,\varphi_1(x) + p_2(x)\,\varphi_2(x))\,dx \geqq$$

$$\geqq \int_a^b p_1(x)\,\varphi_1^2(x)\,dx + (1-\beta)\int_a^b p_2(x)\,\varphi_2^2(x)\,dx \geqq 0,$$

dove

$$\beta = \alpha \cdot \lambda^{-1} < 1 .$$

Rammentiamo ora che, posto

$$\sigma_i[\varphi_i(x)] = \int_a^b p_i(x)\,\varphi_i^2(x)\,dx \geqq 0 \qquad (i = 1, 2),$$

allora in virtù di un ragionamento noto (1), che conserva intatta la sua applicabilità anche al caso attuale (2), σ_2 è un infinito d'ordine superiore rispetto a σ_1, naturalmente se $\sigma_1 \to +\infty$.

Di qui si trae subito che

$$\sigma_1 + (1-\beta)\,\sigma_2$$

è un infinito d'ordine superiore rispetto a

$$\sigma_1 + \sigma_2 ,$$

se $(\sigma_1 + \sigma_2) \to +\infty$.

(1) Caccioppoli, loc. cit., n. 3; cfr. anche G. Scorza Dragoni, *Sui sistemi* ecc., n. 14.

(2) Caccioppoli, nel passo citato nella nota precedente, dimostra che

$$\sigma[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x)\,f(x, \varphi(x))\,dx$$

è un infinito d'ordine superiore rispetto a

$$\sigma[\varphi(x)] = \int_a^b |f(x, \varphi(x))|\,dx$$

(quando $\sigma \to +\infty$), se $\varphi(x)$ è continua, se $f(x, u)$ è del [illegible] $f(x, u)$, quest'ultima essendo sempre positiva o nulla, mentre $f(x, u) \neq 0$. Ora nelle ipotesi in discorso, nel ragionamento di Caccioppoli, la continuità della $\varphi(x)$ non è sfruttata in maniera essenziale – basta che sia sommabile il prodotto $\varphi(x)\,f(x, \varphi(x))$ –; e le ipotesi sulla $f(x, u)$ sono sfruttate solo in quanto esse assicurano che

$$f(x, \varphi(x)) \geqq [illegible]$$

e che $f(x, \varphi(x))$ è sommabile.

E tutte queste condizioni sono evidentemente soddisfatte per

$$p_2(x)\,\varphi_2^2(x) = [1 - \alpha \cdot \varphi_1(x)]\,[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \cdot f(x, \varphi_2(x))$$

quindi ecc.

Ma allora, il dedurre dalla (19) che è verificata la (18), se

$$(\sigma_1 + \sigma_2) \to +\infty,$$

è cosa immediata.

E il teorema di Golomb è così completamente dimostrato.

Matematica (Geometria). — *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori.* Nota di B. Segre, presentata [1] dal Socio F. Severi.

È noto che, dati su di un piano due rami Σ, Σ' (di curve non necessariamente algebriche) aventi la stessa origine O e la stessa tangente t, nell'ipotesi ch'essi abbiano con questa un contatto ugualmente elevato e siano perciò rappresentabili con equazioni del tipo

$$y = ax^\mu + \cdots \quad , \quad y = a' x^\mu + \cdots$$
$$(a a' \neq 0, \ \mu \text{ intero o fratto} > 1),$$

il numero a/a' risulta indipendente dalle coordinate e costituisce un invariante proiettivo – detto di C. Segre – relativo ai rami Σ, Σ' [2]. Tale rapporto ha il seguente significato geometrico: una retta r, prossima ad O, incontri Σ, Σ', t ordinatamente nei punti P, P', T; se M è un qualunque punto di r ed r tende a passare per O, il limite del birapporto (PP' TM) non dipende dalle posizioni limiti di r, M (che solo vanno supposte distinte da t, O), ed è precisamente uguale ad a/a' [3].

L'estensione di ciò che precede allo spazio è stata fatta dallo stesso C. Segre nell'ultimo suo lavoro, limitatamente al caso di rami del primo ordine ordinari e sotto forma non del tutto esauriente [4]. Io qui completo e generalizzo tale ricerca, con argomentazioni di portata e semplicità notevoli, e pervengo fra l'altro al

Teorema I. – Consideriamo in S_{n+1} due rami Σ, Σ' coll'origine O comune, aventi in O la medesima retta tangente, S_1, lo stesso piano osculatore, S_2, $\cdots$, lo stesso iperpiano osculatore, S_n; e supponiamo che Σ

(1) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(2) Cfr. C. Segre, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie.* Questi «Rendiconti», ser. 5ª, to. 6 $(1897)_2$, p. 168.

(3) Ved. C. Segre, loc. ult. cit., p. 170. Sull'argomento, e per ulteriori indicazioni bibliografiche, cfr. pure B. Segre, *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo.* Questi «Rendiconti», ser. 6ª, to. 9 $(1929)_2$, p. 970.

(4) Cfr. C. Segre, *Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore.* Questi «Rendiconti», ser. 5ª, to. 33 $(1924)_1$, p. 325.

ed Σ' abbiano in O con ciascuno di questi spazi un contatto ugualmente elevato. Si possono allora ovviamente (ed in infiniti modi) introdurre in S_{n+1} coordinate proiettive non omogenee $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, di guisa che detti rami si rappresentino con equazioni della forma:

$$(1) \qquad \Sigma) \quad x_r = \{ a_r x_0^{\mu_r} \} \quad , \quad \Sigma') \quad x_r = \{ a'_r x_0^{\mu_r} \}$$
$$(a_r a'_r \neq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \cdots, n),$$

ove nei secondi membri le { } stanno per indicare che si son scritti solo i termini di ordine infinitesimale più basso rispetto ad x_0, e le μ denotano numeri interi o fratti soddisfacenti alle

$$(2) \qquad 1 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n .$$

Ebbene, *le n quantità*

$$(3) \qquad \mathfrak{I}_r = \frac{a_r}{a'_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

sono indipendenti dalle coordinate introdotte, e restano invariate quando si assoggettino Σ *ed* Σ' *ad una qualsiasi trasformazione omografica.*

Questa proposizione si identifica per $n = 1$ con quella di C. Segre ricordata in principio; essa però, già per $n = 2$, fornisce ben più di quanto trovasi nell'ultimo lavoro citato di questo A. – anche a prescindere dalle limitazioni sovrabbondanti ch'egli suppone per i due rami - dato che, degli n invarianti $\mathfrak{I}$ a questi relativi, ivi compare il solo $\mathfrak{I}_1$.

Il teorema I ammette interessanti applicazioni di geometria proiettivo-differenziale, come avrò occasione di mostrare in una Nota successiva. Esso vien qui integrato dallo studio degli invarianti $\mathfrak{I}$ di due rami dedotti da Σ, Σ' per proiezione (teorema II) o per dualità in S_{n+1} (teorema III), al che si ricollegano varie definizioni geometriche dirette – tanto di natura proiettiva che di natura metrica - degli invarianti considerati (nn. 3-5).

1. Stabiliremo il teorema I col metodo d'induzione completa; poichè, come già si è rilevato, esso è vero nel piano, basterà supporlo verificato negli spazi ad n dimensioni e dedurne la validità negli spazi di dimensione $n + 1$. Orbene, ciò discende dal seguente

Teorema II. – Ferme restando le ipotesi e le notazioni del teorema I, si consideri un qualunque punto, P, che appartenga ad S_{r+1} ma non ad S_r $(1 \leq r \leq n)$ ed un qualunque iperpiano, π, non passante per P. I due rami, $\bar{\Sigma}$ ed $\bar{\Sigma}'$, proiezioni di Σ, Σ' da P su π hanno nel punto, $\bar{O}$, proiezione di O comportamento tale, che ad essi (per quanto sopra) è lecito applicare il suddetto teorema I: ebbene – fissato r – *gli* $n - 1$ *inva-*

rianti $\bar{\mathfrak{I}}$ *che a loro son relativi non dipendono nè dalla scelta del punto* P, *nè dalla scelta dell'iperpiano* π, *e sono semplicemente dati da*

$$(4) \qquad \bar{\mathfrak{I}}_1 = \mathfrak{I}_1 , \cdots , \bar{\mathfrak{I}}_{r-1} = \mathfrak{I}_{r-1} \quad ; \quad \bar{\mathfrak{I}}_r = \mathfrak{I}_{r+1} , \cdots , \bar{\mathfrak{I}}_{n-1} = \mathfrak{I}_n .$$

Poichè r è uno qualunque dei numeri $1, 2, \cdots, n$, il teorema II e l'ammissione fatta in principio di questo numero implicano senz'altro la validità del teorema I, in quanto le (4) accertano l'invarianza proiettiva di $\mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 , \cdots , \mathfrak{I}_n$.

2. Ci resta ora da dimostrare il teorema II, supponendo già si sappia che il teorema I sussiste negli spazi di dimensione n.

Il punto P di cui all'ultimo enunciato ha coordinate del tipo

$$x_0 = p_0 , x_1 = p_1 , \cdots , x_r = p_r \quad , \quad x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0 ,$$

con

$$(5) \qquad p_r \neq 0 .$$

Se si fa variare l'iperpiano π, ma si tien fisso il punto P, i rami $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ non subiscono manifestamente che una trasformazione omografica (una prospettività di centro P); il che, per quanto si è ammesso, non altera gli invarianti $\mathfrak{I}$. Allo scopo di calcolare questi ultimi, possiamo dunque assumere π come più ci talenta, purchè non passante per P; e noi, avuto riguardo alla (5), lo prenderemo coincidente coll'iperpiano coordinato

$$x_r = 0 .$$

La retta congiungente P con un qualunque punto di $\mathfrak{L}$, usando coordinate correnti $X_0, X_1, \cdots, X_n$ e ricordando le (1), ha le seguenti equazioni:

$$\frac{X_0 - x_0}{x_0 - p_0} = \frac{X_1 - \{ a_1 x_0^{\mu_1} \}}{\{ a_1 x_0^{\mu_1} \} - p_1} = \cdots = \frac{X_{r-1} - \{ a_{r-1} x_0^{\mu_{r-1}} \}}{\{ a_{r-1} x_0^{\mu_{r-1}} \} - p_{r-1}} =$$

$$= \frac{X_r - \{ a_r x_0^{\mu_r} \}}{\{ a_r x_0^{\mu_r} \} - p_r} = \frac{X_{r+1} - \{ a_{r+1} x_0^{\mu_{r+1}} \}}{\{ a_{r+1} x_0^{\mu_{r+1}} \}} = \cdots = \frac{X_n - \{ a_n x_0^{\mu_n} \}}{\{ a_n x_0^{\mu_n} \}} .$$

In virtù della (5) risulta

$$\frac{- \{ a_r x_0^{\mu_r} \}}{\{ a_r x_0^{\mu_r} \} - p_r} = \left\{ \frac{a_r}{p_r} x_0^{\mu_r} \right\} ,$$

onde, tenendo anche conto delle (2), la traccia su π della retta suddetta ha le coordinate:

$$X_0 = \{ x_0 \} \quad , \quad X_1 = \{ a_1 x_0^{\mu_1} \} , \cdots , X_{r-1} = \{ a_{r-1} x_0^{\mu_{r-1}} \} ,$$

$$X_r = 0 \quad , \quad X_{r+1} = \{ a_{r+1} x_0^{\mu_{r+1}} \} , \cdots , X_n = \{ a_n x_0^{\mu_n} \} .$$

Ne conseguono per $\mathfrak{L}$ in π le equazioni

$$X_1 = \{ a_1 X_0^{\mu_1} \}, \cdots, X_{r-1} = \{ a_{r-1} X_0^{\mu_r - 1} \},$$

$$X_{r+1} = \{ a_{r+1} X_0^{\mu_r + 1} \}, \cdots, X_n = \{ a_n X_0^{\mu_n} \},$$

ed equazioni perfettamente analoghe sussistono per $\overline{\mathfrak{L}}'$. Da qui, applicando – com'è lecito – il teorema I ad $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$, tosto si deducono per gli invarianti $\overline{\mathfrak{I}}$ le espressioni:

$$\overline{\mathfrak{I}}_1 = \frac{a_1}{a_1'}, \cdots, \overline{\mathfrak{I}}_{r-1} = \frac{a_{r-1}}{a_{r-1}'} \quad , \quad \overline{\mathfrak{I}}_r = \frac{a_{r+1}}{a_{r+1}'}, \cdots, \overline{\mathfrak{I}}_{n-1} = \frac{a_n}{a_n'},$$

le quali appunto, in base alle (3), equivalgono alle (4).

3. Basta applicare ripetutamente in modo opportuno il teorema II, per trarne la seguente estensione.

Se i due rami $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ di S_{n+1} – considerati nel teorema I – si proiettano su di un qualunque spazio a k dimensioni $(2 \leq k \leq n)$ da un centro E_{n-k} ad $n-k$ dimensioni sghembo con esso e colla retta S_1, si ottengono sul primo spazio due rami ai quali detto teorema ancora può venir applicato. La successione dei $k-1$ invarianti, relativi a questi rami, si ottiene semplicemente da quella $(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \cdots, \mathfrak{I}_n)$ concernente $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}'$, sopprimendo le $\mathfrak{I}$ il cui indice r è tale che E_{n-k} ammetta con S_{r+1} (almeno) un punto in comune non situato su S_r.

Da qui in particolare, per $k = 2$, si ha che:

L'invariante di C. Segre *relativo ai due rami proiezioni di $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ su di un piano, da un qualunque spazio E_{n-2} sghembo con questo e con S_1, è sempre uno determinato degli invarianti (3) relativi ad $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$; ed è precisamente quello che ammette per indice il massimo dei numeri r $(1 \leq r \leq n)$ pei quali il corrispondente S_r incontra E_{n-2} secondo uno spazio di dimensione $r-2$.*

Detto invariante coincide dunque con $\mathfrak{I}_1$ se, come accadrà in generale, il centro E_{n-2} di proiezione è sghembo col piano S_2, osculatore in O ad $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$; esso risulta invece uguale ad $\mathfrak{I}_n$, qualora E_{n-2} appartenga all'iperpiano S_n, osculatore in O ad $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$; e può ovviamente identificarsi ad uno qualunque degli $\mathfrak{I}_r$, purchè si scelga opportunamente il centro E_{n-2} di proiezione.

Avendo riguardo a quanto si disse al principio di questa Nota, dall'ultima proposizione discende agevolmente una definizione geometrica diretta dei singoli invarianti $\mathfrak{I}_r$ considerati nel teorema I. Supponiamo, ad es., per semplicità, $n = 2$ e fissiamo comunque in S_3 due rette r, s, fra loro incidenti in un punto P non situato sulla retta S_1, e di cui la prima non si appoggi a quest'ultima. Un piano α per r, prossimo a contenere O, incontri $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ ed S_1 rispettivamente nei punti L, L', I; ebbene

il limite – quando α *tende a passare per* O *– del birapporto determinato dai piani congiungenti ordinatamente la s ai punti* L, L′, I *e da un ulteriore quarto piano qualsiasi che contenga s ma non* O, *è precisamente uno dei due invarianti* $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ *relativi ai rami* Γ, Γ'. Si ottiene il primo od il secondo di tali invarianti, rispettivamente a seconda che il punto P non giace sul piano S_2, osculatore in O ad Γ, Γ', oppure appartiene a tale piano [1].

4. Soffermiamoci, dal punto di vista metrico, sul caso particolare interessante in cui Γ ed Γ' hanno in O un punto semplice ordinario. Supposto l'S_{n+1} ambiente euclideo ed O proprio, possiamo riferire Γ ed Γ' al comune $(n+1)$-edro principale relativo ad O; con ciò, in base alle formule di FRENET–SERRET generalizzate [2], per Γ, Γ' valgono sviluppi del tipo

$$\Gamma) \quad x_1 = \left\{ \frac{1}{2!} c_1 x_0^2 \right\} , \quad x_2 = \left\{ \frac{1}{3!} c_1 c_2 x_0^3 \right\}, \cdots, x_n = \left\{ \frac{1}{n!} c_1 c_2 \cdots c_n x_0^{n+1} \right\},$$

$$\Gamma') \quad x_1 = \left\{ \frac{1}{2!} c_1' x_0^2 \right\} , \quad x_2 = \left\{ \frac{1}{3!} c_1' c_2' x_0^3 \right\}, \cdots, x_n = \left\{ \frac{1}{n!} c_1' c_2' \cdots c_n' x_0^{n+1} \right\},$$

ove le c e le c' denotano le n curvature in O di Γ e di Γ'. Posto per abbreviare

$$\gamma_r = \frac{c_r}{c_r'} \qquad \text{per } r = 1, 2, \cdots, n,$$

attualmente risulta

$$\mathfrak{I}_r = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_r \quad , \quad \gamma_r = \frac{\mathfrak{I}_r}{\mathfrak{I}_{r-1}} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n \,;\ \mathfrak{I}_0 = 1).$$

Dunque:

Se due curve appartenenti ad un S_{n+1} *euclideo hanno in un punto* O *semplice di contatto gli stessi* S_r *osculatori (per* $r = 1, 2, \cdots, n$*), il rapporto di due omonime qualunque delle loro n curvature in* O *è invariante di fronte a tutte le omografie di* S_{n+1} (che non trasformano O in un punto improprio).

Dal n. 3 segue inoltre che *quando si passa dalle due linee suddette a due loro proiezioni su di uno spazio subordinato a k dimensioni* $(2 \leq k \leq n)$*, fatte da un centro generico, ciascuno dei* $k-1$ *rapporti di due curvature omonime delle linee proiezioni risulta uguale al rapporto delle curvature di ugual nome delle linee oggettive.*

(1) Questo risultato viene a precisare l'ultima ricerca citata di C. SEGRE, alla quale sfugge la seconda delle suddette due possibilità in corrispondenza all'ipotesi - ivi tacitamente ammessa a p. 328 – che non sia $e(\alpha b) + m(\alpha c) = 0$.

(2) Relativamente alle quali cfr. ad es. C. GUICHARD, *Les courbes de l'espace à n dimensions.* «Mémorial des Sciences Math.», fasc. XXIX (Paris, Gauthier–Villars, 1928), p. 16.

5. Studiamo da ultimo il modo di comportarsi degli invarianti $\mathfrak{I}$ - di cui al teorema I - quando si trasformino Σ ed Σ' mediante una qualunque reciprocità di S_{n+1}; a tal uopo basterà ovviamente procurarci le equazioni di Σ, Σ', come inviluppi d'iperpiani osculatori.

Nelle coordinate correnti (X), l'S_n osculatore ad Σ nel generico punto (x) ammette l'equazione

$$(6) \qquad \left(X_r - \{a_r x_0^{\mu_r}\} \;,\; \{\mu_r a_r x_0^{\mu_r - 1}\},\right.$$

$$\left.\{\mu_r(\mu_r - 1) a_r x_0^{\mu_r - 2}\}, \cdots, \{\mu_r(\mu_r - 1)\cdots(\mu_r - n + 1) a_r x_0^{\mu_r - n}\}\right) = 0,$$

ove il 1° membro indica un determinante d'ordine $n+1$, di cui si è posto in evidenza l'$(r+1)$-ma orizzontale (r variando per valori interi fra 0 ed n), e si convenga di assumere:

$$(7) \qquad a_0 = 1 \quad , \quad \mu_0 = 1 .$$

Moltiplichiamo le colonne del suddetto determinante ordinatamente per $1, x_0, x_0^2, \cdots, x_0^n$, e poi dividiamone la riga $(r+1)$-ma per $a_r x_0^{\mu_r}$ (per $r = 0, 1, \cdots, n$). La (6) con ciò diventa:

$$\left(\frac{X_r}{a_r x_0^{\mu_r}} - \{1\} \;,\; \{\mu_r\},\right.$$

$$\left.\{\mu_r(\mu_r - 1)\}, \cdots, \{\mu_r(\mu_r - 1)\cdots(\mu_r - n + 1)\}\right) = 0;$$

onde, con semplici operazioni sulle colonne del determinante che qui compare, la si può ridurre alla forma

$$\left(\frac{X_r}{a_r x_0^{\mu_r}} - \{1\}, \{\mu_r\}, \{\mu_r^2\} \cdots, \{\mu_r^n\}\right) = 0 .$$

In base allo sviluppo di VANDERMONDE ed al fatto che le μ son tutte diverse fra loro e dallo zero, è subito visto che l'ultima equazione è del tipo:

$$(8) \qquad \sum_{r=0}^{n} \frac{\{b_r\}}{a_r x_0^{\mu_r}} X_r + \{b_{-1}\} = 0,$$

dove le b denotano costanti non nulle che è inutile precisare.

Introduciamo in S_{n+1} coordinate proiettive non omogenee d'iperpiano, $u_0, u_1, \cdots, u_n$, tali che la condizione di appartenenza di punto ed iperpiano si scriva

$$(9) \qquad X_n + u_0 X_{n-1} + u_1 X_{n-2} + \cdots + u_{n-1} X_0 + u_n = 0 .$$

Posto, per uniformità di notazioni,

$$a_{-1} = 1 \quad , \quad \mu_{-1} = 0 , \tag{10}$$

basta identificare le (8), (9), per ottenere le seguenti equazioni parametriche di Σ come inviluppo d'iperpiani:

$$u_r = \left\{ \frac{h_{n-r-1}\, a_n}{h_n\, a_{n-1}} \, x_0^{\mu_n - \mu_{n-r-1}} \right\} \qquad \text{per} \quad r = 0, 1, 2, \cdots, n .$$

Dalla prima di queste si ricava

$$x_0 = \left\{ \left(\frac{h_n\, a_{n-1}}{h_{n-1}\, a_n} \, u_0 \right)^{\frac{1}{\mu_n - \mu_{n-1}}} \right\},$$

e sostituendo nelle rimanenti n si perviene alle relazioni cercate

$$u_r = \left\{ k_r\, b_r\, u_0^{\nu_r} \right\} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n), \tag{11}$$

del tutto simili alle (1). Nelle (11) le k_r denotano costanti non nulle, dipendenti solo dalle μ, la cui espressione non ci importa; mentre per le ν e per le b valgon le

$$\nu_r = \frac{\mu_n - \mu_{n-r-1}}{\mu_n - \mu_{n-1}} \; ; \quad \nu_{-1} = 0 \quad , \quad \nu_0 = 1 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n , \tag{12}$$

$$b_r = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{\nu_r} \frac{a_n}{a_{n-r-1}} , \tag{13}$$

le quali – com'è facile verificare (e geometricamente evidente) – equivalgono alle formule che da esse si deducono scambiando le μ_i colle ν_i e le a_i colle b_i.

Allo stesso modo si trova che le equazioni, analoghe alle (11), relative ad Σ' sono

$$u_r = \left\{ k_r\, b'_r\, u_0^{\nu_r} \right\} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n),$$

con:

$$b'_r = \left(\frac{a'_{n-1}}{a'_n} \right)^{\nu_r} \frac{a'_n}{a'_{n-r-1}} . \tag{14}$$

Avendo riguardo al teorema I ed alle (7), (10), (12), (13), (14), si conclude col

Teorema III. - *Due rami dedotti da Σ, Σ' con una qualunque trasformazione dualistica, sono ancora nelle condizioni volute dal teorema I: gli n invarianti $\mathfrak{I}^*$ ad essi relativi, si esprimono in funzione degli invarianti $\mathfrak{I}$ inerenti ai rami Σ, Σ' (e dei caratteri μ di questi), mediante le:*

$$\mathfrak{I}_r^* = \left(\frac{\mathfrak{I}_{n-1}}{\mathfrak{I}_n}\right)^{\frac{\mu_n - \mu_{n-r-1}}{\mu_n - \mu_{n-1}}} \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{I}_{n-r-1}}$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n \quad ; \quad \mu_{-1} = 0 \ , \ \mu_0 = 1 \ , \ \mathfrak{I}_{-1} = \mathfrak{I}_0 = 1).$$

Osservazione I. – Il precedente teorema III permette d'introdurre gli invarianti $\mathfrak{I}$ mediante un nuovo procedimento geometrico, fondato su considerazioni duali di quelle accennate alla fine del n. 3.

Osservazione II. – Se, tanto per fare un esempio semplice, ci si riferisce al caso notevole contemplato nel n. 4, dal teorema III si ricava subito che è

$$\mu_r = \nu_r = r + 1 \quad , \quad \mathfrak{I}_r^* = \left(\frac{\mathfrak{I}_{n-1}}{\mathfrak{I}_n}\right)^{r+1} \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{I}_{n-r-1}};$$

perciò, usando notazioni che si spiegano da sè avendo appunto riguardo al n. 4, risulta

$$\gamma_r^* = \frac{\mathfrak{I}_r^*}{\mathfrak{I}_{r-1}^*} = \frac{\mathfrak{I}_{n-1}}{\mathfrak{I}_n} \cdot \frac{\mathfrak{I}_{n-r}}{\mathfrak{I}_{n-r-1}},$$

ossia:

$$\gamma_r^* = \frac{\gamma_{n-r}}{\gamma_n} \qquad \text{per} \quad r = 1, 2, \cdots, n-1 \quad , \quad \gamma_n^* = \frac{1}{\gamma_n}.$$

Omettiamo, per brevità, di enunciare l'elegante contenuto geometrico delle ultime formule.

Matematica (Geometria). — *Le linee proiettive ed un invariante d' immersione di una curva su di una superficie.* Nota di B. Segre, presentata [1] dal Socio F. Severi.

1. In due recenti Note lincee ho introdotto, su ogni superficie S non sviluppabile dello spazio ordinario, un sistema ∞^3 di curve – denominate le linee proiettive di S – il quale è covariante di fronte alle trasformazioni omografiche ed alle trasformazioni dualistiche di S [2]. Relativamente a tale sistema ho potuto stabilire varie proprietà, fra cui la seguente: i tre sistemi ∞^3 delle linee piane, coniche [3] e proiettive di S sono fra loro a due a due distinti, escluso solo che S sia una quadrica, nel qual caso essi riduconsi ad un unico sistema. Altre interessanti proposizioni sulle linee proiettive sono state in seguito assegnate dal Terracini [4], ciò che conferma l'importanza di dette linee per la geometria proiettivo-differenziale delle superficie.

In questo lavoro pervengo ad una nuova – veramente semplice – caratterizzazione delle linee proiettive, basata sullo studio e sul calcolo in coordinate arbitrarie di un certo invariante proiettivo $\mathfrak{I}$, relativo ai punti di una qualunque linea, $\mathfrak{L}$, non asintotica di S. Precisamente, preso su $\mathfrak{L}$ un punto O, sia $\mathfrak{C}$ la linea conica di S ivi osculatrice alla $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{L}$ hanno per ipotesi comuni la tangente ed il piano osculatore in O, epperciò – a norma di un risultato generale da me conseguito [5] – ammettono in O due invarianti proiettivi (pel cui significato geometrico, facile ed immediato, rinvio al n. 3 della Nota lincea testè citata). Il primo di essi, la cui considerazione sostanzialmente risale a C. Segre, assume nel nostro caso il valore numerico 1 e quindi non offre interesse; il secondo, invece, è proprio l'invariante $\mathfrak{I}$ a cui dianzi ho alluso. Ebbene (n. 5):

(1) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(2) Cfr. B. Segre, *I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio, e le condizioni geometriche per l'equivalenza proiettiva fra queste.* Questi « Rendiconti », ser. 6ª, to. 21 $(1935)_1$, p. 656 e p. 692.

(3) Così chiamansi le linee (duali delle sezioni piane) di contatto della superficie coi coni ad essa circoscritti.

(4) Cfr. A. Terracini. *Sulle linee proiettive di una superficie.* Questi « Rendiconti », ser. 6ª, to. 22 $(1935)_2$, p. 125.

(5) Ved. B. Segre, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori.* Questi « Rendiconti », ser. 6ª, to. 22 $(1935)_2$, p. 392.

Le linee proiettive di una superficie, non quadrica nè sviluppabile, sono caratterizzate dalla proprietà che lungo esse risulta

$$\mathfrak{I} = 2 . \tag{1}$$

Gli sviluppi accennati – completati anche per dualità – si prestano ad applicazioni ulteriori, solo in parte qui indicate.

Calcolo dell'invariante $\mathfrak{I}$.

2. Introduciamo nello spazio coordinate proiettive non omogenee x, y, z, assumendo – per semplificare – il punto O come origine, il piano tangente in O alla S come piano xy, ed infine il piano osculatore in O alla $\mathfrak{L}$ (distinto dal precedente, in quanto per ipotesi $\mathfrak{L}$ non è un'asintotica di S) come piano xz; O non sarà un punto parabolico di S e la tangente in O alla $\mathfrak{L}$, ossia l'asse delle x, non sarà una tangente asintotica di S. Per rappresentare la superficie S (nell'intorno di O), si avrà dunque un'equazione della forma

$$z = \frac{1}{2}(a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2) + \frac{1}{6}(b_0 x^3 + 3b_1 x^2 y + 3b_2 xy^2 + b_3 y^3) + \tag{2}$$

$$+ \frac{1}{24}(c_0 x^4 + 4c_1 x^3 y + 6c_2 x^2 y^2 + 4c_3 xy^3 + c_4 y^4) + \cdots ,$$

colle condizioni:

$$a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0 \quad , \quad a_0 \neq 0 .$$

Ciò che precede implica inoltre per la linea $\mathfrak{L}$ sviluppi del tipo

$$y = \frac{1}{6}\lambda x^3 + \cdots \quad , \quad z = \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{6} b_0 x^3 + \cdots , \tag{3}$$

dove i puntini stanno per termini in x infinitesimi d'ordine superiore al 3°.

Se

$$y = y(x) \tag{4}$$

è l'equazione della proiezione di $\mathfrak{C}$ sul piano xy, il fatto che $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{L}$ abbiano ad oscularsi in O si traduce colle

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 ; \tag{5}$$

onde, posto per abbreviare

$$y'''(0) = \gamma , \tag{6}$$

la curva $\mathfrak{C}$ sarà rappresentata dalle:

$$y = \frac{1}{6}\gamma x^3 + \cdots \quad , \quad z = \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{6} b_0 x^3 + \cdots . \tag{7}$$

Ora basta ricordare il teorema I della Nota dell'autore ultima citata, riferendosi alle (3), (7), per ottenere la seguente espressione di $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} = \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{8}$$

3. Allo scopo di determinare il numero γ, e coll'intento di poter poi dare al risultato finale forma invariantiva, introduciamo nello spazio coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) proiettive omogenee di punto e coordinate $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ proiettive omogenee di piano, normate in guisa tale che lungo S risulti

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , \quad x_4 = 1 \tag{9}$$

e

$$\xi_1 = \frac{-p}{\sqrt[4]{|rt - s^2|}} \quad , \quad \xi_2 = \frac{-q}{\sqrt[4]{|rt - s^2|}} \quad , \quad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|rt - s^2|}} \quad , \quad \xi_4 = \frac{px + qy - z}{\sqrt[4]{|rt - s^2|}} \tag{10}$$

(qui ed in seguito, p, q, r, s, t indicano le derivate di z secondo la notazione di Monge). L'equazione differenziale delle linee coniche di S si scrive allora notoriamente

$$(\xi \ , \ d\xi \ , \ d^2\xi \ , \ d^3\xi) = 0, \tag{11}$$

dove il primo membro denota un determinante del quarto ordine di ovvio significato. Ci proponiamo di calcolare tale determinante nel punto O, le differenziazioni essendo in esso effettuate lungo la curva $\mathfrak{C}$, ossia tenendo presente la (4) [oltre naturalmente alla (2)].

Si ha intanto subito, in base alle (10),

$$(\xi \ , \ d\xi \ , \ d^2\xi \ , \ d^3\xi) = \frac{1}{|rt - s^2|} \begin{vmatrix} dp & dq & d(px + qy - z) \\ d^2p & d^2q & d^2(px + qy - z) \\ d^3p & d^3q & d^3(px + qy - z) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|rt - s^2|} \begin{vmatrix} dp & dq & 0 \\ d^2p & d^2q & dp\,dx + dq\,dy \\ d^3p & d^3q & dp\,d^2x + dq\,d^2y + 2(d^2p\,dx + d^2q\,dy) \end{vmatrix}.$$

Da qui, avendo riguardo alle (2), (5), (6), con facile calcolo si deduce:

$$(\xi, d\xi, d^2\xi, d^3\xi)_{\substack{\text{lungo } \mathfrak{C} \\ \text{nel punto O}}} = \frac{dx^6}{|a_0 a_2 - a_1^2|} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & a_0 \\ a_1\gamma + c_0 & a_2\gamma + c_1 & 2b_0 \end{vmatrix} = \varepsilon(a_0\gamma - k)\,dx^6 \tag{12}$$

ove, per abbreviare, si è posto

$$(13)\qquad \varepsilon = -\operatorname{segn}(a_0 a_2 - a_1^2)\ ,\ k = \frac{2b_0(a_0 b_1 - a_1 b_0) - a_0(a_0 c_1 - a_1 c_0)}{a_0 a_2 - a_1^2}\ .$$

Poichè – per ipotesi – $\mathfrak{C}$ deve soddisfare alla (11), così in definitiva dalla (12) si trae:

$$(14)\qquad \gamma = \frac{k}{a_0}\cdot$$

4. Relativamente alla linea Σ sussistono sviluppi perfettamente analoghi a quelli del numero precedente (concernenti la $\mathfrak{C}$), salvo che non è detto Σ debba verificare la (11) ed inoltre, in base alle (3), invece della (6) si ha ora

$$y'''(0) = \lambda\ .$$

Perciò, in luogo della (12), attualmente risulta

$$(15)\qquad (\xi\ ,\ d\xi\ ,\ d^2\xi\ ,\ d^3\xi) = \varepsilon(a_0\lambda - k)\,dx^6,$$

sottintendendo – qui ed in tutto questo numero – che le differenziazioni vanno eseguite lungo Σ nel punto O.

In virtù delle (2), (3), (9), si ha poi facilmente

$$(x\ ,\ dx\ ,\ d^2x\ ,\ d^3x) = -\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ 0 & \lambda & b_0 \end{vmatrix} dx^6 = \lambda a_0\,dx^6,$$

e quindi – dalle (8), (14), (15) e da quest'ultima – consegue la relazione richiesta:

$$(16)\qquad \mathfrak{I} = \frac{(x\ ,\ dx\ ,\ d^2x\ ,\ d^3x) - \varepsilon(\xi\ ,\ d\xi\ ,\ d^2\xi\ ,\ d^3\xi)}{(x\ ,\ dx\ ,\ d^2x\ ,\ d^3x)};$$

in essa, avendo riguardo alla (13), va assunto

$$\varepsilon = +1 \quad \text{oppure} \quad \varepsilon = -1$$

rispettivamente a seconda che (nell'intorno di O) S è a punti iperbolici od ellittici.

La forma della (16) mette bene in evidenza l'invarianza di $\mathfrak{I}$ di fronte alle trasformazioni omografiche dello spazio, e mostra chiaramente che ivi le (x) possono supporsi coordinate proiettive omogenee di punto affatto arbitrarie, purchè in pari tempo le (ξ) rappresentino coordi-

nate proiettive omogenee di piano opportunamente normate[1]. In base a noti risultati[2], si ha anzi di più come – introdotte su S coordinate curvilinee qualsiasi – il 2° membro della (16) possa venir espresso mediante soli elementi intrinseci, di geometria proiettivo–differenziale sopra la superficie S.

COMPLEMENTI ED APPLICAZIONI.

5. In base alla (16) od a semplici considerazioni geometriche poggianti su quanto è stato ricordato al principio del n. 1, si ha che l'invariante $\mathfrak{I}$ risulta identicamente nullo (lungo una linea $\mathfrak{L}$ generica) nel caso, e nel caso soltanto, che la superficie S sia una quadrica. Perciò nel seguito supporremo sempre che S non sia una quadrica.

La proposizione enunciata nel n. 1 segue allora senz'altro dalla nota equazione differenziale delle linee proiettive:

$$(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) + \varepsilon\,(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) = 0\ ^{(3)},$$

la quale appunto equivale alla (1) in forza della (16).

Similmente si ha che:

Le linee piane, le linee coniche e le pangeodetiche di una superficie – non quadrica nè sviluppabile – sono caratterizzate dal fatto che, lungo ciascuna di esse, l'invariante $\mathfrak{I}$ assume rispettivamente il valore $\infty\,,\,1\,,\,0$.

In virtù della definizione dell'invariante $\mathfrak{I}$ (n. 1), la precedente caratterizzazione delle pangeodetiche può anche venir enunciata così:

Fissato comunque un punto su di una pangeodetica, la linea conica che in esso la oscula ammette ivi un piano iperosculatore (ad incontro in generale quadripunto)[4].

6. Tutto quanto precede può ovviamente volgersi per dualità nello spazio (sostituendo le sezioni piane di S alle linee coniche ecc.). Sussiste in proposito il seguente fatto notevole, che immediatamente discende dalla (16):

Per una qualunque linea $\mathfrak{L}$ tracciata su di una data superficie, l'invariante $\mathfrak{I}^*$ – duale dell'invariante $\mathfrak{I}$ definito nel n. 1 – si calcola colla formula

$$\mathfrak{I}^* = \frac{(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) - \varepsilon\,(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x)}{(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi)}\,, \tag{17}$$

ed è perciò legato ad $\mathfrak{I}$ dalla relazione bilineare:

$$\mathfrak{I}\,\mathfrak{I}^* - \mathfrak{I} - \mathfrak{I}^* = 0\,.$$

(1) Precisamente: normate come in G. FUBINI – E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, to. I (Bologna, Zanichelli, 1926), § 12 B.

(2) Ved. G. FUBINI – E. ČECH, op. cit, § 16 E.

(3) Cfr. il n. 5 del primo dei due lavori dell'autore qui citati nel n. 1.

(4) La proposizione duale di quest'ultima trovasi già a p. 99 del Trattato citato di G. FUBINI – E. ČECH.

Le (16), (17) forniscono senz'altro due diverse definizioni geometriche (fra loro duali) per le ∞^3 curve di S integrali dell'equazione differenziale

$$(x, dx, d^2x, d^3x) + \omega(\xi, d\xi, d^2\xi, d^3\xi) = 0,$$

nella quale ω denota una qualunque funzione sopra la superficie S [1]. Ciò può dirsi, in particolare, se si assume ω costante, ciò che equivale a supporre costanti gli invarianti $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^*$; il corrispondente sistema di curve integrali, Σ_ω, risulta allora palesemente *covariante di fronte a tutte le trasformazioni omografiche di* S [2]. È subito visto che:

I soli sistemi Σ_ω *che pure vengono singolarmente conservati quando si effettua una qualunque correlazione, sono quelli costituiti dalle linee proiettive e dalle pangeodetiche di* S.

Rileviamo da ultimo che gli ∞^1 sistemi Σ_ω, che si hanno al variare della costante ω, generano su S un sistema ∞^4 di curve – a cui appartengono le pangeodetiche, nonchè le linee piane, coniche e proiettive di S – del quale è manifesto il *carattere proiettivo e dualistico.*

Meccanica. — *Sul problema relativistico del moto in un campo gravitazionale stazionario.* Nota [3] di E. Gugino, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il problema del moto di un punto materiale in un campo gravitazionale qualsivoglia è notoriamente ricondotto, nella relatività generale, al problema puramente geometrico della determinazione delle geodetiche proprie nella varietà quadridimensionale spazio–tempo. Nel caso statico il ds^2 einsteiniano è della forma:

$$ds^2 = (1 - 2\varphi)(dy^0)^2 - (1 + \chi)\, dl_0^2 \tag{1}$$

dove, essendo c la velocità della luce nel vuoto, si è posto:

$$y^0 = ct \quad , \quad dl_0^2 = \sum_1^3 (dy^i)^2 \tag{2}$$

con manifesto significato delle variabili $t, y^i\ (i = 1, 2, 3)$, mentre φ e χ si suppongono indipendenti dalla coordinata temporale y^0.

(1) Le curve suddette sono solo ∞^2 nel caso, e nel caso soltanto, ch'esse si identifichino colle pangeodetiche di S.

(2) Questa proprietà sussiste, più in generale, se ω è una funzione avente su S significato invariante.

(3) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1935.

Il principio geodetico di Einstein deve coincidere in prima approssimazione col principio di Hamilton [1] della meccanica classica. Perciò, designando con U il potenziale newtoniano unitario del campo gravitazionale di cui si tratta, è necessario che sia:

$$(2') \qquad \varphi = \frac{U}{c^2} + \psi$$

con ψ del 4° ordine rispetto al rapporto v/c (v velocità del punto mobile); la funzione χ è invece del secondo ordine (al pari del rapporto U/c^2). Tanto χ quanto ψ vanno determinate in base alle equazioni gravitazionali.

Il prof. Levi–Civita ha stabilito il seguente teorema, che ha larga applicazione allo studio del moto dei corpi celesti: « Le traiettorie del moto einsteiniano, per ogni prefissato valore della energia totale E, coincidono con quelle di un moto newtoniano, nell'ordinario spazio euclideo, pel quale, l'energia totale, essendo nulla, la forza derivi dal potenziale:

$$(3) \qquad U^* = (U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right) ».$$

Vogliamo ora considerare, più generalmente, il moto di un punto materiale P in un campo gravitazionale stazionario; l'intervallo cronotopico sia della forma:

$$(4) \qquad ds^2 = (1 - 2\varphi)(dy^0)^2 - 2\,dy^0 \sum_1^3{}_i \gamma_i\, dy^i - (1 + \chi)\, dl_0^2$$

dove le funzioni $\gamma_i\,(i = 1, 2, 3)$ al pari di U, χ, ψ, si suppongono indipendenti dal tempo. Come è noto [2] i coefficienti γ_i dei termini lineari in dy^i, che si determinano pure in base alle equazioni gravitazionali, debbono essere del terzo ordine almeno, affinchè i termini correttivi cui tali γ_i dànno origine nelle equazioni del moto, rispetto al caso statico, siano di un ordine di grandezza non superiore al secondo.

Un campo gravitazionale stazionario (se non rigorosamente, almeno in seconda approssimazione, per quanto concerne le equazioni dinamiche) possiamo ritenerlo fisicamente generato da masse potenzianti, mobili l'una rispetto all'altra, con velocità dell'ordine di grandezza di quella che compete al moto orbitale terrestre. Nelle ordinarie circostanze astronomiche si ammette, in conformità, che le derivate temporali dei coefficienti del ds^2 einsteiniano siano di ordine superiore di una unità almeno alle analoghe de-

(1) Cfr. T. Levi-Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica.* (Bologna, Zanichelli, 1928), cap. I.

(2) Cfr., in particolare, M. Droste, *The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation.* « Ak. van Vet. te Amsterdam », vol. XIX; oppure De Sitter, *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences.* « Monthly notices of the R. A. S. », vol. LXXVII.

rivate rapporto alle coordinate geometriche; sicchè, con approssimazione fino al secondo ordine, tali coefficienti si possono supporre indipendenti esplicitamente dal tempo; d'altra parte le γ_i, che interyengono nel secondo membro della (4), non possono ritenersi nulle, poichè l'annullarsi dei termini lineari della (4) implica anche l'annullarsi delle componenti G_{oi} del relativo tensore di Einstein, e per le equazioni gravitazionali consegue l'annullarsi delle componenti T_{oi} del tensore energetico; quindi, in ultima analisi, si annulla, con le γ_i, il vettore che caratterizza il flusso di materia per unità di superficie e di tempo; ciò che è escluso nelle nostre ipotesi.

Ciò premesso, vogliamo dimostrare il seguente teorema, che sotto certi aspetti può ritenersi una estensione del teorema del prof. Levi–Civita: « La traiettoria del moto einsteiniano di P in un campo gravitazionale stazionario, tra due assegnate posizioni M_0 ed M_1 e per un prefissato valore dell'energia E è quella curva l dell'ordinario spazio euclideo, che rende stazionario l'integrale curvilineo:

$$(5) \qquad A = \int_{(l)} \left\{ \sqrt{2\,(U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right)} + c \sum_1^3{}_i \gamma_i \frac{dy^i}{dl_0} \right\} dl_0$$

rispetto a tutte le curve infinitamente vicine, tra le medesime posizioni estreme ». Si ha un'interpretazione meccanica particolarmente espressiva, che metteremo in luce al n. 2, nel caso in cui risulti:

$$(6) \qquad c\gamma_1 = -2\omega y^2 \quad , \quad c\gamma_2 = 2\omega y^1 \quad , \quad \gamma_3 = 0$$

con ω costante del secondo ordine; faremo vedere che nel caso generale, potremo sempre formalmente ricondurci a tale caso particolare; se infine le γ_i sono tutte nulle, si ottiene manifestamente il teorema del prof. Levi–Civita.

1. – Dimostrazione del precedente teorema.

Indichiamo con un punto le derivate rapporto al tempo; ponendo:

$$(7) \qquad \beta^2 = \frac{dl_0^2}{dy^{0\,2}} \quad , \quad F = \varphi + \frac{1}{c} \sum_1^3{}_i \gamma_i \dot{y}^i + \frac{1}{2}(1 + \chi)\beta^2$$

a meno di potenze di F superiori alla seconda (quindi a meno di termini di ordine superiore al 4° rispetto alla velocità römeriana β) dalla (4), dividendo per $(dy^0)^2$ ed estraendo la radice quadrata, facilmente si ottiene:

$$ds = \left(1 - F - \frac{1}{2}F^2\right) dy^0 .$$

Le variazioni δy^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ si annullano, com'è noto, agli estremi della linea oraria del moto, tra due posizioni estreme M_0 ed M_1 negli istanti t_0 e t_1; il principio geodetico si traduce allora nell'equazione variazionale:

$$(8) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} c^2 \left(F + \frac{1}{2} F^2 \right) dt = 0$$

equivalente, in base alle posizioni (2), (2'), (7), a meno di termini di ordine superiore al secondo, ad un sistema lagrangiano di funzione lagrangiana

$$(9) \qquad L = \frac{1}{2} v^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi \right) + c \sum_1^3{}_i \gamma_i \dot{y}^i + \\ + U + c^2 \psi + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} v^2 - U}{c^2} \right)^2 .$$

Essendo lecito valutare $\frac{1}{2} v^2 - U$ in prima approssimazione, cioè nell'ambito della meccanica classica, per l'integrale delle forze vive, l'ultimo addendo della (9), che si riduce ad una costante, non porta alcun contributo all'equazione variazionale (8); talchè ponendo:

$$(10) \qquad T_2 = \frac{1}{2} v^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi \right) \quad , \quad T_1 = c \sum_1^3{}_i \gamma_i \dot{y}^i$$

in luogo della (9) si può assumere come funzione lagrangiana la:

$$L^* = T_2 + T_1 + U + c^2 \psi ,$$

indipendente esplicitamente dal tempo; l'equazione variazionale:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^* \, dt = 0$$

ammette quindi l'integrale generalizzato dell'energia, che assume la forma particolare:

$$(11) \qquad T_2 - (U + c^2 \psi) = E .$$

Le traiettorie del punto, corrispondenti ad un dato valore di E (fascio di traiettorie), si ottengono eliminando il tempo, per mezzo della (11), dall'equazione variazionale che traduce il principio dell'azione stazionaria $\delta^* A = 0$, con δ^* simbolo di variazione asincrona [1], dove l'azione A è definita dalla:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}^i} \dot{y}^i \, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2 T_2 \, dt + \int_{t_0}^{t_1} T_1 \, dt .$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale.* (Bologna, Zanichelli), vol. II, parte II, cap. XI.

Con riguardo alle (10), (11) essendo $v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2}$, eliminando il tempo, in definitiva si perviene alla espressione, puramente geometrica, dell'azione nello spazio euclideo ordinario:

$$A = \int_{(l)} \left\{ \sqrt{2(U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right)} + c \sum_i^3 \gamma_i \frac{dy^i}{dl_0} \right\} dl_0$$

sicchè al principio dell'azione stazionaria può darsi la forma:

$$\delta A = 0$$

con δ simbolo di variazione sincrona; la precedente equazione variazionale traduce manifestamente il teorema che volevamo dimostrare.

2. – Caso particolarmente notevole.

Consideriamo il problema classico del moto di un punto libero, sollecitato da una forza conservativa di potenziale unitario U, riferito ad una terna di assi $O\,y^1\,y^2\,y^3$ rotanti uniformemente, con velocità angolare ω intorno all'asse $O\,y^3$ tenuto fisso. La velocità assoluta del punto è data dalla somma geometrica della velocità relativa di componenti $\dot{y}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ e della velocità di trascinamento di componenti $-\omega y^2, \omega y^1, 0$. La forza viva del punto di massa unitaria è quindi espressa dalla formula:

$$T = \frac{1}{2}\{(\dot{y}^1 - \omega y^2)^2 + (\dot{y}^2 + \omega y^1)^2 + \dot{y}^3\}.$$

Ponendo:

$$T_2' = \frac{1}{2}\sum_i^3 (\dot{y}^i)^2 \quad , \quad T_1' = 2\omega(y^1\dot{y}^2 - y^2\dot{y}^1)$$

e denotando con

$$U_0 = \frac{1}{2}\omega^2[(y^1)^2 + (y^2)^2] \tag{12}$$

il potenziale unitario della forza centrifuga, nell'ipotesi che il potenziale U della forza sollecitante sia indipendente da t (campo invariabile rispetto agli assi mobili), la funzione lagrangiana L, relativa al moto che si considera, avente la forma:

$$L = T_2' + T_1' + U_0 + U$$

risulta indipendente dal tempo; in base al relativo integrale generalizzato dell'energia:

$$T_2' - (U_0 + U) = E$$

eliminando il tempo dall'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (2T'_2 + T'_1)\, dt$$

si perviene alla nota espressione:

$$(13) \qquad A = \int_{(l)} \left\{ \sqrt{2(U_0 + U + E)} + 2\omega \left(y^1 \frac{dy^2}{dl_0} - y^2 \frac{dy^1}{dl_0} \right) \right\} dl_0 .$$

Ciò premesso, ritorniamo allo studio del moto relativistico del punto P nel campo gravitazionale stazionario già considerato; quando, in particolare, siano verificate le condizioni (6), l'azione (5) assume l'aspetto:

$$(5') \quad A = \int_{(l)} \left\{ \sqrt{2(U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right)} + 2\omega \left(y^1 \frac{dy^2}{dl_0} - y^2 \frac{dy^1}{dl_0} \right) \right\} dl_0 .$$

Avendo riguardo alle (12) e (13), si riconosce, che le traiettorie del moto einsteiniano, nel caso particolare che si considera, si identificano con le traiettorie di un moto newtoniano, di un punto libero nell'ordinario spazio euclideo, riferito ad assi rotanti uniformemente, con velocità angolare ω intorno all'asse $O\,y^3$, pel quale moto, l'energia totale essendo nulla, la forza agente sul punto derivi dal potenziale:

$$U_1 = (U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right) - \frac{1}{2}\omega^2 [(y^1)^2 + (y^2)^2].$$

3. – Riduzione formale, anche in generale, al caso precedente.

Torniamo a considerare il caso generale dell'esistenza di un campo gravitazionale stazionario; osserviamo, che con opportuna trasformazione di coordinate, passando dalle coordinate cartesiane y^i, $(i = 1, 2, 3)$ alle variabili u, w, x^3, qualunque sia la forma funzionale delle γ_i, possiamo sempre porre:

$$c \sum_1^3{}_i \gamma_i\, dy^i = u\,dw + dx^3 .$$

Con ulteriore opportuna trasformazione binaria si può scrivere:

$$u\,dw = x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 .$$

Passiamo direttamente dalle variabili y^i alle variabili x^i, applicando il soprassegno alle funzioni espresse in termini delle nuove variabili x^i. Trasformando la (5) e tenendo conto dell'annullarsi delle coordinate geome-

triche x^i agli estremi della traiettoria generica del fascio che si considera, si ottiene in ogni caso:

$$A = \int_{(l)} \left\{ \sqrt{2(\overline{U} + c^2\bar{\psi} + E)\left(1 + \frac{2\overline{U}}{c^2} + \bar{\chi}\right)} + x^1 \frac{dx^2}{dl_0} - x^2 \frac{dx^1}{dl_0} \right\} dl_0$$

dove dl è l'elemento lineare dello spazio euclideo, espresso per mezzo dei differenziali delle variabili x^i; si ottiene per l'azione relativa al moto relativistico di P, in un campo gravitazionale stazionario, un'espressione formalmente analoga alla (5′) relativa al moto di un punto libero riferito ad assi rotanti uniformemente; giova però tener presente, che le coordinate x^i che individuano la posizione del punto nel moto relativistico in esame, sono generalmente coordinate curvilinee nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale.

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Azioni dinamiche.* Nota IV [1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

PARTE II.

11. – Deduzione delle formule fondamentali [2]. — Per la determinazione delle azioni dinamiche esercitate dalla corrente traslocircolatoria definita nei numeri precedenti, sulla lamina bilatera a lati comunque disuguali, seguiremo lo stesso procedimento già adoperato per la lamina a lati uguali (Nota II, n. 3). Esso si basa sull'applicazione di una formula analoga a quella ben nota del Blasius e che presenta su questa qualche vantaggio quando il piano del moto sia stato rappresentato in un piano forato circolarmente com'è nel nostro caso. Ci limitiamo a dare senz'altro tale formula rimandando il lettore al luogo citato per le considerazioni che servono a dimostrarla.

È la seguente:

$$(18) \qquad R_x + iR_y = -\frac{i\rho}{2} \int_\gamma w(\zeta) \cdot \bar{w}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta,$$

in cui R_x ed R_y rappresentano le componenti dell'azione dinamica secondo i due assi, ρ è la densità del liquido, γ è la circonferenza di raggio 1 che nel piano forato ζ rappresenta il contorno della lamina bilatera, w è la velocità del liquido in forma complessa e $\bar{w}$ la sua funzione coniugata.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1935.

(2) Vedi la precedente Nota III in questi «Rendiconti», vol. XXII, fasc. 7-8.

Sostituendo alle quantità che si trovano sotto il segno di integrale le espressioni che per esse si deducono in base alle (1), (10), otteniamo dopo qualche semplificazione

$$R_x + iR_y = -\frac{\rho\, ie^{\varepsilon n i}}{2k}\int_\gamma \left[V^2\left(2 - \frac{e^{2i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2}{e^{2i(\beta+n\varepsilon)}}\right) + \frac{C^2 k^2}{4\pi^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{ki\,CV}{\pi}\left(\frac{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta} - \frac{\zeta}{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}\right)\right]\left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta - e^{i\sigma_1})(\zeta - e^{-i\sigma_1})}\,.$$

Per il calcolo di questo integrale osserviamo che la funzione

$$\left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n,$$

essendo $-1 < n < 1$, non ha poli di primo ordine e che essa è regolare dovunque salvo in uno dei due punti $\zeta = e^{i\varepsilon}, \zeta = -e^{-i\varepsilon}$, secondo che $n > 0$ o $n < 0$.

Tenendo conto di questo e dei poli in $\zeta = 0, \zeta = e^{i\sigma_1}, \zeta = e^{-i\sigma_1}$, della funzione integranda, il primo situato internamente al contorno di integrazione, gli altri due sul contorno stesso, possiamo, mediante le formule del residuo e del semiresiduo [1], calcolare dapprima i seguenti integrali

$$\int_\gamma \left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i e^{-2n\varepsilon i},$$

$$\int_\gamma \left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta^2} = -4\pi i e^{-2n\varepsilon i}\cos\sigma_1 \quad , \qquad (\cos\sigma_1 = -n\cos\varepsilon);$$

$$\int_\gamma \left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta - e^{i\sigma_1}} = \pi i\left(\frac{e^{-i\varepsilon}+e^{i\sigma_1}}{e^{i\varepsilon}-e^{i\sigma_1}}\right)^n = \pi e^{-i\varepsilon n} e^{i(\pi-\alpha)}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\sigma_1+\varepsilon)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma_1-\varepsilon)}\right]^n,$$

$$\int_\gamma \left(\frac{e^{-i\varepsilon}+\zeta}{e^{i\varepsilon}-\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta - e^{-i\sigma_1}} = \pi i\left(\frac{e^{-i\varepsilon}+e^{-i\sigma_1}}{e^{i\varepsilon}-e^{-i\sigma_1}}\right)^n = \pi e^{-i\varepsilon n} e^{\alpha i}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\sigma_1-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\sigma_1+\varepsilon)}\right]^n.$$

Decomponendo poi convenientemente in frazioni semplici i vari termini che compaiono nella funzione integranda, e tenendo presenti i residui calcolati, si perviene alla formula seguente

(1) U. Cisotti, *Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert, al teorema di Kutta-Joukowsky e sulle azioni dinamiche sopra profili cuspidati.* «Rend. Acc. Lincei», vol. XIII, ser. 6ª (1931), pp. 161-162.

$$R_x + iR_y = -\rho CVie^{i\beta} +$$

$$+ \frac{\pi\rho}{4k \operatorname{sen} \sigma_1} \left\{ e^{-i\alpha} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\sigma_1 + \varepsilon)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \varepsilon)} \right]^n \cdot \left[2V \operatorname{sen} (\beta + n\varepsilon - \sigma_1) + \frac{Ck}{2\pi} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + e^{\alpha i} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\sigma_1 - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \varepsilon)} \right]^n \cdot \left[2V \operatorname{sen} (\beta + n\varepsilon + \sigma_1) + \frac{Ck}{2\pi} \right]^2 \right\}.$$

Tenendo presenti le (4) e ponendo

$$(19) \quad \begin{cases} F_A = \dfrac{\pi\rho}{2k^2 l} \dfrac{\operatorname{sen} \sigma_1 - \operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \sigma_1} \left[2V \operatorname{sen} (\beta + n\varepsilon - \sigma_1) + \dfrac{Ck}{2\pi} \right]^2, \\ F_B = \dfrac{\pi\rho}{2k^2 lm} \dfrac{\operatorname{sen} \sigma_1 + \operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \sigma_1} \left[2V \operatorname{sen} (\beta + n\varepsilon + \sigma_1) + \dfrac{Ck}{2\pi} \right]^2, \end{cases}$$

si ottiene infine, come espressione dell'azione dinamica

$$(20) \qquad R_x + iR_y = -\rho CVie^{i\beta} + F_A e^{-\alpha i} + F_B e^{\alpha i}.$$

Si noti che in base alle (19), avendo le costanti i valori determinati al n. 3, tale azione dinamica risulta, in ultima analisi, funzione degli elementi geometrici che caratterizzano la lamina (α, l, ml) e degli elementi che definiscono la corrente investitrice (V, β, C).

Il termine

$$-\rho CVie^{i\beta},$$

costituisce la spinta secondo il teorema di Kutta–Joukowsky; gli altri due termini sono dovuti alle singolarità del moto sul contorno della lamina, derivanti dalla presenza delle cuspidi. Precisamente (v. fig. 3), la cuspide in A contribuisce all'azione dinamica colla forza di grandezza F_A, diretta lungo il lato superiore della lamina, nel verso $A \to o$; la cuspide in B colla forza di intensità F_B, diretta lungo il lato inferiore della lamina col verso $B \to o$ [1]. In totale perciò l'azione delle cuspidi si esplica con una forza, che supposta applicata in O, è sempre contenuta nell'angolo B′ O A′, formato dai prolungamenti dei lati della lamina e costituisce quindi una spinta diretta dal rientrante verso il saliente.

Dal punto di vista formale si può notare che F_A si cambia in F_B, cambiando σ_1 in $-\sigma_1$ e l, lunghezza di OA, in ml, lunghezza di OB.

(1) Si noti infatti che in base alle convenzioni fatte sugli angoli σ_1 ed ε, F_A de F_B sono sempre positive.

Regolarizzando il moto in A o in B, si annullano rispettivamente F_A o F_B, come risulta dalle (12) e (12') del n. 9.

Nel caso della regolarizzazione in entrambe le cuspidi considerato al n. 10, F_A ed F_B sono nulli e rimane solo la spinta di Joukowsky.

Indicando con R ed S rispettivamente l'*azione diretta* e l'*azione deviatrice* (1), si ha

$$(21) \qquad \begin{cases} R = F_A \cos(\beta + \alpha) + F_B \cos(\beta - \alpha) \\ S = -F_A \operatorname{sen}(\beta + \alpha) - F_B \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - \rho CV . \end{cases}$$

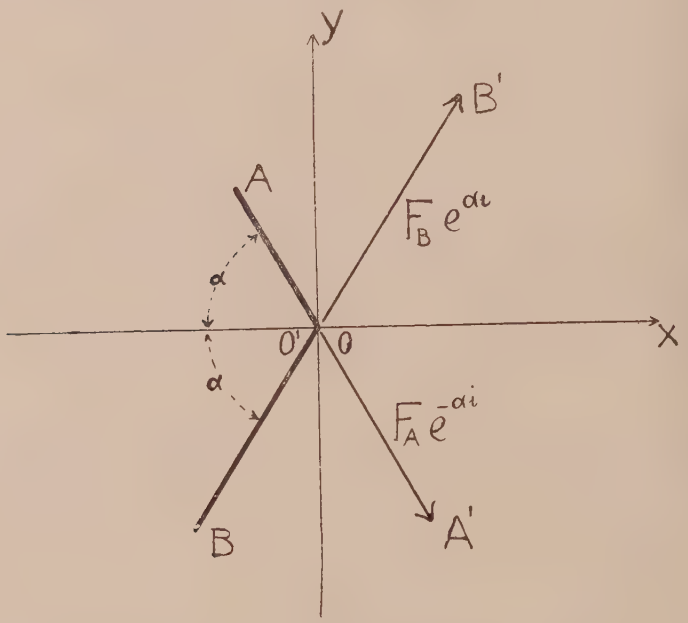


Fig. 3.

La presenza delle cuspidi dà origine quindi ad una azione diretta che si annulla in generale solo nel caso della doppia regolarizzazione. Se questa azione è positiva si ha una *resistenza diretta*, se è negativa si ha una *forza di risucchio*.

L'azione normale, $-\rho CV$, di Joukowsky, viene modificata dalla presenza delle cuspidi. Essa può essere accresciuta o diminuita a seconda della direzione della corrente e del segno della circolazione $\left(\text{per es. per } C > 0 \text{ e } \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ l'azione normale viene aumentata per ogni } \alpha < \beta < \pi - \alpha\right)$.

(1) Come al solito R è la componente dell'azione dinamica secondo la corrente investitrice, S la componente normale a questa, fissando il verso in modo che velocità asintotica e normale ad essa formino un sistema congruente a quello degli assi x, y.

Scrivendo separatamente le due componenti dell'azione dinamica secondo gli assi si ha anche

$$(22) \qquad \begin{cases} R_x = (F_B + F_A)\cos\alpha + \rho C V \operatorname{sen}\beta, \\ R_y = (F_B - F_A)\operatorname{sen}\alpha - \rho C V \cos\beta. \end{cases}$$

12. – Azione dinamica in alcuni casi particolari notevoli.

a) *Corrente traslatoria.* Supponiamo che la corrente investitrice sia puramente traslatoria. Si avrà allora $C = 0$ e risulta quindi nulla la spinta normale secondo il teorema di Kutta–Joukowsky. L'azione dinamica si riduce a quella dovuta alle singolarità sul contorno. La (19) e la (22), (posto in esse $C = 0$), ci permettono allora di stabilire il risultato seguente:

La risultante delle azioni dinamiche di una corrente traslatoria su una lamina bilatera, è direttamente proporzionale al quadrato della velocità asintotica della corrente e la sua componente secondo la bisettrice della lamina è rivolta sempre dalla parte del saliente.

b) *Corrente circolatoria.* Posto $V = 0$, è anche in questo caso nulla l'azione di Joukowsky e la risultante viene fornita dalle due forze agenti lungo i due lati della lamina la cui intensità acquista l'espressione

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{\rho C^2 (\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varepsilon)}{2\pi l \operatorname{sen}\sigma_1}, \\ F_B = \dfrac{\rho C^2 (\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\varepsilon)}{2\pi l m \operatorname{sen}\sigma_1}. \end{cases}$$

L'azione dinamica di una corrente circolatoria su una lamina bilatera è dunque direttamente proporzionale al quadrato della circolazione, è indipendente dal verso della circolazione stessa e la sua componente secondo la bisettrice è sempre rivolta dalla parte del saliente.

c) *Lamina equilatera.* In questo caso si ha $\varepsilon = 0$, $m = 1$ e le (19) diventano

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{\pi\rho}{2k^2 l}\left[2V \operatorname{sen}(\beta - \sigma_1) + \dfrac{Ck}{2\pi}\right]^2, \\ F_B = \dfrac{\pi\rho}{2k^2 l}\left[2V \operatorname{sen}(\beta + \sigma_1) + \dfrac{Ck}{2\pi}\right]^2, \end{cases}$$

nelle quali σ_1 e k acquistano il valore (2'), (5'') assegnato al n. 5. Si riottengono i risultati contenuti al n. 3 e al n. 4 della Nota 2ª citata nell'introduzione.

d) *Lamina aperta ad angolo piatto,* $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tenendo presenti i valori acquistati in questo caso dalle costanti (n. 5, *b*), si ottiene agevolmente

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{\pi\rho l_0}{2}\left[V\cos\beta - \dfrac{C}{2\pi l_0}\right]^2, \\ F_B = \dfrac{\pi\rho l_0}{2}\left[V\cos\beta + \dfrac{C}{2\pi l_0}\right]^2, \end{cases}$$

avendo indicato con $2l_0$ la lunghezza totale, $(m+1)l$, della lamina. Tenendo conto anche della spinta di Joukowsky otteniamo poi, in base alle (22)

$$\begin{cases} R_x = \rho CV, \\ R_y = 0. \end{cases}$$

Si ritrova così per la lamina semplice il risultato del Cisotti [1] cioè che qualunque sia la corrente traslocircolatoria investitrice, l'azione dinamica risulta normale alla lamina stessa.

e) *Lamina chiusa*, $(\alpha = 0, \pi)$. In questo caso escluso, abbiamo visto al n. 5, *d* che la rappresentazione conforme conduce, in sostanza, ad una lamina semplice avente la lunghezza uguale al lato non minore.

Per quanto riguarda la valutazione delle azioni dinamiche si constata immediatamente, tenendo presenti i valori assunti in questo caso dalle costanti (n. 5, *d*), che si annulla sempre quello dei due termini F_A, F_B che esprime il contributo portato all'azione dinamica dalla cuspide del lato minore, in accordo colla circostanza che nella chiusura della lamina tale cuspide scomparisce. L'altro termine poi acquista valore uguale a quello che si otterrebbe dalla cuspide rimasta nel caso limite in cui la lamina, avendo i lati sovrapposti, diventa rettilinea. Se i due lati sono uguali $(m = 1)$, F_A e F_B sono entrambi diversi da zero, e nel loro insieme dànno pure il contributo portato all'azione dinamica dall'unica cuspide in cui vengono a fondersi le due date in A e B, nella corrispondente lamina rettilinea.

Le (19) non dànno però, per il modo stesso con cui furono ricavate, il contributo portato all'azione dinamica dalla nuova cuspide che si forma in O (o in O′) quando la lamina si chiude, e sono quindi inadatte ad esprimere, in questo caso, l'azione dinamica totale dovuta ai punti singolari del contorno. Questa si può invece calcolare partendo dalle trasformazioni indicate al n. 5, *d* in cui la lamina chiusa viene già considerata come una lamina semplice; entrambe le cuspidi dànno allora il loro contributo e si riottengono i risultati relativi alla lamina rettilinea.

All'atto in cui la lamina si chiude vi è dunque discontinuità nell'azione dinamica, giustificata dal punto di vista analitico, dalle precedenti osservazioni; dal punto di vista fisico si pensi che nella sovrapposizione dei due lati, viene bruscamente eliminata una cuspide e una parte del contorno, e con esse la corrispondente azione dinamica.

Questa circostanza, almeno qualitativamente, si presenta nel caso dell'alettone che va ad adagiarsi completamente sull'ala a cui esso è applicato.

(1) V. la Nota: *Una notevole eccezione* ecc. citata nell'Introduzione.

Meccanica. — *Sui cosiddetti fenomeni giroscopici.* Nota[1] di G. Bisconcini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nei più recenti trattati di Meccanica vengono presi in esame soltanto gli effetti giroscopici che presentano i solidi aventi struttura giroscopica rispetto a un loro punto tenuto fisso o rispetto al baricentro, ma non si fa cenno di maggiore generalità di tali fenomeni.

Soltanto, per quanto io sappia, i proff. Levi-Civita e Amaldi nelle loro *Lezioni di Meccanica razionale* [vol. II, cap. VIII, n. 4] trattano, dal punto di vista qualitativo e in senso lato, del fenomeno della *tendenza al parallelismo*, distinto più sotto con *a*), mentre Painlevé e Platrier nel loro *Cours de Mécanique* [cap. III, n. 58] studiano quantitativamente un caso molto particolare del fenomeno della *tenacia degli assi principali d'inerzia* da noi distinto con *b*).

Nel corso di lezioni di Meccanica razionale, da me dettato quest'anno nella Università di Roma, mi è occorso di trattare dei cosiddetti fenomeni giroscopici ponendomi da un punto di vista affatto generale e sfruttando nel modo più semplice i principi fondamentali della Meccanica. Poichè ritengo che questo mio breve studio costituisca un apporto di un qualche interesse, mi permetto di sottoporlo al giudizio dell'Accademia.

1. Mostrerò che, nel moto di un solido intorno a un suo punto tenuto fisso o al suo baricentro, comunque mobile, quando la rotazione avviene intorno a una retta molto prossima ad un asse principale dell'ellissoide di inerzia relativo al punto considerato, si verifica:

a) che quest'asse subisce in un certo intervallo di tempo uno spostamento angolare che tende a portarlo in una direzione che è, in certo modo, una media delle direzioni che assume in tale intervallo il momento delle forze sollecitanti;

b) che la sollecitazione occorrente a ottenere un determinato moto dev'essere tanto più energica quanto maggiore è la preesistente velocità con cui il solido ruota intorno al suddetto asse principale.

2. Se il solido si muove intorno a un suo punto fisso o al suo baricentro, punto che in ogni caso indicheremo con O, per effetto di una sollecitazione il cui momento rispetto a O sia **M**, e con **K** indichiamo il mo-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1935.

mento risultante delle quantità di moto, è sodisfatta in ogni istante la equazione cardinale

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}\,.$$

Considerando un intervallo di tempo $t \mid\!\!-\!\mid t + \Delta t$ e indicando con $\Delta\mathbf{K}$ la variazione subìta da $\mathbf{K}$ nel detto intervallo, dall'equazione scritta deducesi

$$\Delta\mathbf{K} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}\,dt\,.$$

Designando con $\mathbf{M}_m$ il vettore che ha per componenti i valori medi delle componenti di $\mathbf{M}$ nell'intervallo $t \mid\!\!-\!\mid t + \Delta t$, vettore che possiamo dire *momento medio*, dalla precedente uguaglianza si deduce

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{M}_m\,\Delta t\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Questa relazione prova che, nell'intervallo $t \mid\!\!-\!\mid t + \Delta t$, l'incremento $\Delta\mathbf{K}$ del momento delle quantità di moto è parallelo al momento medio delle forze attive e che quindi il vettore $\mathbf{K}$ tende a disporsi nella direzione di $\mathbf{M}_m$.

Qui torna acconcio ricordare che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e il momento delle quantità di moto $\mathbf{K}$ formano fra loro angolo acuto o nullo e che $\mathbf{K}$ risulta normale al piano diametrale coniugato di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto all'ellissoide di inerzia relativo al punto O, sicchè, se $\boldsymbol{\omega}$ ha la direzione di un asse dell'ellissoide, $\mathbf{K}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso, se invece la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ non coincide con quella dell'asse, ma assai poco si scosta da essa, $\mathbf{K}$, per ragioni di continuità, sarà anch'esso assai prossimo a quell'asse.

Da tale richiamo deriva che la provata tendenza di $\mathbf{K}$ al parallelismo con $\mathbf{M}_m$ si traduce, in ogni caso, in una tendenza analoga per l'asse dell'ellissoide.

Non sarà inopportuno notare come non sia lecita senz'altro analoga conclusione per l'atto di moto all'istante t, in cui interviene la sollecitazione di momento $\mathbf{M}$, ossia non è affatto vero che la **(1)** debba necessariamente valere anche per $\Delta t \to 0$. Fissiamo, per es., l'attenzione sopra una rotazione uniforme intorno a un asse principale d'inerzia, rotazione che, come ben si sa, è un moto spontaneo che ha luogo quando si annulla il momento delle forze esterne. Se allora si applica in un dato istante in un punto A di quest'asse una forza $\mathbf{F}$ di momento $\mathbf{M}$ rispetto ad O, il punto A, che può considerarsi mobile senza attrito sulla sfera di centro O e raggio OA e che nell'istante t ha velocità nulla, si moverà secondo la componente tangenziale della forza e perciò l'asse OA inizierà il suo moto spostandosi

nel piano che contiene la forza e non in piano a questo normale, come sarebbe se esso tendesse al parallelismo con **M**.

3. Passando alla seconda affermazione, la sua esattezza risulterà dal confronto che faremo fra i momenti delle forze che devono esercitarsi per produrre un certo moto del solido in due casi: quando nell'intervallo di tempo che si considera esso ruota intorno a una retta g e n e r i c a passante per il punto O, di cui si è detto al numero precedente, e quando a tale rotazione se ne aggiunge una rapidissima intorno ad un asse dell'ellissoide di inerzia relativo ad O, rotazione che di per se stessa implicherebbe sollecitazione di momento nullo.

Scelta nel corpo come terna solidale con esso quella degli assi principali del suddetto ellissoide e detti $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ i versori di tali assi, A, B, C i momenti principali d'inerzia relativi ad O, p, q, r le componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, si ha

$$\mathbf{K} = \mathrm{A}p\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}q\,\boldsymbol{j} + \mathrm{C}r\,\boldsymbol{k}.$$

Se la rotazione ha luogo intorno a una generica retta per O, i mutui rapporti delle componenti p, q, r sono dello stesso ordine di grandezza. Se alla suddetta rotazione se ne aggiunge una rapidissima $r_0\,\boldsymbol{k}$ intorno all'asse z, con che il vettore $\boldsymbol{\omega}$ viene ad accostarsi a tale asse, e tanto più quanto maggiore è r_0 rispetto a p, q, r, il momento delle quantità di moto diverrà

$$\mathbf{K}^* = \mathrm{A}p\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}q\,\boldsymbol{j} + \mathrm{C}(r + r_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Sia **M** il momento di una sollecitazione che determina istante per istante il moto del solido nel primo caso ed $\mathbf{M}^*$ quello della sollecitazione che occorrerebbe per determinare negli stessi istanti il moto nel secondo caso. Sussistendo in ogni istante fra questi momenti e i corrispondenti momenti delle quantità di moto le relazioni

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M} \quad , \quad \frac{d\mathbf{K}^*}{dt} = \mathbf{M}^*,$$

si avrà pure

$$\frac{d(\mathbf{K}^* - \mathbf{K})}{dt} = \mathbf{M}^* - \mathbf{M}.$$

Siccome l'ipotesi che i due moti differiscano unicamente per la rapida rotazione $r_0\,\boldsymbol{k}$ si traduce nel fatto che la differenza $\mathbf{K}^* - \mathbf{K}$ risulta uguale a $\mathrm{C}r_0\,\boldsymbol{k}$ e poichè d'altra parte r_0 si mantiene costante, si può scrivere

$$\mathrm{C}r_0 \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \mathbf{M}^* - \mathbf{M}.$$

A questa equazione, tenuto conto della formula del Poisson $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}$ e del fatto che

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k} = (p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{k} = q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j},$$

si può dare pure la forma

$$C r_0 (q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j}) = \mathbf{M}^* - \mathbf{M}..$$

Tale relazione pone in evidenza: **1)** che, quanto più grande è la velocità addizionale r_0, tanto maggiore è la differenza fra i momenti delle sollecitazioni che, nei due casi considerati, determinano il movimento del solido; **2)** che la differenza fra i momenti sollecitanti è un vettore del piano normale all'asse considerato e che quindi la sollecitazione addizionale può essere realizzata con una forza applicata in un punto qualunque di quest'asse.

Meccanica (Idrodinamica). — *Sul moto di una sorgente puntiforme in un angolo concavo.* Nota[1] di L. Uslenghi, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

1. In questa Nota si studia il moto di una sorgente puntiforme in un angolo concavo, nell'ipotesi che la presenza della sorgente richiami, in ogni istante, una corrente che lambisce successivamente i due lati dell'angolo, ed è tale che la velocità del liquido nel vertice dell'angolo non risulta infinita. Nel caso particolare in cui l'angolo concavo ha l'ampiezza di 2π il problema fu già studiato dal prof. Masotti[2].

Riassumiamo i risultati ottenuti:

a) Possibili traiettorie della sorgente sono le linee analiticamente definite dalla relazione

$$(1) \qquad R^{\frac{5h^2}{5h-1}} (4\cos^2 h\Theta - 3) - K (\cos^2 h\Theta)^{\frac{2h-1}{5h-1}} = 0,$$

ove R e Θ sono le coordinate polari della sorgente col riferimento indicato nella fig. 1; h caratterizza l'ampiezza dell'angolo concavo, ch'è desi-

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1935.

(2) Masotti, *Sul moto di una sorgente puntiforme in presenza di una lamina rettilinea indefinita.* (« Acta Pontificiae Academiae Scientiarum Novi Lyncaei », anno LXXXVII, 1933-34, pp. 151-163). Per l'analogo problema relativo ad un vortice, v. Hamel, *Bewegung eines gradlinigen Wirbels um eine Buhne.* (« Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », Band *13*, 1933, pp. 98-101); Uslenghi, *Sul moto di un vortice puntiforme in un angolo concavo.* (« Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », ser. 2ª, vol. LXVIII, 1935).

gnata con π/h $(1/2 \leq h < 1)$; K designa una costante reale qualsiasi. Se $K = 0$ la (1) rappresenta i due raggi A_1 e A_2 di anomalie

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{6h} \quad , \quad \Lambda_2 = \frac{5\pi}{6h} \tag{2}$$

rispettivamente. Se $K \neq 0$ la (1) può assumere la forma seguente:

$$R = (\cos^2 h\Theta)^{\frac{2h-1}{6h^2}} \left(\frac{K}{4\cos^2 h\Theta - 3}\right)^{\frac{5h-1}{6h^2}}. \tag{3}$$

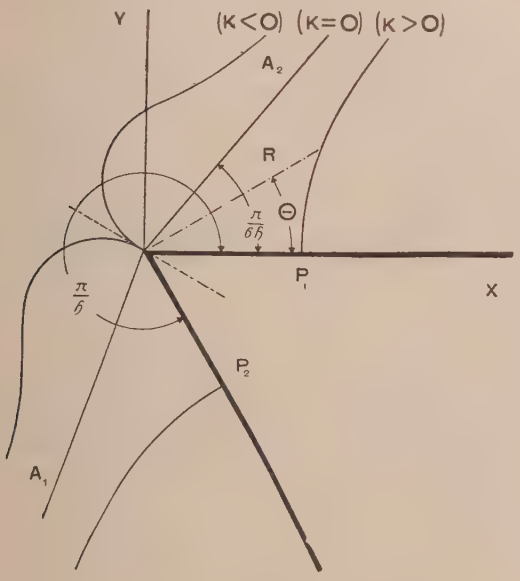


Fig. 1.

Quando $h \neq 1/2$ ogni traiettoria per la quale $K < 0$ consta di due rami che partono dal vertice dell'angolo ed ivi hanno come tangente comune la bisettrice di esso: i due rami sono simmetrici rispetto a questa retta, ed ammettono come asintoti i raggi A_1 e A_2; ogni traiettoria per la quale $K > 0$ consta di due rami, che partono rispettivamente da due punti situati sui lati dell'angolo alla distanza

$$R_0 = K^{\frac{5h-1}{6h^2}} \tag{4}$$

dal vertice di esso (e designati con P_1 e P_2 sulla fig. 1): i due rami sono simmetrici rispetto alla bisettrice del saliente mantenendosi negli angoli $0 < \Theta < \Lambda_1$ e $\Lambda_2 < \Theta < \pi/h$ rispettivamente, ed ammettono come asin-

toti A_1 e A_2. Quando $h = 1/2$ le traiettorie hanno configurazioni ben diverse da quelle ora descritte, che si troveranno nel citato lavoro del professore Masotti.

b) Su ogni traiettoria la sorgente si muove, a partire da un punto generico, allontanandosi dal saliente od avvicinandosi ad esso a seconda che la sua portata q è positiva o negativa.

2. Nel semipiano $y > 0$ del piano della variabile complessa $z = x + iy$ (fig. 2), sia disteso un velo liquido, limitato dall'asse delle x supposto imma-

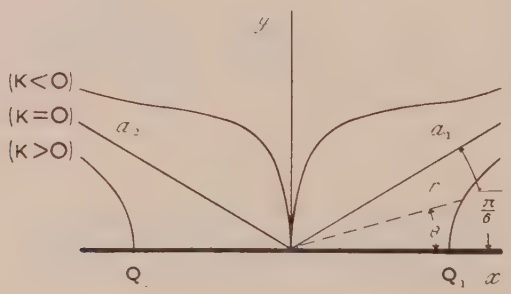


Fig. 2.

gine di una parete rigida. Nel punto di affissa $z_1 = x_1 + iy_1$ poniamo una sorgente puntiforme di portata q. Nel medesimo semipiano fluisca una corrente uniforme parallela all'asse x, la cui velocità ha la componente U secondo l'asse stesso. Il potenziale cinetico complesso del moto composto dei due precedenti è

$$f = \frac{q}{2\pi} \log [(z - z_1)(z - \bar{z}_1)] + Uz . \tag{5}$$

Risulta per la velocità complessa il valore:

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - \bar{z}_1} \right) + U . \tag{6}$$

Fissiamo per U quella determinazione per cui $w = 0$ per $z = 0$, e di ciò si vedrà fra breve lo scopo; assumiamo cioè

$$U = \frac{q}{2\pi} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} . \tag{7}$$

Rappresentiamo ora in modo conforme il semipiano $y > 0$ del piano z sull'angolo di ampiezza π/h del piano Z, ch'è limitato dai raggi spiccati

dall'origine ed aventi le anomalie 0 e π/h (Fig. 1). Tale rappresentazione si fa mediante la relazione:

$$\zeta = Z^h. \tag{8}$$

Se nella (5) si sostituisce Z^h a ζ essa rappresenta il potenziale complesso di un moto del piano Z, composto di quello provocato da una sorgente di portata q situata nel punto $Z_1 = \zeta_1^{1/h}$ e di una corrente che lambisce i lati del saliente; la velocità complessa di tale moto è data dalla relazione

$$W = \frac{df}{dZ} = w \cdot \frac{d\zeta}{dZ} = \frac{hq}{2\pi\zeta^{(1/h)-1}}\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} + \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1}{\zeta_1 \bar{\zeta}_1}\right), \tag{9}$$

ed è facile verificare che il suo valore è nullo nel punto $Z = 0$ se $h \neq 1/2$; quel valore non è nullo ma finito se $h = 1/2$, conformemente con quanto per questo caso era noto [1].

3. Determiniamo ora le possibili traiettorie della sorgente. Tra la velocità complessa della sorgente del piano ζ, che indichiamo con w_1, e la velocità complessa della sorgente del piano Z, che indichiamo con W_1, sussiste la relazione [2]:

$$W_1 = w_1\left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)_1 + \frac{q}{4\pi}\left(\frac{d}{dZ}\log\frac{d\zeta}{dZ}\right)_1. \tag{10}$$

Si ha

$$w_1 = \lim_{\zeta \to \zeta_1}\left(w - \frac{q}{2\pi}\frac{1}{\zeta - \zeta_1}\right), \tag{11}$$

sicchè in virtù delle (6), (7), (8) si deduce dalla (9) per la velocità della sorgente sul piano Z l'espressione:

$$W_1 = \frac{hq}{2\pi\zeta_1^{1/h}}\left[\left(\frac{1}{\zeta_1 - \bar{\zeta}_1} + \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1}{\zeta_1 \bar{\zeta}_1}\right)\zeta_1 - \frac{1-h}{2h}\right]. \tag{12}$$

Si ha pure che

$$W_1 = \frac{d\bar{Z}_1}{dt} = \frac{1}{h}\,\bar{\zeta}_1^{(1/h)-1} \cdot \frac{d\bar{\zeta}_1}{dt} \tag{13}$$

con $0 \geqq \arg \bar{\zeta}_1 \geqq -\pi$ [3].

(1) MASOTTI, loc. cit., form. (11).

(2) MASOTTI, *Sul moto di una sorgente puntiforme*, form. (14). («Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei», anno LXXXVI, 1932-33, pp. 189-210).

(3) Si noti che $d\bar{\zeta}_1/dt$ rappresenta in forma complessa la velocità dell'immagine della sorgente del piano Z sul piano ζ, mentre w_1 è la velocità complessa della sorgente sul piano ζ.

Dalla (12) in virtù della (13) si ha:

$$(14)\qquad \frac{d\bar{\zeta}_1}{dt} = \frac{h^2 q}{2\pi(\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{1/h}}\left[\left(\frac{1}{\zeta_1-\bar{\zeta}_1}+\frac{\zeta_1+\bar{\zeta}_1}{\zeta_1\bar{\zeta}_1}\right)\zeta_1\bar{\zeta}_1 - \frac{1-h}{2h}\bar{\zeta}_1\right],$$

dalla quale si ottiene, mutando ogni quantità complessa con la sua coniugata:

$$(15)\qquad \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{h^2 q}{2\pi(\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{1/h}}\left[\left(\frac{1}{\zeta_1-\bar{\zeta}_1}-\frac{\zeta_1+\bar{\zeta}_1}{\zeta_1\bar{\zeta}_1}\right)\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \frac{1-h}{2h}\zeta_1\right].$$

Addizioniamo membro a membro le due precedenti, omettendo per semplicità l'indice « uno »: otteniamo

$$(16)\qquad \frac{d(\zeta+\bar{\zeta})}{dt} = \frac{h(5h-1)}{4\pi} q \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{(\zeta\bar{\zeta})^{1/h}}.$$

Dividiamo la (14) per $\bar{\zeta}_1$ e la (15) per ζ_1, quindi sommiamo membro a membro le due nuove relazioni, omettendo ancora l'indice « uno »; con semplice calcolo si ha:

$$(17)\qquad \frac{d(\zeta\bar{\zeta})}{dt} = \frac{h^2 q}{2\pi(\zeta\bar{\zeta})^{1/h}}\left[(\zeta+\bar{\zeta})^2 + \frac{2h-1}{h}\zeta\bar{\zeta}\right].$$

Eliminando il tempo tra la (17) e la (16) si ottiene:

$$(18)\qquad \frac{d(\zeta\bar{\zeta})}{d(\zeta+\bar{\zeta})} = \frac{2h}{5h-1}\left[(\zeta+\bar{\zeta}) + \frac{2h-1}{h}\frac{\zeta\bar{\zeta}}{\zeta+\bar{\zeta}}\right]$$

ossia

$$(19)\qquad \frac{d(x^2+y^2)}{dx} = \frac{4h}{5h-1}\left[2x + \frac{2h-1}{2h}\frac{x^2+y^2}{x}\right];$$

la (19) è un'equazione differenziale lineare nella funzione x^2+y^2 della variabile x, il cui integrale generale è:

$$(20)\qquad K x^{\frac{4h-2}{5h-1}} - x^2 + 3y^2 = 0$$

essendo K una costante reale arbitraria. È questa l'equazione cartesiana delle immagini delle traiettorie della sorgente sul piano ζ (fig. 2). In coordinate polari (fig. 2) si ha

$$(21)\qquad r^{\frac{6h}{5h-1}}(4\cos^2\vartheta - 3) - K(\cos^2\vartheta)^{\frac{2h-1}{5h-1}} = 0,$$

dalla quale discende l'equazione (1) della traiettoria della sorgente sul piano Z. Dall'esame di quella equazione discendono le annunciate conclusioni.

4. L'espressione della velocità radiale è la seguente [1]:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{hq}{4\pi R}\left(4\cos^2 h\Theta + \frac{2h-1}{h}\right); \tag{22}$$

e poichè la quantità fra parentesi è manifestamente positiva, il segno di dR/dt è quello di q, sicchè la sorgente si allontana dal saliente o si avvicina ad esso a secondo che la portata q è positiva o negativa.

Dall'equazione (12) si deduce facilmente il quadrato del modulo della velocità della sorgente; si trova

$$V^2 = \left(\frac{q}{4\pi R \operatorname{sen} h\Theta}\right)^2 [8h(1-3h)\operatorname{sen}^4 h\Theta + (1-3h)(1-9h)(\operatorname{sen}^2 h\Theta + h^2]. \tag{23}$$

Si vede che su ogni traiettoria ove $K \leq 0$, $V \to \infty$ per $R \to O$; e su ogni traiettoria ove $K > 0$, $V \to \infty$ per $\operatorname{sen} h\Theta \to 0$: in tutti i casi $V \to 0$ per $R \to \infty$.

(1) Si deduce dalla (8) la relazione fra la velocità radiale della sorgente, dR/dt, e la velocità radiale dell'immagine, dr/dt:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{R^{1-h}}\frac{dR}{dt};$$

la velocità radiale dell'immagine si ricava dalla (17):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h^2 q}{4\pi R^{2-h}}\left(4\cos^2 h\Theta + \frac{2h-1}{h}\right);$$

ne segue la (22).

Meccanica (Idrodinamica). — *Sul centro del moto asintotico.* Nota[1] di A. Masotti, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

1. Consideriamo un generico moto piano irrotazionale, nel quale la velocità complessa w è regolare nel punto all'infinito, ed ivi si annulla: sicchè, detto n l'ordine di questo suo zero, vale per essa, fuori di un cerchio γ che ha il centro nell'origine e non lascia fuori nessuno dei suoi punti singolari, uno sviluppo in serie di potenze intere e negative della variabile complessa z, del tipo:

$$w = \frac{c_n}{z^n} + \frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} + \cdots . \tag{1}$$

Considerammo recentemente un tale moto, per lumeggiarne il comportamento asintotico[2]. E rilevammo che fra tutti i moti provocati da una sola singolarità, a ciascuno dei quali compete una velocità complessa del tipo:

$$w^* = \frac{\Omega}{(z - \omega)^n} \tag{2}$$

che ha uno zero ennuplo nel punto all'infinito, quello per il quale

$$\Omega = c_n \quad , \quad \omega = \frac{c_{n+1}}{n c_n} \tag{3}$$

è, si può dire, quello che a grandi distanze meno si scosta dal moto anzidetto, perchè per esso l'ordine dello zero che ha nel punto all'infinito la differenza $w - w^*$ divien massimo, ed eguale a $n + 2$. « Moto asintotico » è il moto definito dalla (2), insieme con le (3); « centro del moto asintotito » è il punto definito dalla seconda delle (3), nel quale ha sede la singolarità che regola il moto asintotico.

Ciò premesso, ecco l'oggetto di questa Nota.

a) Si mette in evidenza una nuova formula per la determinazione del centro del moto asintotico, notevole per l'intervento in essa di un integrale di tipo classico:

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 ottobre 1935.

(2) Cfr. Masotti, *Sul comportamento asintotico di alcuni moti piani irrotazionali* (in *Note idrodinamiche:* « Pubblicazioni della Università Cattolica del Sacro Cuore », ser. XI, vol. I, 1935).

$$\omega = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{\zeta w'}{w} d\zeta, \tag{4}$$

dove λ è una linea chiusa che contiene tutti i punti singolari di w e tutti i suoi zeri che sono a distanza finita, ed è percorsa in modo che sia lasciata a sinistra la regione ad essa interna.

b) Si applica questa formula per determinare il centro del moto asintotico che corrisponde ad un moto nel quale i punti singolari di w sono poli, sicchè w è funzione razionale di ζ: ciò avviene in particolare se il moto è provocato da un sistema di vortici, o di sorgenti, o di vortici-sorgenti, nel qual caso i punti singolari di w sono poli di primo ordine; ed anche se il moto è provocato da un sistema di doppiette, nel qual caso i punti singolari di w sono poli di secondo ordine. Detti ζ_h i poli di w e r_h i rispettivi ordini ($h = 1, \cdots, p$), detti ω_k gli zeri di w che sono a distanza finita e s_k i rispettivi ordini ($k = 1, \cdots, q$), si ha:

$$\omega = \frac{\sum r_h \zeta_h - \sum s_k \omega_k}{\sum r_h - \sum s_k}. \tag{5}$$

Se ci si concede di considerare gli zeri come poli di ordine negativo, oppure i poli come zeri di ordine negativo [1], si può dire che il centro del moto asintotico è il baricentro di tutti i poli, oppure di tutti gli zeri di w che sono a distanza finita, ai quali si attribuiscano masse proporzionali ai rispettivi ordini.

2. *a*) La dimostrazione della formula (4) è assai facile. Il supposto comportamento di w nel punto all'infinito permette di asserire che è possibile tracciare un cerchio γ' che ha il centro nell'origine e non lascia fuori nessun zero di w, oltre a quello nel punto all'infinito. Fuori del più grande dei due cerchi γ e γ' valgono gli sviluppi:

$$w = \frac{c_n}{\zeta^n} + \frac{c_{n+1}}{\zeta^{n+1}} + \cdots,$$

$$w' = -\frac{nc_n}{\zeta^{n+1}} - \frac{(n+1)c_{n+1}}{\zeta^{n+2}} + \cdots,$$

$$\zeta w' = -\frac{nc_n}{\zeta^n} - \frac{(n+1)c_{n+1}}{\zeta^{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{\zeta w'}{w} = -n - \frac{c_{n+1}}{c_n \zeta} + \cdots.$$

(1) Cfr. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, § 107 (Bologna, 1922).

Dall'ultimo di questi sviluppi e dalla seconda delle formule (3) discende la formula (4), purchè λ sia una linea chiusa che circonda una sola volta il più grande dei due cerchi γ e γ'; si deduce infine che la formula (4) vale purchè λ sia una linea chiusa qualunque che contiene tutti i punti singolari di w e tutti i suoi zeri che sono a distanza finita, perchè fra due linee come quelle anzidette non si trovano in nessun caso punti singolari della funzione zw'/w.

b) Supponiamo adesso che i punti singolari di w siano poli, sicchè w è funzione razionale di z. Varrà quindi per w su tutto il piano una espressione del tipo:

$$w = \Omega \frac{(z - \omega_1)^{\gamma_1} \cdots (z - \omega_q)^{\gamma_q}}{(z - z_1)^{\rho_1} \cdots (z - z_p)^{\rho_p}},$$

che mette in evidenza i suoi poli e i suoi zeri a distanza finita, e i loro ordini. Poichè il punto all'infinito è uno zero ennuplo di w sarà:

$$n = \sum r_h - \sum s_k,$$

ed è noto che in questo caso

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{zw'}{w} dz = \sum s_k \omega_k - \sum r_h z_h.$$

In virtù di queste eguaglianze discende dalla (4) la (5).

Meccanica (Idrodinamica). — *Moti piani in presenza di particolari sistemi di vortici-sorgenti.* Nota di A. Masotti, presentata[1] dal Corrisp. U. Cisotti.

1. I sistemi di vortici-sorgenti liberi che si considerano in questa Nota hanno la seguente composizione: in ogni istante n vortici-sorgenti $P_1 \cdots P_n$, che hanno tutti la stessa intensità $C + iQ$, dividono in n parti eguali una circonferenza, nel centro della quale vi è un vortice-sorgente P_0 di intensità $C_0 + iQ_0$[2].

Un siffatto sistema, e il moto che esso provoca in un velo liquido che ricopre l'intero piano, non sono permanenti, in generale. Infatti, nei riguardi della migrazione dei vortici-sorgenti in seno al liquido, si ottiene il seguente risultato: mentre P_0 sta fermo, $P_1 \cdots P_n$ si muovono come se appartenessero ad un vortice-sorgente collocato in P_0, di intensità

$$(1) \qquad (C_0 + iQ_0) + \frac{n-1}{2}(C + iQ);$$

quindi le loro traiettorie sono spirali logaritmiche eguali, che hanno in P_0 il punto asintotico, che tagliano i raggi spiccati da P_0 sotto l'angolo

$$(2) \qquad \operatorname{arctg} \frac{C_0 + \frac{n-1}{2} C}{Q_0 + \frac{n-1}{2} Q},$$

e i vortici-sorgenti le percorrono di moto centrale rispetto a P_0, essendo

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\left(C_0 + \frac{n-1}{2} C\right)$$

la costante delle aree (v. la figura 1, che illustra il caso $n = 5$).

Ma v'è da osservare quanto segue: se nell'istante che si assume come origine dei tempi $P_1 \cdots P_n$ sono sopra una circonferenza di raggio a, all'istante t saranno sopra una circonferenza di raggio

$$(4) \qquad \sqrt{a^2 + \frac{1}{\pi}\left(Q_0 + \frac{n-1}{2} Q\right) t},$$

(1) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(2) Sistemi di vortici che hanno composizione analoga considerò W. Thomson (Lord Kelvin) nella Nota: *Floating Magnets* (*illustrating Vortex-Systems*). (« Nature », vol. XVIII, 1878, pp. 13-14; *Mathematical and Physical Papers*, vol. IV, pp. 135-140).

ed è chiaro che se

$$Q_0 + \frac{n-1}{2} Q > 0$$

il movimento avrà sempre i caratteri descritti, mentre se

$$Q_0 + \frac{n-1}{2} Q < 0$$

il movimento avrà i caratteri descritti fino all'istante

$$(5) \qquad \frac{\pi a^2}{\left| Q_0 + \frac{n-1}{2} Q \right|},$$

nel quale si annulla il raggio della circonferenza che contiene $P_1 \cdots P_n$.

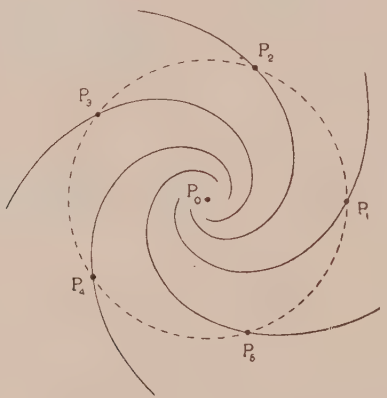


Fig. 1.

Quando $C_0 + iQ_0 = 0$ il sistema è composto solo degli n vortici-sorgenti $P_1 \cdots P_n$, disposti in ogni istante ai vertici di un poligono regolare [1]. Allora i risultati precedenti si semplificano in modo ovvio.

Quando $C_0 + iQ_0 \neq 0$ vi sono alcuni casi particolari che meritano di essere segnalati:

(1) Per i sistemi di vortici che hanno composizione analoga v. W. Thomson, loc. cit.; J. J. Thomson, *A Treatise on the Motion of Vortex-Rings*, §§ 48–54 (London, 1883); W. B. Morton, *On the Motion near Two Straight Parallel Vortices* (« Proceedings of the Royal Irish Academy », sez. A, vol. XLI, 1932, pp. 1-7); *On some Permanent Arrangements of Parallel Vortices and their Points of Relative Rest* (ibidem, vol. XLI, 1933, pp. 94-101); *On the Stability and Oscillations of Certain Permanent Arrangements of Parallel Vortices* (ibidem, vol. XLII, 1934, pp. 7-14); *Vortex Polygons* (ibidem, vol. XLII, 1935, pp. 21-29).

$$(a) \qquad C_0 = -\frac{n-1}{2} C,$$

nel qual caso $P_1 \cdots P_n$ descrivono raggi emananti da P_0 (v. la figura 2, che illustra il caso $n = 5$);

$$(b) \qquad Q_0 = -\frac{n-1}{2} Q,$$

nel qual caso $P_1 \cdots P_n$ descrivono tutti una stessa circonferenza che ha il centro in P_0 (v. la figura 3, che illustra il caso $n = 5$);

$$(c) \qquad C_0 = -\frac{n-1}{2} C \quad , \quad Q_0 = -\frac{n-1}{2} Q$$

nel qual caso anche $P_1 \cdots P_n$ stanno fermi, e si ha un sistema *stazionario* di vortici-sorgenti *liberi*.

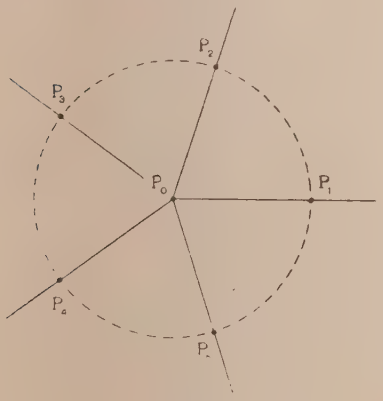


Fig. 2.

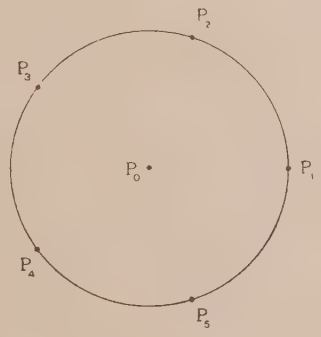


Fig. 3.

2. Consideriamo adunque il moto indotto in un velo liquido che ricopre l'intero piano della variabile complessa z da un vortice-sorgente di intensità $C_0 + iQ_0$, collocato nell'origine P_0, e da n vortici-sorgenti di intensità eguali $C + iQ$, collocati nei punti $P_1 \cdots P_n$ di affisse $z_1 = r\eta_1, \cdots, z_n = r\eta_n$, essendo $\eta_1 \cdots \eta_n$ le radici ennesime dell'unità. Il potenziale cinetico complesso è:

$$(6) \qquad f = \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i} \log z + \frac{C + iQ}{2\pi i} \sum_1^n{}_h \log (z - z_h)$$

$$= \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i} \log z + \frac{C + iQ}{2\pi i} \log (z^n - r^n);$$

quindi la velocità complessa è:

$$(7)\qquad w = \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i}\frac{1}{z} + \frac{C + iQ}{2\pi i}\sum_1^n{}_h \frac{1}{z - z_h}$$
$$= \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i}\frac{1}{z} + \frac{C + iQ}{2\pi i}\frac{nz^{n-1}}{z^n - r^n}.$$

La velocità complessa di un vortice-sorgente si determina in modo noto [1]; quella di P_0 è data dalla formula:

$$(8)\qquad w_0 = \lim_{z\to 0}\left(w - \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i}\frac{1}{z}\right),$$

e si vede che è:

$$(9)\qquad w_0 = 0;$$

quella di $P_k\,(k = 1, \cdots, n)$ è data dalla formula:

$$(10)\qquad w_k = \lim_{z\to z_k}\left(w - \frac{C + iQ}{2\pi i}\frac{1}{z - z_k}\right),$$

e quindi è:

$$(11)\qquad w_k = \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i}\frac{1}{z_k} + \frac{C + iQ}{2\pi i}\sum_1^{n(k)}{}_h \frac{1}{z_k - z_h}$$
$$= \frac{C_0 + iQ_0}{2\pi i}\frac{1}{z_k} + \frac{C + iQ}{2\pi i}\lim_{z\to z_k}\left(\frac{nz^{n-1}}{z^n - r^n} - \frac{1}{z - z_k}\right);$$

ma si constata facilmente che

$$(12)\qquad \sum_1^{n(k)}{}_h \frac{1}{z_k - z_h} = \lim_{z\to z_k}\left(\frac{nz^{n-1}}{z^n - r^n} - \frac{1}{z - z_k}\right) = \frac{n-1}{2}\frac{1}{z_k},$$

e quindi è anche:

$$(13)\qquad w_k = \frac{1}{2\pi i}\left[(C_0 + iQ_0) + \frac{n-1}{2}(C + iQ)\right]\frac{1}{z_k}.$$

Le (9) e (13) contengono i risultati annunciati, relativi alla migrazione in seno al liquido dei vortici-sorgenti.

È poi manifesto che, in quanto $P_1 \cdots P_n$ si muovono come se appartenessero ad un vortice-sorgente collocato in P_0 e di intensità data dalla (1), la loro velocità radiale si esprime immediatamente, come segue:

$$(14)\qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}\left(Q_0 + \frac{n-1}{2}Q\right)\frac{1}{r},$$

e da questa relazione si deduce per r la annunciata espressione (4).

(1) Riabouchinsky, *Aperçus théoriques sur la Mécanique des Fluides*, fasc. I, cap. V (Paris, 1924).

Fisica. — *Lo stato liquido e le forze interatomiche.* Nota I[1] di S. Franchetti, presentata dal Corrisp. L. Rolla.

Le considerazioni svolte in questa Nota mi furono suggerite nel corso di un tentativo di mettere in chiaro il meccanismo della fusione nei cristalli, tentativo che ha formato l'oggetto di alcuni lavori precedenti, e benchè esse non possano pretendere di avere un carattere assolutamente esauriente, ho creduto non del tutto inutile riunirle qui, sia per il fatto che le nozioni che si hanno sulla struttura dello stato liquido non sono ancora molto definite, sia perchè anche per questa via si possono ottenere utili dati sulle forze interatomiche, ancora mal conosciute.

La più appariscente differenza fra gli stati solido e liquido si ha certamente nella circostanza che nel primo le particelle sono legate da forze di tipo quasi elastico a determinate posizioni di equilibrio, mentre questo non avviene per il secondo.

Energeticamente ciò si traduce nel fatto che mentre nel liquido l'energia potenziale delle particelle è tutta energia mutua, nel solido l'energia potenziale si può decomporre in due termini, uno dei quali rappresenta ancora energia mutua, mentre l'altro – preponderante – deve essere interpretato come energia potenziale intrinseca, cioè assume un carattere molto vicino a quello che avrebbe l'energia potenziale di un insieme di oscillatori.

Vogliamo esaminare un po' più da vicino questo comportamento per vedere come si può metterlo in relazione con le forze interatomiche. È preferibile però introdurre una limitazione del problema e un'ipotesi semplificatrice. La limitazione consisterà nel trattare – come nelle Note precedenti – il solo caso di sostanze « monoatomiche », che dànno luogo quindi a reticolati omopolari; l'ipotesi sarà quella solita che le forze fra le particelle si possano trattare come forze centrali conservative.

Allora, se indico con $\varphi(r)$ l'energia potenziale di due particelle che distano di r, vale per l'energia potenziale Φ di un insieme di tali particelle:

$$\Phi = \int \mathrm{E}(r)\,\varphi(r)\,dr \tag{1}$$

con l'integrale esteso a tutto il campo di variabilità della r e dove $\mathrm{E}(r)$ è la ripartizione statistica che dà il numero N_r di coppie di particelle aventi distanza compresa fra r e $r + dr$, definita da

$$\mathrm{N}(r) = \mathrm{E}(r)\,dr\,.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1935.

Com'è intuitivo e come ho già osservato in un'altra Nota, $E(r)$ nel caso che le particelle costituiscano un reticolato, si può pensare composta dalla somma di tante funzioni $E_i(r - r_i)$ aventi ciascuna un massimo per un valore particolare r_i di r, in quanto le distanze fra le particelle non possono essere qualsiansi, ma oscillano – per l'azione termica degli atomi – intorno a determinati valori discreti, tanto più netti quanto più grandi rispetto alla minima distanza possibile, la quale, naturalmente, è dell'ordine del diametro atomico. Dalla sovrapposizione di tutte le E_i si ha una curva che parte da zero per $r = 0$ e presenta una serie di massimi relativi di altezza crescente, ma gradatamente sempre meno ben definiti, fino a prendere un andamento in pratica uniformemente crescente.

Per i liquidi monoatomici vale qualcosa di molto simile, con la differenza che qui, per la maggiore libertà di movimento delle particelle, le singole ripartizioni parziali E_i sono più larghe e quindi si raggiunge più rapidamente il tratto ad andamento uniforme della curva.

Questa affinità di struttura fra liquidi e reticolati, com'è ben noto, è stata oggetto di parecchie ricerche, specialmente da parte di Debye e della sua scuola e quindi non c'è bisogno di insistervi [1]. Si può dire che nel liquido monoatomico ogni piccola regione è una porzione di un reticolato un po' approssimativo, l'isotropia della massa risultando più che altro dalla disposizione statistica di tutti questi piccoli elementi anisotropi.

Introduciamo ora un'ipotesi già più volte adoperata nel corso di queste ricerche e che è solo accettabile nel caso di legami omeopolari, cioè quella dell'assoluta preponderanza delle azioni fra atomi coniugati. Ne viene che, nella formula (1) potremo tener conto invece di tutta la $E(y)$ solo di $E_i(r - r_i)$, indicando con quella delle ripartizioni parziali che ha il massimo per il più basso valore di r_i (che indico con r_1).

Si ha allora da (1):

$$\Phi = \int E_1(r - r_1)\,\varphi(r)\,dr$$

e facendo $r - r_1 = y$:

$$\Phi = \int E_1(y)\,\varphi(r_1 + y)\,dy$$

e sviluppando in serie fino al 2° ordine:

$$\Phi = \int E_1(y)\left[\varphi(r_1) - \varphi'(r_1)\,y + \frac{1}{2}\varphi''(r_1)\,y^2 \pm \dots\right]dr\,.$$

[1] Vedi, p. es., il lavoro di Kirkwood, «Phys. Zeits.», ove già nel quale sono ricordate altre ricerche, per significato e punti di vista, analoghe a quelle qui ricordate.

Ma supponendo, com'è naturale, che $E_1(y)$ sia una funzione pari e diversa da zero solo in un piccolo intervallo:

$$\Phi = \varphi(r_1)\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,dy + \frac{1}{2}\varphi''(r_1)\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,y^2\,dy .$$

Da questa mettendo:

$$\overline{y^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,y^2\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,dy} \tag{2}$$

($\overline{y^2}$ rappresenta perciò lo scarto quadratico medio dal valore più probabile) viene:

$$\Phi = \varphi(r_1)\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,dy + \frac{1}{2}\varphi''(r_1)\,\overline{y^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,dy .$$

Ma si ha evidentemente, se N è il numero totale degli atomi e λ_1 quello degli atomi che ne circondano uno generico alla minima distanza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_1(y)\,dy = \frac{N\lambda_1}{2} .$$

Perciò si ha:

$$\Phi = \frac{N\lambda_1}{2}\varphi(r) + \frac{N\lambda_1}{4}\varphi''(r)\,\overline{y^2} . \tag{3}$$

(Per semplicità è stato messo r al posto di r_1).

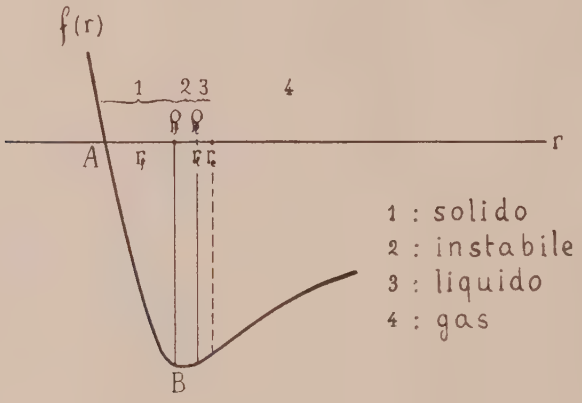
Questa formula vale tanto per lo stato solido che per lo stato liquido, ma si deve ricordare che per uno stesso elemento λ_1 può essere diverso nei due casi. In essa il secondo termine rappresenta l'energia potenziale intrinseca, in quanto dipende dall'esistenza di uno scarto y e si annulla con questo; l'altro termine, indipendente da y, rappresenta l'energia mutua.

Consideriamo ora la curva che rappresenta la $f(r) = -\varphi'(r)$ cioè le forze interatomiche in funzione della distanza. Il tratto che ci interessa (quello in cui prevale l'attrazione) è qualitativamente rappresentato nella figura.

È generalmente ammesso che nei solidi le distanze fra atomi vicini sono tali che il punto rappresentativo della forza si trova nel tratto discendente [1] AB dove si ha $\varphi''(r) > 0$.

(1) Questo tratto è stato disegnato quasi rettilineo, conformemente a un'ipotesi precedentemente posta, della quale si troverà una conferma appunto nel corso di queste considerazioni.

Riportandoci alla (3) vediamo che in queste condizioni esiste – come ci si doveva aspettare – un'energia potenziale intrinseca, ma vediamo inoltre che questa non può mancare fintanto che non si esce dal tratto AB: difatti è in B che $\varphi''(r)$ diminuisce rapidamente e si annulla.



Sembrerebbe perciò doversi concludere – come primi hanno fatto, per mezzo di analoghe ma più sommarie considerazioni, Tarassoff e Raschewsky nel 1927 [1] – che la fusione avviene quando le distanze interatomiche raggiungono un certo valore ρ_f molto vicino all'ascissa del punto di minimo [2].

Questa conclusione però, che fra l'altro avrebbe l'inconveniente di fare della fusione un fenomeno continuo, non è giusta.

Difatti ho mostrato per due vie diverse [3] che il passaggio allo stato liquido deve avvenire quando prende un valore vicino all'ascissa di minimo, non la distanza r fra gli atomi (media nel tempo della distanza all'istante) ma un parametro ρ più grande di r, che si ottiene ponendo:

$$\Phi = \frac{N\lambda_1}{2}\varphi(\rho). \tag{4}$$

(Che sia $\rho > r$ resulta immediatamente dalla (3), tenuto conto che si ha $\varphi'' > 0$).

(1) Tarassoff, «Zs. f. Phys.», *41*, 318, 1927; Raschewsky, «Zs. f. Phys.», *40*, 214, 1927.

(2) La posizione esatta di ρ_f, dipenderà anche dalla pressione esterna, ma oltre che questa dipendenza non può essere che debole, qui e in tutto quello che segue, sarà supposto che la pressione esterna è piccola e costante.

(3) «Rend. R. Ist. Lomb.», *65*, 773, 1932 e *66*, 424, 1933; «Rend. Linc.», ser. 6ª, vol. *19*, 713 e 800, 1934.

Essenzialmente questa differenza è dovuta al fatto che nell'equazione di stato

$$(5) \qquad p = -\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_S - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_S$$

dove L è l'energia cinetica totale e V il volume, bisogna tener conto che in $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_S$ la parte positiva non si riduce al solo termine $\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial V}\right)_S$, indicando con Φ_0 l'energia potenziale mutua. Infatti ho mostrato in precedenza [1] che anche la parte intrinseca dell'energia potenziale varia col volume e si ha precisamente $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial V}\right)_S > 0$. Questo resultato è contrario a quello che si ottiene quando si tratta il moto termico classicamente, cioè lo si decompone in un certo numero di oscillazioni armoniche, perchè in questo caso dovendosi avere eguaglianza fra energia cinetica e potenziale intrinseca, questa in una espansione adiabatica non può che diminuire. Ma se si abbandona lo schema delle oscillazioni armoniche e si considera il moto termico come perfettamente incoerente, ipotesi valevole almeno come caso limite e generalmente ammessa per la parte dello spettro continuo termico più elevata in frequenza, il comportamento ora detto dell'energia potenziale intrinseca discende immediatamente dall'applicazione del teorema del viriale unita ad altre ipotesi non essenziali, come quella della quasi linearità delle forze nel caso dei solidi [2].

Tornando al problema che ci interessa, vediamo dunque che pur restando valida la conclusione che in un liquido monoatomico le distanze fra gli atomi devono essere vicine al valore, che chiamerò r_m dell'ascissa del minimo nella curva delle forze interatomiche, la fusione deve avvenire prima che si sia raggiunta questa distanza, p. es. in un punto r_f.

Troviamo così una spiegazione dell'aumento discontinuo delle distanze interatomiche e quindi del volume, che accompagna, salvo rare eccezioni, il passaggio da solido a liquido. Questo fornisce il mezzo di una verifica sperimentale delle considerazioni svolte fin qui, come sarà mostrato in una Nota successiva.

Accanto a questa discontinuità che accompagna la fusione se ne ha almeno un'altra relativa all'energia; discontinuità che si manifesta con l'esistenza del calore di fusione e la cui spiegazione non può essere così immediata. Supponendo che il calore di fusione vada tutto ad aumentare l'energia potenziale si è condotti a distribuire « qualitativamente » nel modo indicato dalla figura i punti r_f e r_l corrispondenti rispettivamente alle distanze interatomiche nel solido e nel liquido al punto di fusione, e i relativi ρ_f e ρ_l.

(1) « Rend. R. Ist. Lomb. », *66*, 731, 1933.
(2) Per i dettagli del calcolo v. la Nota ora citata.

Per completare il diagramma possiamo valutare anche in che regione deve cadere (la posizione precisa dipendendo dalle condizioni date) la distanza interatomica r_e nel caso del liquido al punto di ebollizione. Il passaggio allo stato gassoso sarà caratterizzato analogamente a quello che avviene per il passaggio solido–liquido, dall'impossibilità di risolvere l'equazione di stato (5) dove compaiono per $\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_S$ e $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_S$ le espressioni caratteristiche che questi termini assumono nello stato liquido. Siccome $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_S$ dipende dall'andamento della curva $f(r)$, è una supposizione ragionevole che le condizioni ora dette siano verificate quando r esce dal tratto « orizzontale » per portarsi sul tratto rapidamente saliente.

Questa supposizione, che conto di verificare dettagliatamente in seguito, conduce a collocare r_e nel modo indicato sulla figura.

Abbiamo così tre regioni delle distanze interatomiche (o meglio del parametro ρ) caratteristiche dei tre stati e questo schema rende bene conto del carattere di transizione, con relativamente piccolo dominio di esistenza, dello stato liquido.

Le conclusioni che si possono trarre da queste semplici considerazioni relativamente alla curva $f(r)$ saranno esposte in una Nota successiva.

Chimica. — *Spettro Raman e costituzione del pirazolo e di alcuni suoi derivati* [1]. Nota [2] di G. B. Bonino e R. Manzoni-Ansidei, presentata dal Socio M. Betti.

Già nel 1933 [3] avevamo comunicato di avere in corso ricerche sullo spettro Raman del pirazolo e derivati. Speciali difficoltà tecniche hanno ritardato queste esperienze e solo oggi possiamo riferire brevemente su una parte di esse.

In questa Nota riporteremo gli spettri dei seguenti derivati: pirazolo, 3–5–dimetilpirazolo, 1–3–5–trimetilpirazolo, 1–3–4–5–tetrametilpirazolo, pirazolina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università, Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1935.

(3) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, P. Pratesi, « Z. phys. Chem. », B. 22, 21 (1933).

TABELLA I. — *Spettri Raman dei pirazoli studiati; frequenze in* cm^{-1}.

Pirazolo	3-5-dimetil-pirazolo	1-3-5-trimetil-pirazolo	1-3-4-5-tetrametil-pirazolo	Pirazolina	*Note*
—	—	—	—	3327 (2 dif.)	N — H
3149 (2)	—	—	—	—	CH aromatico
3062 (1/2)	3081 (1/2)	3053 (1)	—	3067 (3 dif.)	
—	2995 (1/2)	2990 (1/2)	2950 (1)	2974 (3 dif.)	CH_2, CH_3
—	2933 (5 dif.)	2929 (3 dif.)	2922 (3 dif.)	2905 (1 dif.)	
—	—	2830 (1)	2865 (2)	2847 (2 dif.)	
—	—	1549 (1)	1574 (1)	1589 (2)	C = C
—	1475 (3 dif.)	1458 (3 dif.)	1468 (4 dif.)	1467 (1)	CH_2, CH_3
—	—	1427 (1 dif.)	1417 (2 dif.)	1434 (2)	
1395 (2)	1418 (4)	—	—	—	→ ωβ [β ⟷ β′]
1354 (3)	1377 (1)	1374 (2)	1380 (5 dif.)	—	→
1259 (4)	1304 (1/2)	1285 (1)	1300 (1)	12,2 (3)	→
—	—	—	1215 (1/2)	1198 (1/2)	
1149 (6)	1155 (1 dif.)	1148 (1)	1151 (1/2)	1158 (1/2 dif.)	→ [α ⟷ α′]
1041 (1)	1038 (1)	1014 (2)	1030 (1/2)	1032 (1)	→
969 (1/2)	969 (1/2)	970 (1)	996 (1/2)	939 (4)	→
916 (1)	—	—	—	869 (1/2)	
—	—	—	—	837 (1/2)	
—	—	791 (1/2)	—	—	
—	—	—	—	758 (0)	
—	738 (1)	721 (1)	717 (4)	—	→
—	—	646 (2)	—	657 (1/2)	
—	—	627 (1)	614 (5 dif.)	—	
568 (1)	590 (3)	587 (4)	567 (2)	—	→
499 (1/2)	—	484 (1)	—	496 (1)	
—	344 (1 1/2)	339 (1)	337 (1 1/2)	—	→
—	—	296 (1/2)	295 (1)	—	
—	—	206 (1)	254 (1)	—	
—	—	165 (0)	—	—	
—	—	147 (0)	—	—	

oscillazioni « nucleari » del pirazolo

Pirazolo. – Preparato secondo il metodo di Knorr e Hauberisser [1] distillando a secco l'acido 3 , 5–pirazoldicarbonico, il prodotto fu poi purificato per successive distillazioni a pressione ridotta. P. F. 69–70°, P. E. 186–188° a 760 mm. Lo spettro Raman fu eseguito su soluzioni sature in diversi solventi ($CHCl_3$, CH_3OH , $(CH_3)_2CO$).

3 , 5–dimetilpirazolo. – Preparato secondo Knorr e Rosengarten [2] per condensazione dell'acetilacetone e idrato di idrazina. Il prodotto fu purificato per distillazione frazionata a pressione ridotta. P. F. 107°, P. E. 214–216 a 760 mm. Lo spettro Raman fu eseguito su soluzioni in $CHCl_3$, CH_3OH.

1 , 3 , 5–trimetilpirazolo. – Preparato secondo Knorr [3] trattando in tubo chiuso con JCH_3 il 3 , 5–dimetilpirazolo per nove ore a 120°. L'jodometilato così ottenuto è distillato in presenza di HCl che fissa il cloridrato della base, 1 , 3 , 5–trimetilpirazolo. La base è liberata con soda poi estratta con etere e seccata su K_2CO_3 ed infine purificata per distillazione frazionata a pressione ridotta. P. F. 37°, P. E. 175° a 760 mm. Lo spettro Raman fu eseguito sulla sostanza allo stato fuso in un microtubo chiuso nel vuoto.

1 , 3 , 4 , 5–tetrametilpirazolo. – Preparato secondo Knorr [4] trattando a 250° in tubo chiuso lo jodometilato dell' 1 , 3 , 5–trimetilpirazolo. Dal prodotto di reazione viene estratta la base con HCl indi spostata con soda ed infine purificata per distillazione frazionata a pressione ridotta. P. F. 30°, P. E. 192–193° a 760 mm. Lo spettro Raman fu eseguito sulla sostanza allo stato fuso in microtubo chiuso nel vuoto.

Pirazolina. – Di provenienza Fraenckel e Landau. Purificata per distillazione frazionata a pressione ridotta. P. E. 144° a 760 mm. 30° a 5–10 mm. Lo spettro Raman fu eseguito sulla sostanza pura in microtubo chiuso nel vuoto.

Discussione dei risultati.

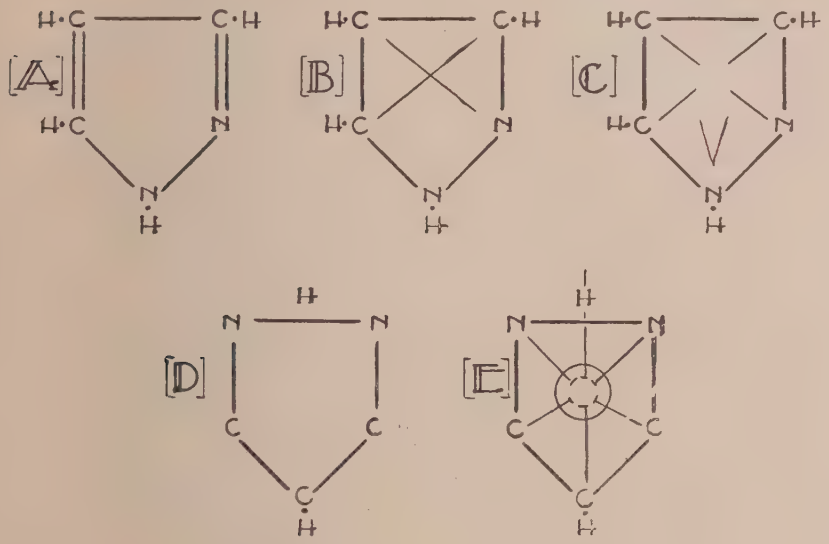
In una recente lettera all'Editore [5] abbiamo riferito brevemente nella « Ricerca Scientifica » sullo spettro Raman del pirazolo.

Questo consta essenzialmente di 11 righe al pari dello spettro del tiofene e del pirrolo. Di esse due (la 3149 e la 3162 cm^{-1}) sono riferibili alle oscillazioni dei gruppi C — H a tipo « aromatico » [6] identicamente a quanto già è stato visto per il pirrolo e per il tiofene.

Restano perciò 9 righe riferibili al nucleo pirazolico. Di queste righe circa la metà sono più intense mentre le altre sono deboli. Ciò starebbe

(1) Knorr, Hauberisser, Diss. Jena (1895); Vanino, « Hdb. präp. Chem. », II, 719.
(2) Knorr, Rosengarten, Diss. Jena (1892); Vanino, « Hdb. präp. Chem. », II, 720.
(3) Knorr, « Ber. », *28*, 715 (1895).
(4) Knorr, « Ber. », *28*, 717 (1895).
(5) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, « Ricerca Scient. », VI, *2*, 112 (1935).
(6) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, P. Pratesi, « Z. phys. Chem. », B. *22*, 29 (1933); B. *25*, 331, 311 (1934).

in accordo, seguendo la nota teoria di Cabannes [1] nell'assegnare alla molecola del pirazolo una simmetria costituita almeno da un piano perpendicolare al piano dell'anello pirazolico e tagliante in due parti simmetriche la molecola. A questa esigenza però non corrisponde l'ordinaria formula con la quale si indica la costituzione nucleare del pirazolo e cioè la « vecchia » formula di Knorr e Balbiano [A] [2]. Ma neppure le così dette formule centriche di Buchner [B] [3] e di Bamberger [C] [4] corrispondono (come facilmente si intuisce) alla simmetria indicata dallo spettro Raman.



Si sa pure che tutte queste formule (alle quali si attengono ancora oggi molte pubblicazioni di chimica organica) non corrispondono nemmeno alla fenomenologia chimica dato che, per esempio, non prevedono l'identità del 3–metilpirazolo col 5–metilpirazolo. Corrisponderebbero invece alla richiesta simmetria la formula « nuova » di Knorr [D] [5] e quella esacentrica di Claus [E] [6].

Un fatto degno di nota sta nella assoluta mancanza di righe del « doppio legame » nello spettro Raman del pirazolo. La riga nucleare a frequenza più alta per questo composto è la riga a 1395 cm^{-1} mentre le righe caratte-

(1) Cabannes, « Ann. Physique », *18*, 312 (1932).
(2) Knorr, « Lieb. Ann. », *279*, 189 (1894).
(3) Buchner, « Lieb. Ann. », *273*, 219 (1893).
(4) Bamberger, « Ber. », *24*, 1761 (1891).
(5) Knorr, « Lieb. Ann. », *279*, 193 (1894).
(6) Claus, « T. für prakt. Chem. », *51*, 343 (1895).

ristiche del « doppio legame » si trovano nella zona superiore a 1550 cm^{-1}. Come risulta da nostre precedenti ricerche [1] anche gli spettri del pirrolo tiofene e furano (non sostituiti) non mostrano riga del « doppio legame ».

Confrontando lo spettro Raman del pirazolo con quello del pirrolo e del tiofene si nota una certa corrispondenza tra alcune righe dei due spettri: frattanto la quasi coincidenza delle due righe dei C — H; inoltre le due righe « nucleari » a 1460 e 1380 cm^{-1} nel pirrolo e a 1404 e 1356 cm^{-1} nel tiofene si riscontrano nel pirazolo rispettivamente a 1395 e 1354 cm^{-1}. La 1460 cm^{-1} del pirrolo e quella a 1404 cm^{-1} del tiofene si è attribuita all'oscillazione simmetrica dei C in β nel piano dell'anello e in direzione perpendicolare al piano di simmetria. Per il pirazolo tale oscillazione β — β dovrebbe corrispondere per la simmetria sopra discussa all'analoga oscillazione simmetrica dei due atomi di azoto nel piano dell'anello perpendicolarmente al piano di simmetria. Tale oscillazione β — β ha nel pirazolo una frequenza assai inferiore che nel caso del pirrolo. Si potrebbe spiegare tale abbassamento con il maggior valore delle masse oscillanti (C — C nel caso del pirrolo, N — N nel caso del pirazolo) e si giunge invero per tale via con un semplice calcolo partendo dalla posizione della riga 1450 cm^{-1} del pirrolo ad un valore vicino a quello trovato per il pirazolo. Ciò dimostrerebbe che le forze di richiamo agenti tra i due atomi di carbonio nel pirrolo e quelle agenti tra i due atomi di azoto nel pirazolo perpendicolarmente al piano di simmetria della molecola hanno valori abbastanza prossimi.

Ritroviamo come nel pirrolo anche nel pirazolo la intensa riga a 1140 cm^{-1} circa, riga che si era fatta corrispondere nel caso del pirrolo ad una oscillazione simmetrica dei CH in $\alpha - \alpha'$ perpendicolarmente al piano di simmetria. Come nel caso del pirrolo tale corrispondenza appoggerebbe l'ipotesi che i CH in 3- e 5- nel pirazolo occupino posizioni nettamente simmetriche e siano impegnati soltanto con due legami semplici periferici con esclusione perciò di doppi legami periferici o di legami centrici.

Nei pirazoli metilati si osserva:

a) l'apparire di due righe a 2900–3000 cm^{-1} circa e di altre attorno a 1450 cm^{-1} circa, tutte corrispondenti alle oscillazioni interne dei gruppi metilici [2];

b) la scomparsa di una delle righe dei C — H « aromatici » nell'1, 3, 5–trimetilpirazolo e di ambedue nell'1, 3, 4, 5–tetrametilpirazolo in conseguenza della successiva sostituzione degli atomi di idrogeno con i gruppi CH_3;

c) una variazione nella posizione e probabilmente nell'origine di alcune righe nucleari.

(1) G. B. Bonino e collab., « Z. phys. Chem. », B. *22*, 21 (1933); B. *25*, 348 (1934).
(2) K. W. F. Kohlrausch, *Der Smekal-Raman-Effekt*, p. 207.

Nel 3 , 5–dimetilpirazolo la riga a 1475 cm^{-1} è da attribuirsi ai CH_3 , le tre righe nucleari del pirazolo a 1259, 1354, 1395 cm^{-1} vengono spostate rispettivamente a 1304, 1377, 1419 cm^{-1}.

Nell' 1 , 3 , 5–trimetilpirazolo e nell' 1 , 3 , 4 , 5–tetrametilpirazolo si hanno variazioni più profonde. Tra 1400–1500 cm^{-1} si osservano due righe: una a 1450–1460 cm^{-1} che certamente è riferibile ai gruppi CH_3 sostituiti ai carboni del nucleo pirazolico. Un'altra riga più bassa (1417–1427 cm^{-1}) verrebbe da noi attribuita al CH_3 legato all'azoto piuttosto che ad uno spostamento della riga nucleare $\beta - \beta'$. Invero è noto che [1] nell' N–metilpirrolo il gruppo metilico all'azoto è appunto caratterizzato da una riga nello spettro Raman di posizione più bassa (1415 cm^{-1}) di quella riferibile ai gruppi metilici sostituiti al C nel nucleo pirrolico stesso 1460–1470 cm^{-1}).

Mentre scompare (o se si vuole si attenua fortemente) la riga $\beta - \beta'$ negli spettri dei due pirazoli tri e tetrametilati appare negli stessi nettissima una riga caratteristica del doppio legame a 1549 cm^{-1} nell' 1 , 3 , 5–trimetilpirazolo e a 1574 cm^{-1} nell' 1 , 3 , 4 , 5–tetrametilpirazolo. Questa riga si ritrova poi anche più intensa a 1589 cm^{-1} nella pirazolina in accordo con la formula di struttura che viene assegnata normalmente a quest'ultima sostanza.

La comparsa della riga del « doppio legame » negli spettri Raman dell' 1 , 3 , 5–trimetil e dell' 1 , 3 , 4 , 5–tetrametilpirazolo è parallela con il riscontro di una netta basicità mostrata dagli stessi composti. Per questi pirazoli sostituiti gli spettri Raman porterebbero ad ammettere perciò una struttura nucleare diversa da quella del pirazolo libero. Detti spettri starebbero cioè in accordo con una struttura sul tipo della vecchia formula di Knorr con due « doppi legami » [A]. Riconfermiamo così anche nel caso del pirazolo il fatto fondamentale già da noi trovato per la serie del pirrolo, tiofene, furano e che cioè la sostituzione di gruppi alchilici agli idrogeni dei C — H nucleari porta alla comparsa nello spettro Raman della riga del « doppio legame » assente invece negli spettri dei composti non sostituiti. Anche nel caso dei derivati del pirazolo l'apparire di una riga del « doppio legame » nello spettro Raman segna un aumento della basicità.

Alla costituzione dell'anello pirazolico si potrebbero estendere così alcune delle considerazioni già svolte a proposito del pirrolo [2], ma ad una tale discussione teorica verremo dopo aver raccolto altro materiale sperimentale in proposito.

(1) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, P. Pratesi, « Z. phys. Chem. », B. *25*, 384 (1934).

(2) G. B. Bonino, R. Manzoni–Ansidei, P. Pratesi, B. *22*, 21 (1933).

Chimica. — *Sullo spettro Raman del dimetilfurazano e del dimetiloxobiazolo* [1]. Nota [2] di R. Manzoni-Ansidei, presentata dal Socio M. Betti.

I risultati delle ricerche che da alcuni anni si vanno compiendo in questo Istituto sullo spettro Raman di composti organici eterociclici hanno acuito in me l'interesse per un recente lavoro di Milone e Müller [3] sullo spettro Raman di alcuni furazani e oxobiazoli sostituiti. Limitando per ora l'attenzione al dimetilfurazano e al dimetiloxobiazolo non deve sfuggire il fatto, di grande interesse, scoperto dal Milone e che cioè mentre nello spettro del dimetiloxobiazolo si ha una netta riga del « doppio legame » conformemente alla ordinaria formula di struttura di questo composto, in quello del dimetilfurazano manca del tutto una tale riga.

Però questa interessante osservazione sperimentale richiederebbe una conferma nel senso di stabilire nettamente se nello spettro del dimetilfurazano la riga del « doppio legame » manca per ragioni strutturistiche della molecola ovvero per il fatto che lo spettro di questo composto è incompleto. Invero la notevole pratica acquistata nell'esecuzione di spettri Raman in questi ultimi anni mi faceva di per sè prevedere le difficoltà tecniche che si oppongono all'ottenimento di buoni spettri Raman per molti composti eterociclici. Di queste difficoltà mi ero dovuto rendere conto per es. nello studio dello spettro Raman dei pirroli e più ancora del pirazolo e derivati eseguiti in collaborazione col prof. Bonino.

Vi sono poi anche delle ragioni teoriche atte a far supporre che gli spettri pubblicati dai citati autori per il dimetilfurazano e il dimetiloxobiazolo non siano completi.

Comunque si vogliano sistemare i « doppi legami » delle due molecole dei detti composti resta però il fatto fondamentale che la loro simmetria si riduce ad un asse binario o, più prudenzialmente, ad un piano di simmetria perpendicolare al piano dell'anello e passante in ambedue i composti per l'atomo di ossigeno. A molecole di questa simmetria la teoria di Cabannes [4] assegna un certo numero di oscillazioni simmetriche (S) ed antisimmetriche (A) date dalle relazioni:

$$S = 3m + h - 2$$

$$A = 3m + 2h - 4$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1935.
(3) Milone e Müller, « Gazz. Chim. It. », *63*, 334 (1933).
(4) Cabannes, « Ann. Phisyque », *18*, 312 (1932).

dove $2m$ è il numero totale delle masse simmetriche non « tagliate » dal dal piano di simmetria e h è il numero delle masse « tagliate » dal piano stesso. È facile vedere che sia nel caso del dimetilfurazano sia in quello del dimetiloxobiazolo (astraendo dagli idrogeni legati che possono essere considerati a parte data la forte differenza di massa) per gli « scheletri » delle rispettive molecole:

si ha $m = 3$; $h = 1$, per cui:

$$S = 9 + 1 - 2 = 8$$
$$A = 9 + 2 - 4 = 7$$
$$\text{Totale} \quad 15$$

Si devono avere cioè 15 oscillazioni di cui 8 simmetriche e 7 antisimmetriche che sono tutte attive in effetto Raman [1].

Come già Milone e Müller [2] rilevano in un ulteriore lavoro, negli spettri dagli stessi pubblicati non si raggiunge il numero di righe previsto dalla teoria di Cabannes. Infatti si hanno negli spettri di Milone e Müller (oltre alle righe da attribuirsi ai CH_3) solo 5 righe per il dimetiloxobiazolo e 6 righe per il dimetilfurazano invece delle 15 righe previste teoricamente, cioè questi spettri rilevano solo circa un terzo delle righe nucleari prevedibili per i composti studiati.

Ho perciò creduto utile ripetere gli spettri Raman del dimetiloxobiazolo e del dimetilfurazano utilizzando le tecniche che già con successo mi hanno permesso di ottenere buoni spettri Raman nel caso dei pirroli, dei pirazoli, e degli indoli [3] nelle ricerche eseguite in collaborazione col prof. Bonino.

Parte sperimentale.

Dimetilfurazano. — Fu preparato secondo il metodo di Wolf [4] facendo reagire dimetilgliossima e ammoniaca in autoclave di ferro a 170°–175° per 8 ore. Il prodotto, dopo acidificazione con HCl, venne distillato in corrente di vapore, indi, separato dall'acqua e seccato, fu purificato per distillazione a pressione ridotta, p. e. 157° a 750 mm. 66° a 12 mm.

(1) Ved., per es., Manneback, *Calcul et identification des vibrations des molecules*. Conférence, Liegi, 1934 p. 31.

(2) Milone e Müller, « Gazz. Chim. It. », *65*, 246 (1935).

(3) G. B. Bonino e collaboratori, « Z. f. Phys. Chem. », (B) *22*, 21 (1933); (B), *25*, 327, 348 (1934); « Ricerca scientifica », IV, *1*, n. 11 (1935).

(4) Wolf, « Ber. », *28*, 70 (1895).

Dimetiloxobiazolo. — Fu preparato secondo il metodo di Stollè [1] riscaldando a 300° la tetraacetilidrazina (p. f. 85°). Fu purificato per distillazione a pressione ridotta p. e. 179°–180° a 750 mm., p. e. 60° a 12 mm.

Come frequenza eccitatrice ho usato la 435.8(e) del Hg.

TABELLA.

Dimetilfurazano		Dimetiloxobiazolo	
Milone e Müller	Manzoni	Milone e Müller	Manzoni
3217 (1)	—	3349 (1)	—
3070 (1)	—	3082 (1)	—
—	3010 (2)	—	3017 (2)
—	2969 (2)	—	2986 (2)
2938 (2)	2937 (6)	2957 (2)	—
—	—	—	2938 (2)
—	1490 (5)	1579 (3)	1597 (5)
1461 (3)	1458 (2 dif)	—	1576 (1/2)
1396 (3)	1404 (1/2)	1438 (3)	1439 (2 dif)
—	1370 (3)	—	1386 (1 1/2 dif)
1308 (2)	—	1108 (2)	1106 (1/2)
—	1165 (1/2)	1043 (1)	1056 (3)
—	1040 (1)	—	967 (1)
964 (1)	962 (0)	923 (1)	939 (1/2)
—	949 (2)	—	730 (1 1/2)
—	885 (3)	—	666 (1)
—	862 (1/2)	613 (1)	621 (4)
709 (2)	707 (7)	—	566 (0)
649 (1)	647 (0)	—	496 (0)
—	630 (3)	—	327 (1)
—	609 (1 1/2)	—	274 (1 1/2)
—	572 (1)	—	—
—	499 (0)	—	—
289 (1)	3 5 (1 1/2)	—	—
—	248 (1)	—	—

(1) STOLLÉ, « J. pr. Chem. », [2] *69*, 17 (1904).

Discussione dei risultati.

Un rapido esame degli spettri da me ottenuti mostra:

a) che con la tecnica usata si riesce ad ottenere nello spettro Raman del dimetilfurazano complessivamente ben 21 righe e 18 righe in quello del dimetiloxobiazolo mentre gli spettri pubblicati dai precedenti Autori ne registrano rispettivamente 10 e 9;

b) se si tralasciano le righe a frequenza superiore a 2000 cm^{-1} e la riga a 1439 cm^{-1} nel dimetilxobiazolo e la 1458 cm^{-1} nel dimetilfurazano (righe che sono riferibili alle oscillazioni interne dei gruppi metilici) si possono conteggiare le righe Raman dovute agli « scheletri » molecolari per paragonarne il numero con quello previsto teoricamente. Così restano per il dimetiloxobiazolo 14 righe Raman in contrapposto alle corrispondenti 5 trovate dai precedenti autori. Si raggiunge cioè nei miei spettri la quasi totalità delle 15 righe previste dalla teoria.

Per il dimetilfurazano il doppietto 962-949 cm^{-1} e quello 885-862 cm^{-1} dovrebbe interpretarsi come dovuto ad un « effetto Fermi » (effetto studiato la prima volta dal Fermi per lo spettro Raman del CO_2 [1]) riferibile cioè alla degenerazione accidentale dovuta al fatto che ciascuna delle somme delle frequenze di due righe Raman trovate nello spettro del dimetilfurazano (e cioè $707 + 248 = 955$; $630 + 248 = 878$) quasi coincide rispettivamente con un'altra frequenza intermedia alle due dei doppietti osservati. Quindi i due doppietti non vanno interpretati con due frequenze distinte ciascuno ma con una sola. Resterebbero così per il dimetilfurazano (a parte le sopracitate righe dovute ai CH_3) 15 frequenze distinte (invece delle 6 trovate dai precedenti autori) quante cioè ne prevede la teoria. Di queste se ne riscontrano 8 più intense che dovrebbero verosimilmente coincidere con le 8 oscillazioni simmetriche previste dalla teoria stessa;

c) Come corrispondenza tra le righe trovate dai precedenti autori e quelle descritte in questa nota si può osservare qualche incongruenza specialmente per le righe relative ai C–H sopra i 2000 cm^{-1};

d) Anche dagli spettri studiati in questo lavoro (e che per le ragioni sopraesposte sono da ritenere assai più completi di quelli precedentemente conosciuti) viene confermato il fatto assai interessante scoperto da Milone e da Müller e che cioè nello spettro del dimetiloxobiazolo compare una netta ed intensa riga del doppio legame come la ordinaria formula chimica lascia prevedere mentre lo spettro del dimetilfurazano non mostra affatto una tale riga e così resta difficile l'interpretazione di quest'ultimo spettro sulla base della ordinaria formula di struttura che la chimica organica classica attribuisce a questo composto. Per questa interpretazione possono riuscire perciò interessanti le considerazioni teoriche tratteggiate da Milone e Müller [2] in un recente lavoro.

(1) Fermi, « Mem. R. Acc. d'Italia », vol. III (1932).

(2) Milone e Müller, « Gazz. Chim. Ital. », *65*, 246 (1935).

Chimica. — *Spettro Raman di alcune aldeidi pirroliche sostituite.* Nota [1] di G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, D. Dinelli, presentata dal Socio M. Betti.

In un precedente lavoro [2] dallo studio dello spettro Raman di un gruppo di aldeidi e chetoni pirrolici si giungeva a concludere favorevolmente sulla presenza di un gruppo aldeidico nelle aldeidi pirroliche, mostrando che le singolari proprietà di questi composti che avvalorano per gli stessi l'ipotesi di una formula ossimetilenica [3] dovevano ricercarsi in una profonda perturbazione (sotto il punto di vista elettronico e quantico) del gruppo carbonilico. Non si emettevano ipotesi intorno a questa perturbazione, ma si deduceva essere assai verosimile una partecipazione del nucleo pirrolico ed in particolar modo dell'atomo di azoto alla perturbazione stessa. Successive ricerche [4] elettrochimiche sul potenziale di riduzione delle aldeidi pirroliche hanno confermato un tale punto di vista fornendo nuovo materiale sperimentale per una ulteriore discussione teorica sulla struttura delle suddette aldeidi.

Sempre allo scopo di possedere una maggior copia di dati sperimentali in proposito abbiamo estese le ricerche studiando lo spettro Raman di alcune nuove aldeidi pirroliche e precisamente di aldeidi pirroliche alchilate al carbonio.

I composti studiati in questa Nota sono:

2 , 4-dimetil-5-formilpirrolo prep. sec. Fischer e Zerweck [5], cristallizz. dall'acqua P. F. 90°;

2 , 3 , 4-trimetil-5-formilpirrolo prep. sec. Fischer e Walach [6], cristallizz. dall'acqua P. F. 147°;

2 , 4-dimetil-3-etil-5-formilpirrolo (aldeide del criptopirrolo). Vedi per questa aldeide Fischer e Schubert [7] e Fischer, Halbig e Walach [8], cristallizz. dall'acqua P. F. 105-106°;

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1935.

(2) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, P. Pratesi, «Z. physik. Chem.», *25* B. 355 (1934).

(3) Angeli, «Rend. Acc. Lincei», [5], *17*, II, 360 (1908); Alessandri, «Rend. Acc. Lincei», [5] *23*, II, 93 (1914).

(4) G. B. Bonino, G. Scaramelli, «Ricerca scientifica», *2*, 111 (1935).

(5) H. Fischer e Zerweck, «Ber.», *55*, 1949 (1922); *56*, 523 (1923).

(6) H. Fischer e Walach, A. 450, 115 (1926).

(7) Fischer e Schubert, «Ber.», *56*, 1209 (1923); «Ber», *57*, 612 (1924) e Fischer, Halbig e Walach, A. 452, 293 (1927).

(8) Fischer, Halbig e Walach, A. 452, 293 (1927).

TABELLA.

Spettri Raman delle aldeidi pirroliche; frequenze in cm^{-1}.

Aldeide α-pirrolica (*)	2,4-Dimetil-5-Formil-pirrolo	2,3,4-Trimetil-5-Formil-pirrolo	2,4-Dimetil-3-Etil-5-Formil-pirrolo	2-Metil-4,5-Dietil-5-Formil-pirrolo	*Note*
3126 (1)	—	—	—	—	C–H
—	2927 (1 dif.)	2920 (1)	2988 (1 dif.)	2942 (1)	CH_2, CH_3
—	—	2874 (1)	2821 (1/2)	2840 (2 dif.)	
1645 (5 dif.)	1630 (4 dif.)	1622 (3 dif.)	1621 (3 dif.)	1622 (4 dif.)	C=O
—	1567 (3 dif.)	1566 (2 dif.)	1561 (2 dif.)	1566 (3)	C=C pirrolico
—	1501 (0)	1498 (0)	1493 (0)	—	ωβ ?
—	—	1450 (2)	1439 (2)	1446 (2 dif.)	CH_2
1400 (3)	1385 (1)	1389 (2)	1393 (1)	1391 (1)	pirrolo
1350 (5)	1360 (2)	1368 (1/2)	1375 (0)	1373 (1/2)	
—	1336 (4)	1333 (5)	1337 (4)	1344 (5 dif.)	
—	1194 (1/2)	1182 (1/2)	1186 (1/2)	1197 (0)	
—	1161 (1/2)	—	—	—	
—	1136 (1 1/2)	1130 (1)	1127 (1 1/2)	1137 (1/2)	
1087 (4)	—	—	1103 (0)	—	
—	998 (1/2)	—	—	—	
954 (2 1/2)	975 (1 1/2)	947 (1)	970 (1 1/2)	967 (1)	
869 (1 1/2)	849 (1)	—	871 (1)	—	
—	780 (0)	—	—	—	
—	655 (1/2)	—	—	—	
—	616 (0)	—	—	—	
—	586 (1)	—	—	—	
—	569 (1/2)	—	—	—	
—	543 (2)	539 (1/2)	542 (1/2)	543 (1)	
502 (2 dif.)	489 (1/2)	487 (1/2)	499 (1)	—	
—	377 (1)	—	—	—	
—	263 (1/2)	—	—	—	

(*) G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, P. PRATESI, «Z. physik. Chem.», *25* B. 356 (1934).

2–metil–3 , 4-dietil-5-formilpirrolo prep. sec. Fischer e Baumler [1], cristallizz. dall'acqua P. F. 74°.

Queste aldeidi vennero preparate nell'Istituto di chimica organica del Politecnico di Monaco di Baviera con la collaborazione di uno di noi (Dinelli) e ci vennero gentilmente concesse dall'illustre prof. Geh. Hans Fischer che teniamo qui a ringraziare vivamente.

Gli spettri vennero ottenuti col dispositivo sperimentale usato in altre ricerche [2].

Le aldeidi sottodescritte vennero esaminate in soluzione in metanolo. Data la grande luminosità richiesta per ottenere spettri al più possibile completi si è dovuto operare a bassa dispersione. Per questa ragione e per il fatto della larghezza e diffusione di alcune delle righe osservate ci si è limitati a leggere gli spettrogrammi interpolando con la formula di Hartmann calcolata su tre righe dello spettro visibile del mercurio.

Discussione dei risultati.

a) Notiamo frattanto che le aldeidi pirroliche studiate mostrano tutte una riga Raman intensa e diffusa nella zona 1620–1650 cm^{-1}. Queste righe in analogia a quanto già è stato pubblicato è riferibile al gruppo C = O fortemente perturbato. È da notare che la riga Raman del C = O ordinario nell'aldeide benzoica cade a 1700 cm^{-1} circa. Nella pirrolaldeide non sostituita la detta riga si riscontra a 1645 cm^{-1}. Nelle aldeidi–pirroliche alchilate al carbonio la troviamo spostata ancora verso le minori frequenze.

	$\Delta\nu$ in cm^{-1} del C = O
Aldeide benzoica	1700
Aldeide pirrolica	1645
2 , 4-dimetil–5–formilpirrolo	1630
2 , 3 , 4–trimetil–5–formilpirrolo . .	1622
2 , 4–dimetil–3–etil–5–formilpirrolo .	1621
2–metil-3 , 4-dietil-5–formilpirrolo . .	1622

In un prossimo lavoro [3] si mostrerà come pure il potenziale elettrochimico di riduzione delle stesse aldeidi presenti un analogo andamento passando dall'aldeide pirrolica non sostituita alle aldeidi alchilate al carbonio.

(1) Fischer e Baumler, A. 468, 80 (1929).

(2) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, « Z. physik. Chem. », *25* B. 328 (1934).

(3) Ved. G. B. Bonino e G. Scaramelli, « La Ricerca scientifica », anno VI, vol. II, nn. 5-6 (1935).

b) Lo studio di un numero maggiore di aldeidi pirroliche alchilate al carbonio ha permesso di chiarire un punto rimasto in sospeso nel precedente lavoro sullo stesso argomento. Lo spettro del 2,4–dimetil–5–formilpirrolo eccitato con la riga a 435,8 μμ (*e*) del mercurio mostra una riga a 21371 cm^{-1}. Nell'aldeide pirrolica non sostituita manca del tutto una analoga riga. Ricerche diligenti ci hanno permesso (mettendoci nelle condizioni di eliminare il più possibile ogni fluorescenza) di ottenere una riga corrispondente (per le aldeidi alchilate) anche per eccitazioni con la riga 404,7 μμ (*k*) del mercurio.

In tali condizioni si è potuto stabilire che la riga a circa 21370 cm^{-1} che compare in tutte le aldeidi pirroliche sostituite e non nella pirrolaldeide libera è da classificarsi negli spettri eccitati con la 435,8 (*e*) del mercurio come una *e*–1565 circa anzichè come una *f*–1622 circa.

Se ne può dunque concludere che le aldeidi pirroliche alchilate nella zona 1500–1700 cm^{-1} dello spettro Raman oltre alla riga a 1620–1640 cm^{-1} attribuita al gruppo C = O perturbato presentano anche una riga a 1560–1570 cm^{-1} che manca nello spettro Raman dell'α–pirrolaldeide ordinaria. Questa riga, che corrisponde verosimilmente ad un « doppio legame » potrebbe interpretarsi:

1) Come dovuta ad un altro tipo di C = O più fortemente perturbato, ipotesi poco attendibile nel caso delle aldeidi pirroliche e sulla quale non crediamo insistere.

2) Con una riga di un doppio legame C = C dovuto alla presenza di una forma ossimetilenica accanto ad una forma carbonilica (caratterizzata quest'ultima dalla riga 1620–1630 cm^{-1}). Tale ipotesi potrebbe trovare un appoggio nell'opinione espressa da qualche autore che nelle aldeidi pirroliche si abbia a che fare con un « equilibrio » tra una forma ossimetilenica ed una forma carbonilica. Però la forte perturbazione del C = O delle pirrolaldeidi da noi rilevata anche per via elettrochimica non è favorevole all'ipotesi di un equilibrio, ma piuttosto a quella di una vera e propria risonanza quantica. D'altra parte la posizione a 1560–1570 cm^{-1} sarebbe del tutto « anomala » per una riga riferibile ad un C = C (non nucleare) di una forma ossimetilenica.

3) Viceversa vi sarebbero ragioni assai più plausibili per attribuire la riga in questione ad un doppio legame nucleare del nucleo pirrolico nelle aldeidi alchilate. A conferma di questa ipotesi sta il fatto che la riga in discussione non compare nello spettro dell'aldeide pirrolica non sostituita mentre si riscontra negli spettri delle aldeidi alchilate al carbonio. Ciò fa riscontro a quanto è stato precedentemente rilevato [1] nelle nostre ricerche e che cioè a differenza del pirrolo non sostituito o sostituito all'azoto tutti

(1) G. B. Bonino, R. Manzoni-Ansidei, P. Pratesi, « Z. phys. Chem. », *22* B. 21 (1933); *25* B. 348 (1934).

i pirroli alchilati al C mostrano nel relativo spettro Raman una netta riga di un « doppio legame » nucleare. Ciò in relazione anche con le proprietà chimiche [1] dei pirroli alchilati al C proprietà in accordo con l'ipotesi che mentre il pirrolo non sostituito si trovi prevalentemente in una forma « aromatica » senza « doppi legami » in nucleo i pirroli sostituiti debbano considerarsi come dati dall'insieme di due forme: quella aromatica suddetta e quella ordinaria a doppi legami o per lo meno da una forma che riproduca le caratteristiche di ambedue le configurazioni.

Chimica. — *Osservazioni sui prodotti di condensazione delle ossime con i diazoici aromatici* [2]. Nota di A. Mangini, presentata [3] dal Corrisp. G. Bargellini.

L'azione delle ossime sui diazoici aromatici fu per primo studiata da J. Mai [4], il quale trovò che, in soluzione alcalina, le ossime in genere – aldo e chetossime, alifatiche e aromatiche – copulavano con i diazocomposti (1 mol. diazo: 2 ossima), e attribuì a questi composti di condensazione una delle formule seguenti (I) o (II), interpretando la reazione come è indicato negli schemi (A) o (B):

(A) $$Ar—N=N—OH \longrightarrow Ar—NH—NO$$

$$Ar—NH—NO + \begin{matrix} HO—N=C(:RR) \\ HO—N=C(:RR) \end{matrix} \xrightarrow[-H_2O]{} Ar—NH—N\begin{matrix} O—N=C(:RR) \\ O—N=C(:RR) \end{matrix}$$

(I)

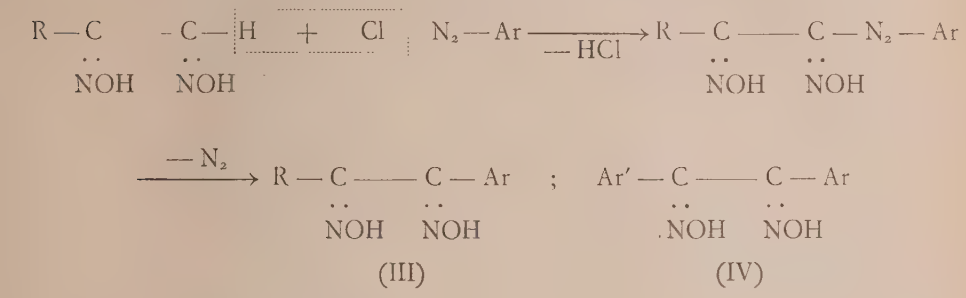
(B) $$Ar—N=N—OH + HO—N=C(:RR) \xrightarrow[-H_2O]{} Ar—N=N—O—N=C(:RR)$$

$$Ar—N=N—O—N=C(:RR) + (RR:)C=N—OH \longrightarrow Ar—N(—N—O—N=C(:RR))—C(:RR)—N—OH$$

(II)

(1) P. Pratesi, « Gazz. Chim. It. », *65*, 658 (1935).
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Perugia.
(3) Nella seduta del 17 novembre 1935.
(4) « Ber. », *24*, 3418 (1891); Ib., *25*, :685 (1892).

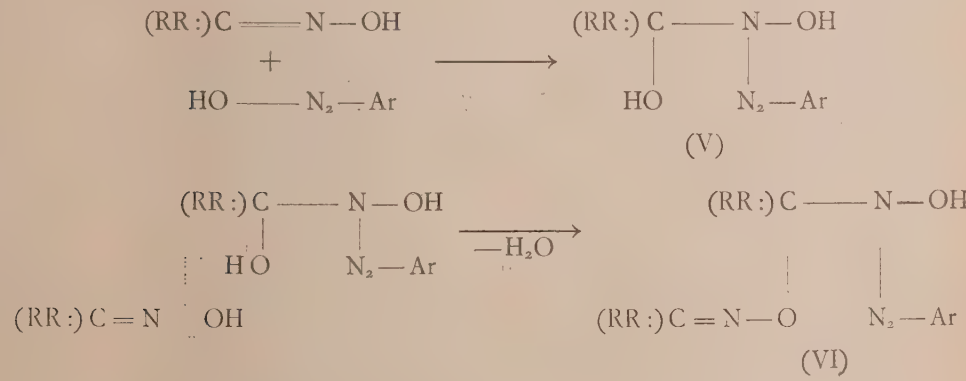
Successivamente Ponzio [1], facendo reagire le diossime, pure in soluzione alcalina, con i diazocomposti aromatici giunse ad una interessante sintesi delle alchil–aril–diossime (III) e diaril–diossime (IV):



reazione differente da quella scoperta dal Mai.

Nelle ricerche che qui riferisco, mi occupo dei prodotti di condensazione che si ottengono secondo la reazione di Mai, la cui costituzione non è completamente chiarita.

Debbo infatti premettere che dopo i due lavori del Mai, Bamberger [2] interpreta la reazione secondo uno schema del tutto differente:



e cioè in un primo momento si avrebbe una somma al doppio legame ossimico e formazione del prodotto intermedio (V); in una seconda fase, questo composto reagirebbe ancora – eterificandosi – con un'altra molecola di ossima, dando luogo al prodotto (VI).

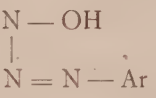
La struttura di Bamberger è basata sui fatti seguenti: 1) che, i composti di condensazione in parola forniscono colorazione bleu con cloruro

(1) Ponzio, Bernardi, « Gazz. Chim. Ital. », *23*, 813 (1923).
(2) « Ber. », *32*, 1546 (1899).

ferrico [1], e i relativi sali di rame se trattati con soluzione alcoolica di acetato rameico; 2) che, come Mai aveva già trovato, la idrolisi acida di questi composti, conduce alle diazoimmidi $Ar \cdot N_3$.

In conseguenza di questi fatti, i prodotti che si ottengono dalla condensazione delle ossime con i diazocomposti conterrebbero, secondo Bamberger, l'aggruppamento fondamentale (VII)

(VII)

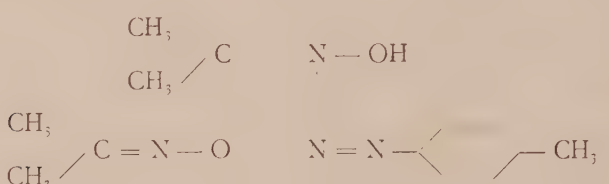


delle azoidrossiamidi, che ugualmente forniscono la caratteristica reazione con cloruro ferrico [2].

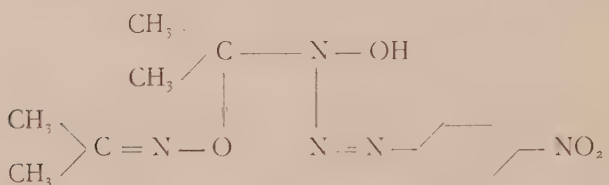
A questo lavoro critico di Bamberger, segue un'altra Nota di H.W. Bresler, W. H. Friedemann e dello stesso Mai [3], nel quale vengono descritti numerosi prodotti di condensazione, ma nulla viene accennato sulla loro struttura.

Ho creduto perciò opportuno riprendere in esame questi composti, e in queste ricerche – allo scopo di avere utili dati di confronto – ho preso in esame i prodotti di condensazione della acetossima con paradiazotoluolo descritto da Mai [4], e paranitrobenzendiazonio [5], ai quali secondo Bamberger spettano le seguenti strutture:

(VIII)



(IX)



(1) Bamberger, loc. cit.

(2) Gioverà ricordare che il complesso (VII) si ritrova anche negli ossitriazeni $R - N = N - N(OH) - R'$, i quali – analogamente alle azoidrossiamidi e ai composti di condensazione in parola – forniscono e la reazione con cloruro ferrico e dànno luogo a sali di rame [ved. ad es. «Ber.», *30*, 2283 (1897); Ib., *32*, 1677 (1899); «Ann.», *316*, 267, 273; «Soc.», *95*, 771, 1122].

(3) «Ber.», *39*, 876 (1906).

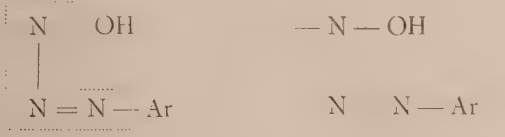
(4) «Ber.», *25*, 1685 (1892).

(5) Bamberger, loc. cit.

Su questi composti ho sperimentato l'azione degli acidi minerali diluiti per lo studio dei prodotti di idrolisi, e – allo scopo di caratterizzare l'ossidrile – l'azione dei cloruri di benzoile e bromo-benzoile-(orto-, meta- e para-) e dell'isocianato fenilico: come consegue da quanto è oltre riferito, i risultati concordano con la struttura di Bamberger, ma dagli stessi risulterebbe che – oltre la formula ossidrilica (VI) – è da ammettersi una struttura ossi-immidica tautomera $—N(:O)=N—NH—$. Infatti, i risultati sono i seguenti:

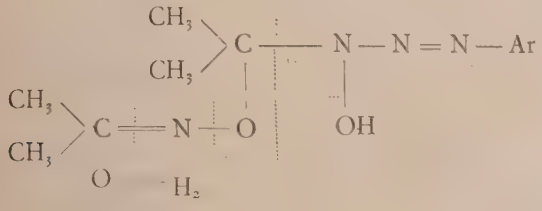
1) La idrolisi acida porta ad acetone, paratoluidina e paranitroanilina, paratoluol- e paranitro-diazoimmide [1].

La formazione della diazoimmide (già messa in evidenza dal Mai), dimostra in primo luogo che i tre atomi di azoto sono in catena; mentre la formazione della toluidina e nitroanilina, mostra d'altra parte che l'aggruppamento (VII) si scinde nelle due maniere seguenti:



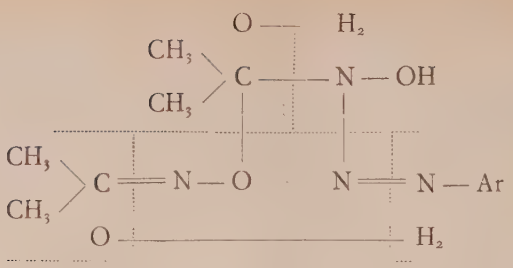
ciò è confermato inoltre, dalla formazione del picrato di paratoluidina, che si ottiene con rendimento del 37 % quando sul composto (VIII) si fa agire – anche in soluzione benzenica – l'acido picrico [2].

Si può arguire quindi che, l'azione degli acidi minerali si risolve verosimilmente secondo gli schemi seguenti:



(1) Nella idrolisi alcalina della paratoluoldiazoacetossima (VIII), si forma diazoimmide, una sostanza di natura acida (solubile nei carbonati) e paracresolo: non si forma invece paratoluidina.

(2) L'azione dell'acido picrico fu studiata allo scopo di ottenere il picrato del composto (VIII), per il quale era da prevedersi un comportamento basico.



con formazione quindi sempre di 2 molecole di acetone (che infatti sono state ritrovate quantitativamente) e, con tutta probabilità, di 1 mol. di idrossilamina.

2) L'azione dell'isocianato di fenile sul composto (IX) porta al prodotto di condensazione dell'acetossima con fenilcianato (X):

(X) $$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C = N - O - CO - NH \cdot C_6H_5$$

E questo starebbe a dimostrare che almeno una molecola di acetossima rimane intatta nella condensazione.

3) L'azione dei cloruri di benzoile e bromo-benzoile a freddo, soluzione piridica, sul composto (VIII) porta alle toluididi:

$$CH_3 \cdot C_6H_4 - NH - CO \cdot C_6H_4X \qquad (X = H, Br)$$

e a mio avviso questo fatto, può interpretarsi nel senso che, l'idrogeno ossidrilico può trasporsi all'azoto legato all'arile, e cioè che l'aggruppamento (VII) può reagire secondo lo schema (XI)

(VII) $$\begin{matrix} -N-OH \\ | \\ N=N-Ar \end{matrix} \rightleftarrows \begin{matrix} -N:O \\ \| \\ N-NH-Ar \end{matrix} \qquad (XI)$$

questo risultato sarebbe confermato dalla formazione della N–fenil–N'–p–tolil-urea (XII)

(XII) $$CH_3 \cdot C_6H_4 - NH - CO - NH - C_6H_5$$

che si ottiene per azione dell'isocianato di fenile sul composto (VIII).

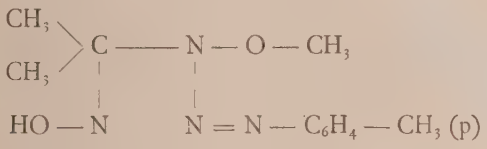
Operando nelle stesse condizioni di esperienza con i cloruri di benzoile sul composto (IX) si arriva solo alla nitrodiazoimmide.

A parer mio quindi, tutti questi fatti sono ben in accordo colla struttura che Bamberger attribuisce a questi prodotti di condensazione, quando

però si ammetta anche che il complesso $-N_3(OH)\cdot Ar$ possa reagire secondo le due forme tautomere (VII) e (XI), come gli analoghi ossi-triazeni [1]:

$$R-N:N-N(OH)-R' \rightleftarrows R-NH-N:N(:O)-R'.$$

Aggiungo ancora che, sarebbe riuscito interessante isolare il prodotto (V), e a questo scopo ho tentato la copulazione del paradiazotoluolo con l'etere metilico della acetossima per ottenere così l'etere



il quale verosimilmente avrebbe dovuto mostrarsi meno reagibile verso la seconda molecola dell'etere dell'ossima, e in questo modo arrestare la condensazione alla prima fase: ma l'unico prodotto di reazione che si riesce a isolare è il p-toluol-diazo-p-cresolo di Noelting e Kohn [2], confermato attraverso il derivato acetilico. Ciò sta a dimostrare che se l'ossidrile ossimico è impegnato la reazione di condensazione non ha luogo.

I tentativi per la preparazione degli eteri alchilici dei composti (VIII) e (IX) sono riusciti negativi.

Reputo opportuno ricordare infine, che – come si è visto da quanto è stato esposto in precedenza – la presenza dei gruppi CH_3 ed NO_2, nei casi studiati, importa una reagibilità differente dei composti di condensazione e verso il cianato di fenile e verso i cloruri di benzoile: sarà interessante perciò studiare l'influenza dei diversi sostituenti nell'arile sulla maniera di reagire di questi composti, verso i reattivi usati nelle esperienze riferite.

La parte sperimentale sarà riferita altrove.

(1) O. Fischer, « J. pr. Chem. », [2], 92, 62 (1915); Bamberger, « Ann. », *420*, 143 (1919).

(2) « Ber. », *17*, 354 (1884).

Chimica biologica. — *Sul comportamento della conduttività elettrica del tuorlo di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti* [1]. Nota di ANTONIETTA ORRÙ, presentata [2] dal Corrisp. S. VISCO.

Le proprietà chimico-fisiche dei colloidi organici sono oggetto di continue ricerche, che servono a definirle sempre più.

Così sulla viscosità, sulla conduttività elettrica, sulla pressione osmotica, ecc. ecc., di essi, si possiede oggi un complesso di conoscenze che ci permettono di comprendere od interpretare opportunamente tutta una serie di fenomeni della più grande importanza.

Uno di tali fenomeni venne illustrato, or non è molto dal Visco [3], il quale osservò che i valori di conduttività di una soluzione di gelatina, per una data temperatura, risultavano diversi secondo che la temperatura voluta si raggiungeva per riscaldamento o per raffreddamento della soluzione stessa. I valori ottenuti, operando quando si raffreddava il sistema, erano sempre superiori a quelli ottenuti quando lo si riscaldava.

In altre parole: ad uno stesso valore della temperatura corrispondono due diversi valori della resistenza elettrica, i quali dipendono dallo stato anteriore di riscaldamento della soluzione. Quando si raffredda la soluzione, residua un certo grado della maggiore conduttività da essa acquisita quando la temperatura era stata innalzata, e questa conduttività residua fa risultare minore la resistenza. Si osserva quindi un fenomeno analogo a quello che si verifica quando si sottopone a forze magnetiche crescenti, ed indi decrescenti, un pezzo di ferro dolce, fenomeno che per analogia, il Visco chiamò: isteresi di conduttività elettrica.

Contemporaneamente Banerji e Ghosh [4] hanno studiato l'isteresi nella trasformazione sol-gel nei sistemi acquosi di gelatina e di sali di sodio di vari acidi grassi, ed hanno osservato che le curve tempo-solidificazione e tempo-liquefazione, tendono a coincidere col crescere del tempo. Essi hanno cercato d'interpretare il fenomeno d'isteresi che in tali sistemi si verifica, attribuendolo ad una scarsa velocità di orientazione delle micelle.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 17 novembre 1935.
(3) S. VISCO, questi «Rendiconti», vol. XI, 261 (1930).
(4) S. N. BANERJI e S. GHOSH, «Z. Anorg. allgem. Chem.», *194*, 305 (1930).

I due fatti avanti riportati mi sono sembrati molto interessanti e perciò ho creduto opportuno di estenderne lo studio, anche per vedere se essi non fossero l'espressione di qualche proprietà generale dei colloidi organici.

Riferisco in questa Nota i dati ottenuti studiando il sistema colloidale rappresentato dal tuorlo dell'uovo di gallina.

Tecnica. – Il tuorlo di un uovo di gallina si separa accuratamente dal bianco, si lava più volte con acqua distillata, si asciuga con carta bibula, e si rompe in una cella per conduttività di Arrhenius, avendo cura di allontanare la membrana vitellina. Nella massa del tuorlo s'immergono gli elettrodi platinati di recente, adoperando tutte le cautele affinchè non restino bolle di aria fra le due superfici degli elettrodi stessi. Per le determinazioni si è fatto uso del dispositivo del ponte di Kohlrausch; al rocchetto di Rumkhorff, si è sostituito il risonatore a triodi per tutte le frequenze musicali. Scelta una determinata frequenza, vengono eseguite con essa tutte le ricerche che formano oggetto del presente studio.

PARTE SPERIMENTALE

I. – Un primo gruppo di ricerche è stato eseguito su tuorli di uova deposte da un numero di giorni variante da 1 a 44. Le determinazioni della resistenza elettrica iniziate a temperatura ambiente (16–18° C) si ripetono di due in due gradi, sia allorchè la temperatura sale fino ad un massimo di 60° C, sia allorchè si riporta a quella di partenza. Non si supera la temperatura di 60° C per evitare che il tuorlo coaguli. In questo modo sono state eseguite otto esperienze le quali hanno dato tutte risultati eguali.

Esaminando attentamente i grafici costruiti con i dati della conduttività misurata in funzione della temperatura, ho osservato che:

a) la curva temperatura-conduttività che esprime l'andamento del fenomeno nella fase di temperatura crescente coincide, nei limiti dell'errore sperimentale, con quella ottenuta nella fase di temperatura decrescente;

b) la conduttività per ogni grado di aumento della temperatura, cresce di un valore costante;

c) l'età dell'uovo non ha nessun influsso sullo svolgimento del fenomeno.

Il grafico n. 1 esprime l'andamento di una di queste esperienze.

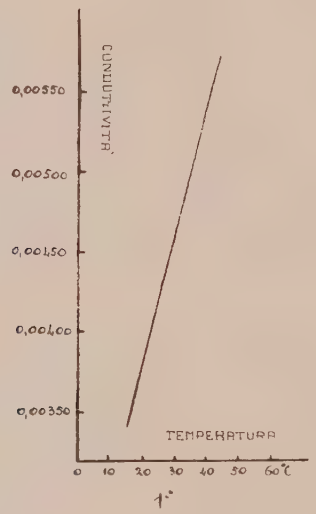
II. – Un secondo gruppo di ricerche è stato eseguito su tuorli di uova previamente coagulati. Messo il tuorlo nella cella per la conduttività ed immersivi, con le dovute precauzioni, gli elettrodi, lo facevo coagulare in bagno d'acqua che portavo rapidamente all'ebollizione. Attendevo poi che il coagulo riprendesse la temperatura ambiente per iniziare le determinazioni di conduttività sempre di due in due gradi dalla temperatura ambiente, fino a 60° C e viceversa. Con queste modalità ho eseguito 6 esperienze che hanno dato risultati identici sia fra loro che con quelle del primo gruppo. Difatti, anche in questi casi:

a) la curva che esprime l'andamento della conduttività in funzione della temperatura quando questa cresce da quella ambiente (16-18° C) fino a 60° C coincide, entro i limiti degli errori sperimentali, con quella che si ottiene allorchè da 60° C si torna a quella iniziale;

b) la conduttività, per ogni aumento di un grado di temperatura, cresce di un valore costante;

c) l'età dell'uovo non influenza l'andamento del fenomeno.

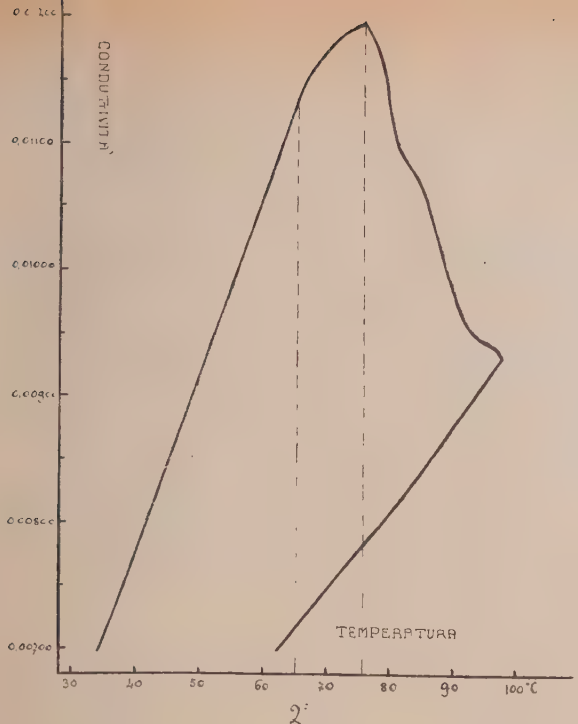
III. - Il terzo gruppo di ricerche è stato eseguito su tuorli di uova deposte da un numero di giorni variante da 3 a 12, iniziando le misure di conduttività alla temperatura ambiente (16-18° C), proseguendole di due in due gradi fino ai 98° C e ripetendole quindi alle stesse temperature di prima durante il raffreddamento. Da un esame accurato dei dati ottenuti si rileva che nella fase della temperatura ascendente, gli aumenti di conduttività



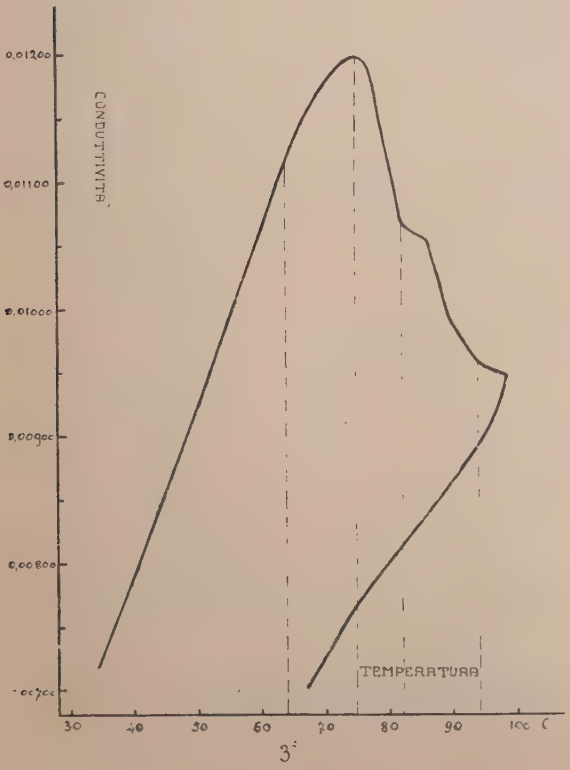
per ogni grado di temperatura hanno valori pressochè identici fin verso i 64° C. Da questo momento essi vanno sempre diminuendo fino a circa 72-76° C, superati i quali non solo, non si osserva più nessun aumento di conduttività, ma si registra una diminuzione progressiva di essa. In tutte le sei esperienze di questo gruppo si è osservato lo stesso fenomeno, ma la temperatura, alla quale si è iniziata la diminuzione di conduttività, ha oscillato tra i 72° C ai 76° C a seconda che la temperatura stessa, che potremo chiamare « temperatura critica », si era raggiunta lentamente o rapidamente. Il grafico n. 2 mette in evidenza questo anormale comportamento della conduttività elettrica. Osservando attentamente la porzione discendente della curva, cioè quella che esprime il comportamento della conduttività quando la temperatura sale da 76° C a 98° C, notiamo che in corrispondenza di 84° C circa, essa presenta una prominenza, espressione del fatto che gli aumenti di resistenza in questo punto sono minori di quelli che si osservano a temperature immediatamente superiori ed inferiori. Lo stesso fenomeno si verifica quando la temperatura raggiunge i 94° C. Nel grafico n. 3 i due fatti rilevati sono ancora più visibili.

Se, dopo aver raggiunti i 98° C si fa diminuire la temperatura, i valori della conduttività che mano mano si registrano sono sempre notevolmente inferiori a quelli determinati per le stesse temperature durante il riscaldamento.

Lo speciale comportamento della conduttività tra i 64° C ed i 72° C deve essere considerato come la risultante di due fattori: uno noto, l'aumento di temperatura, che come ho indicato, tende a fare aumentare la conduttività elettrica di una quantità costante per ogni grado centigrado; e l'altro ignoto, che, in maniera progressivamente crescente, tende a farla diminuire. Mano mano che l'effetto del secondo fattore prevale, l'aumento della conduttività per l'aumento della temperatura non è più uniforme presentando esso valori sempre minori, poi cessa del tutto ed infine la conduttività stessa del sistema incomincia a decrescere non ostante che la temperatura continui a salire. Allorchè ogni aumento di


CONDUTTIVITÀ
0,01000
30
40
50
60
70
80
90
100°C
TEMPERATURA

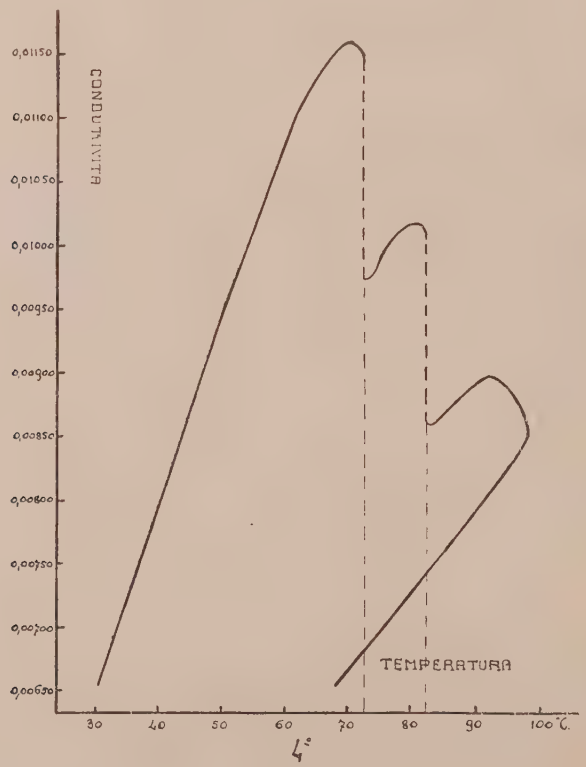
2:


0,012,00
CONDUTTIVITÀ
0,01100
0,01000
30
40
50
60
70
80
90
100 C
TEMPERATURA

3:

conduttività cessa, il sistema appare già trasformato in un coagulo di consistenza molle. Le inflessioni che si osservano sulla porzione discendente delle curve e che già abbiamo descritte, probabilmente sono anch'esse la risultante degli stessi due fattori, il cui effetto tende però ad invertirsi.

IV. - Per risolvere queste questioni che mi sono sembrate degne di rilievo ho eseguita una nuova serie di esperienze delle quali riassumo le modalità di esecuzione ed i risultati (grafico n. 4). Se, allorchè la conduttività comincia a diminuire (72–76° C) si mantiene fissa la temperatura, si osserva che la conduttività del sistema continua a diminuire progressivamente e che è soltanto dopo circa 60′–70′ (ed anche più talvolta), che essa raggiunge un valore stabile, che è circa del 15 % superiore a quello osservato ai 72° C. Facendo poi risalire ancora la temperatura, la conduttività aumenta di nuovo, ma soltanto per 8–10 gradi, poichè ad 82-84° C si nota una nuova diminuzione di essa, diminuzione che mantenendo fissa questa temperatura, progredisce fino a raggiungere un valore del 13 % circa più basso di quello raggiunto ad 84° C. Se arrivati a questo nuovo equilibrio si riscalda ancora, si osserva che la conduttività riprende ad aumentare fin verso i 92°–94° C. dopo di che essa diminuisce di nuovo e la diminuzione prosegue fino ai 98° C. Da questo punto facendo discendere la temperatura la curva assume l'andamento già notato a proposito dei grafici 2 e 3.



Conclusioni ed osservazioni. – Le esperienze del 1° e 2° gruppo dimostrano che nel caso del tuorlo dell'uovo di gallina non si verifica il fenomeno di isteresi osservato dal Visco [1] nelle soluzioni di gelatina.

I risultati delle esperienze del III e del IV gruppo si possono interpretare mettendoli in rapporto con i componenti proteici del tuorlo, due almeno dei quali debbono oggi considerarsi come sicuramente esistenti: la lecitovitellina e la livetina [2, 3, 4]. La lecitovitellina è almeno quattro volte più abbondante [4] della livetina e coagula tra i 70° e 75° C [5]; ora, è appunto in prossimità di questa temperatura che incomincia a diminuire la conduttività elettrica del sistema. Se questo fatto è in dipendenza della coagulazione della lecitovitellina noi possiamo spiegarcelo ammettendo che per effetto del processo di coagulazione, che si svolge lentamente alla temperatura di esperienza, vadano progressivamente diminuendo la mobilità ed il numero degli ioni del sistema, e conseguentemente ne aumenti mano mano la resistenza fino a che si arriva ad uno stato di equilibrio. Se dopo aver raggiunto questo equilibrio si fa crescere ancora la temperatura, la conduttività aumenta fino a che non si sia raggiunto il grado termico di coagulazione della livetina, la quale in conseguenza della modificazione del suo stato provoca una nuova diminuzione della mobilità e del numero degli ioni presenti. La terza caduta di conduttività è forse in dipendenza della coagulazione di una terza proteina, la cui presenza nel tuorlo dell'uovo per quanto non sia stata ancora chimicamente dimostrata, pure, secondo le osservazioni di Jukes e Kay [4] non può sicuramente escludersi.

(1) S. Visco, loc. cit.
(2) R. H. A. Plimmer, « Journ. Chem. Soc. », *93*, 1500 (1908).
(3) H. D. Kay e D. G. Marshall, « Biochem. Journ. », *22*, 1264 (1928).
(4) T. H. Fukes e H. D. Kay, « Journ. of Nutrition », *5*, 81 (1932).
(5) R. H. A. Plimmer, *Practical organic and biochemistry*, p. 461 (1915).

Chimica biologica. — *Sulle sostanze coloranti del guscio delle uova di casuario* [1]. Nota preliminare di D. Dinelli, presentata [2] dal Corrisp. S. Visco.

Per primo Wicke nel 1858 [3] eseguì alcune ricerche sui pigmenti dei gusci delle uova; Sorby [4] e Liebermann [5] si occuparono poi dello stesso argomento, eseguendo misure spettroscopiche.

Dai loro risultati si deduce che i pigmenti in questione possono essere riferiti essenzialmente a due tipi di sostanze coloranti, una rossa e una bleu o verde, che insieme o isolate impartiscono il colore ai gusci delle uova.

H. Fischer e collaboratori [6] in seguito ripresero in esame il problema, ed usando come materiale di partenza le uova di gabbiano, in cui sono contenuti tutti e due i pigmenti, riuscirono ad isolare la sostanza rossa, che identificarono come protoporfirina; Lemberg [7] poi prese in considerazione il pigmento verde e, attraverso l'estere metilico, riuscì ad ottenerlo allo stato cristallino, ma non potè determinarne la costituzione.

Avendo avuto a disposizione alcune uova di casuario, i cui gusci sono intensamente colorati in verde, ho cercato di determinare la natura dei pigmenti in esso contenuti. Il materiale di cui disponevo era in quantità assai limitata (gr. 300 circa di gusci) e non mi ha permesso di raggiungere risultati definitivi; credo opportuno tuttavia di rendere noti quelli finora ottenuti.

Estraendo con alcool metilico il materiale previamente decalcificato con acido cloridrico, ho ottenuto una soluzione di un bel color verde mandorla [8], dalla quale con trattamento analogo a quello seguìto da Lemberg per la Oocianina delle uova di gabbiano, sono riuscito ad ottenere un prodotto cristallizzato, ma in quantità così piccola che non mi fu possibile purificarlo ulteriormente e determinarne il punto di fusione.

Dalle osservazioni fatte, che riporto nella parte sperimentale, questo pigmento sembra simile, ma non identico al prodotto di Lemberg.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 17 novembre 1935.
(3) « Naumannia », 1858, p. 393.
(4) « Proc. Zool. Soc. of London », 1875, p. 351.
(5) « Ber. d. deut. chem. Gesellschaft », XI, p. 606, 1878.
(6) « Zeit. d. Physiol. Chem. », *131*, p. 241, 1923; *145*, p. 216, 1925.
(7) « Lieb. Ann. d. Chem. », *488*, p. 74, 1931.
(8) Questo pigmento era già stato notato da A. Orrù, « Boll. Soc. It. di Biol. Sperim. », V (2), 1, 1930.

Inoltre dall'estrazione con alcool metilico, si ha un residuo che rimane colorato in verde per quanto si prolunghi o si ripeta, anche in altre condizioni, l'estrazione stessa.

Da questo residuo per breve trattamento alcalino a caldo, ho ottenuto una sostanza che allo stato secco si presenta in scagliette amorfe, verdi scure, igroscopiche, solubili in acqua, negli alcali diluiti ed in altri solventi. Essa è insolubile negli acidi minerali e presenta, come risulta dalla parte sperimentale le proprietà caratteristiche delle sostanze proteiche. Ogni tentativo di separare da essa una frazione solubile in etere è stato senza risultato. Si tratta perciò di un colorante di natura proteica.

È questa la prima volta in cui viene riscontrata con una certa sicurezza la presenza di un cromoproteide tra i pigmenti dei gusci delle uova.

Perciò mi riprometto di prendere nuovamente in esame l'argomento, non appena potrò avere a disposizione una maggior quantità di materiale, sia per cercare di identificare il pigmento solubile in alcool sia per tentare la scissione del gruppo cromogeno del cromoproteide.

Parte sperimentale.

Estrazione del pigmento solubile in alcool. - Dopo alcune prove orientative si operò nel modo seguente: gr. 200 di gusci di uova, finemente polverizzati, furono versati a poco per volta in quattro litri di acido cloridrico al 5 °/₀ e lasciati in riposo tutta la notte. Al mattino successivo si filtrò alla pompa. Il residuo fu seccato nel vuoto su acido solforico e poi estratto a ricadere con 30 cc. di alcool metilico.

La soluzione ottenuta, di color verde mandorla intenso, raffredata a 0 fu mescolata con un egual volume di una soluzione satura a freddo di HCl gassoso in alcool metilico e lasciata in ghiacciaia per dodici ore. Poi si distillò il solvente nel vuoto fino a secchezza, si riprese il residuo con alcool metilico e si versò la soluzione in 300 cc. di etere.

La soluzione eterea, lavata prima con una soluzione diluita di acetato sodico poi con acqua, fu estratta ripetutamente con acido cloridrico al 0,5 °/₀.

La maggior parte della sostanza colorante passò così nello strato acquoso.

La soluzione cloridrica fu portata cautamente quasi a neutralità con soluzione diluita di carbonato sodico, vi si aggiunge poi un poco di acetato sodico e si estrasse ripetutamente con etere.

Gli estratti eterei riuniti furono filtrati attraverso un filtro contenente un poco di solfato di sodio anidro e portati a secco a pressione ridotta. Il residuo fu ripreso con alcool metilico a caldo e la soluzione ottenuta fu filtrata e concentrata a circa 2 cc. Lasciando in riposo tutta la notte si notò al mattino la formazione di fiocchetti azzurri, che esaminati al microscopio risultarono amorfi. Allora si portò nuovamente a secco nel vuoto,

si riprese il residuo con benzolo caldo ed alla soluzione benzenica filtrata si aggiunse a poco a poco etere di petrolio fino ad incipiente intorbidamento.

Dopo ventiquattro ore la soluzione aveva lasciato depositare un poco di una polvere finissima che, osservata al microscopio sotto ingrandimento abbastanza forte, si mostrò costituita da fogliette piatte, piuttosto allungate mescolate in qualche zona con qualche fiocchetto amorfo.

Il prodotto, raccolto su micro filtro, era in quantità tale da non permettere una successiva purificazione; una determinazione del punto di fusione sulla sostanza grezza non diede buoni risultati, in quanto mostrò solo un'alterazione graduale a partire dai 90–100°. Un tentativo di ottenere una maggior quantità di cristalli, aggiungendo alle acque madri altro etere di petrolio, portò alla formazione di sostanza amorfa.

È da notare che i solventi adoperati erano stati tutti opportunamente purificati e che si cercò di ridurre al minimo il contatto delle soluzioni con l'aria operando tutte le concentrazioni in corrente di azoto.

Un poco di sostanza amorfa, sciolta in alcool metilico, osservata allo spettroscopio mostrò una banda di assorbimento abbastanza netta verso i 650 mμ. La sostanza, in soluzione cloroformica, diede per aggiunta di una o due gocce di reattivo di Gamelin, un viraggio di colore verso il rosso-violetto e poi verso il giallo.

Trattando un poco di soluzione alcoolica della sostanza con ammoniaca ed acetato di zinco si ebbe un cambiamento di colore verso il verde, non si ottenne però la fluorescenza rossa, che Lemberg descrive per la sua Oocianina.

Cromoproteide. – Il residuo della estrazione con alcool metilico appariva ancora intensamente colorato in verde. Si provò a ripetere l'estrazione su un po' di materiale seccato e polverizzato con sabbia silicea, ma l'alcool rimase perfettamente incoloro. Analogo risultato si ebbe con altri solventi come acetone, acqua, benzolo ecc.

Furono fatti allora alcuni tentativi di parziale demolizione per arrivare ad ottenere un prodotto colorato solubile. Il miglior risultato si ebbe operando nel modo seguente: la sostanza fu sospesa in idrato sodico al 10 % e riscaldata all'ebollizione fino a che fu quasi completamente disciolta con colorazione giallo–rossastra (1–2 minuti); quindi si raffreddò rapidamente con acqua corrente si diluì con egual volume di acqua distillata e si filtrò per allontanare le eventuali parti indisciolte.

Acidificando cautamente fino a forte reazione acida si separò una sostanza in forma di fiocchi color verde erba, mentre veniva messo in libertà idrogeno solforato riconoscibile all'odore caratteristico.

Centrifugando la sostanza si depositò al fondo, mentre le acque madri rimasero quasi incolori. Per allontanare il più possibile i sali minerali si lavò un paio di volte il prodotto con HCl al 5 % centrifugando ogni volta,

si disciolse quindi in acqua distillata e si ripetè la precipitazione e i lavaggi. La sostanza fu poi estratta con alcool a caldo, e la soluzione alcoolica fu centrifugata e filtrata.

Distillando l'alcool nel vuoto e seccando su acido solforico si ottennero delle scagliette di color verde scuro.

La sostanza è solubile in acqua, ed in alcool metilico ed etilico.

Essa è insolubile in benzolo, acetone, cloroformio, piridina.

Dalle soluzioni acquose essa riprecipita sia per aggiunta di acidi sia per aggiunta di una piccola quantità di soluzione satura di solfato di ammonio, mentre non coagula per azione del calore.

Due micro–determinazioni secondo Pregl hanno dato un contenuto di azoto 14,41 e 14,23 %. Il contenuto in ceneri è di circa 0,5 %.

La sostanza dà risultati positivi con le reazioni Xantoproteica, di Millon e del Biureto, negativi con le reazioni di Molisch e dello zolfo.

L'assenza dello zolfo è in accordo con lo sviluppo di idrogeno solforato che si ha durante la preparazione. Lo spettro in soluzione alcoolica non presenta bande caratteristiche nè in ambiente acido nè basico.

Dibattendo una soluzione acquosa della sostanza con etere, quest'ultimo solvente rimane perfettamente incoloro.

Parecchi tentativi diretti a separare una frazione colorata solubile in etere, anche dopo esterificazione con alcool metilico, sono stati senza risultato.

Paleobotanica. — *Presenza della « Wielandiella angustifolia Nath. » nel lias veronese (Roverè di Velo).* Nota di Maria Fiore, presentata [1] dal Socio B. Longo.

Poi che nel 1867 [2] fu descritto per la prima volta il genere *Bennettites* e indi il 1870 [3] fu stabilito il gruppo delle *Bennettiteae* accogliente le *Cycadales* mesozoiche ritenute aberranti, vari altri generi affini sono stati scoperti sia nell'Europa occidentale che in India, negli Stati Uniti e nel Messico; nello stesso tempo che fossili descritti sotto vari nomi già da alcuni anni prima che fosse supposta l'esistenza delle *Bennettiteae* (*Zamia gigas* dell'oolite inferiore di Yorkshire [4]) o più o meno contemporaneamente (specie dei generi *Zamites*, *Otozamites*, *Blastolepis*, *Pterophyllum* ecc. riscontrati in varie località giurassiche) sono stati riconosciuti appartenere al detto gruppo di piante.

(1) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(2) *On gymnospermatous fruits from the secondary rocks of Britain.* « Journal of Botany », 1867.

(3) *On fossil cicadean steams from the secondary rocks of Great Britain.* « Trans. Linn. Soc. Bot. », 1870.

(4) Lindley and Hutton, *Fossil flora of Great Britain*, 1830.

Di questo oltre il Carruthers se ne sono occupati in modo speciale il Williamson, il Nathorst, il Thomas, il Seward ed il Wieland [1], il quale ultimo ha riunito tutti i generi a seconda della diversità di alcune loro peculiarità morfologiche riguardanti sia l'apparato vegetativo che quello di riproduzione in due sotto–tribù e cioè quella delle *Williamsonieae* e quella delle *Bennettiteae* propriamente dette [2].

Rappresentanti delle *Williamsonieae* sono stati trovati anche nei calcari grigi del Veneto e cioè *Williamsonia pecten* (Phill) (*Zamites rotzoamus Zigno*), *Williamsonia* Spec. (*Blastolepis otozamites* Zigno, *B. acuminata* Zigno e *B. falcata* Zigno ecc.) la cui flora come è ben noto è stata illustrata dal barone De Zigno [3] e indi alquanto riveduta specialmente dal Seward e dalla Grandori [4]; tuttavia fino adesso, che io sappia, non era stato riscontrato alcun rappresentante della famiglia delle *Microflorae*, famiglia dal Villiam distaccata dalle *Williamsonieae* per includere i generi *Wielandiella* e *Williamsoniella* caratterizzati da fusti sottili con ramificazione rigidamente pseudodicotomica e fiori bisessuali per lo meno morfologicamente se non funzionalmente. Ora mesi or sono esaminando dei fossili inviatimi da Roverè di Velo (Verona) mi è stato dato di poter esaminare un piccolo strobilo unitamente a parti di fusto di non dubbia affinità bennettitale, e propriamente facilmente riconoscibili come appartenenti alla famiglia delle *Microflorae*.

Misura lo strobilo da me esaminato non più di mm. 6 di massimo diametro per 14 mm. di lunghezza dei quali 4 sono da riferirsi a un breve picciuolo ampio mm. 1 $^1/_2$. È di forma ovale e veramente non si nota in esso che l'impronta del gineceo contornato ai lati da qualche brattea (4 o 5); tuttavia per la forma e del gineceo e delle brattee, per le proporzioni e per l'insieme sia pure dei soli detti caratteri morfologici controllabili, possiamo dire con molta probabilità che esso è da riferirsi al genere *Wielandiella* (*Anomozamites*) *angustifolia* dal Nathorst descritta la prima volta come *Williamsonia angustifolia* su esemplari di Hör in Scania, e indi in seguito ad esame di altri esemplari del retico di Bjuf ridescritta come *Wielandia* e quindi ancora come *Wielandiella*, dato che la denominazione *Wielandia* già era stata adoperata per un genere vivente.

Infatti anche la porzione di fusto che ho potuto esaminare, costituita da un ramo largo cm. 1 e lungo cm. 16, per essere caratterizzata da evidente falsa dicotomia, per quanto si sia conservato soltanto uno dei rami della ramificazione lungo cm. 15 e ampio mm. 5, e per essere caratteriz-

(1) Seward, *Fossil Plants Cambridge*; D. H. Scott, *Studies in Fossil Botany*, vol. II, 1923.

(2) Wieland, *Classification of Cycadophyta*. « American Journal of Science », volume XLVII, 1919,

(3) *Flora fossilis Formationis oolithicae*. Padova, 1856–1868, vol. I e 1873–85, vol. II.

(4) *La flora dei calcari grigi del Veneto*. « Memorie dell'Istituto Geologico », Padova, 1914.

zata da strie longitudinali, ha molta rassomiglianza con il fusto della detta *Wielandiella*.

Foglie di *Anomozamites minor* (nome sotto cui era conosciuta questa pianta prima della scoperta del fusto e degli organi di riproduzione) che sono caratterizzate, come è noto, dal possedere una lamina stretta, intera o divisa in piccoli, numerosi, ineguali segmenti, non sono state rinvenute in associazione con i resti fossili descritti, sorvolando su qualche impronta poco chiara, ma è molto probabile che anche esse verrebbero in luce facendone ricerca nel medesimo luogo dove sono stati trovati lo strobilo e la porzione di fusto descritti.

Resta pertanto messo in evidenza la presenza anche di un rappresentante della famiglia delle *Microflorae* nel lias veronese e propriamente a Roverè di Velo.

Litologia. — *Sulla composizione chimica della roccia eruttiva di Cupaello (Rieti)*[1]. Nota di F. Rodolico, presentata[2] dal Corrisp. P. Aloisi.

Da qualche tempo ho iniziato uno studio geo-litologico delle regioni vulcaniche di Cupaello[3] (Rieti) e di San Venanzo (Perugia), dove si trovano due rocce effusive melilitiche di particolare interesse, le quali sono state indicate rispettivamente coi nomi di *coppaelite* e di *euctolite* o *venanzite*. In tale studio complessivo mi propongo sopratutto di esaminare - con le osservazioni fatte sui luoghi, e coi risultati di ricerche eseguite con uniformità di metodo - le relazioni tra le rocce effuse da questi due piccoli vulcani, e quelle, eruttive, delle regioni circostanti.

Nella presente Nota preliminare, dò, frattanto, i risultati di una analisi chimica della roccia di Cupaello, della quale finora non ve n'era che una eseguita, più di cinquanta anni or sono, dal Brugnatelli[4], su materiale raccolto dallo Zezi. Data la singolarità della composizione mineralogica della roccia - rilevata dal Brugnatelli stesso, e, più tardi, dal Sabatini[5] - questa vecchia analisi, nonostante le osservazioni critiche del

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 17 novembre 1935.

(3) Gli abitanti del paese lo chiamano *Cupaello*, e tale nome compare nelle carte topografiche dell'I. G. M.; nei lavori scientifici lo stesso luogo è indicato come *Coppaeli*. Farò qualche ricerca per stabilire quale denominazione sia da preferire.

(4) L. Brugnatelli, *Nota sulla composizione di una roccia pirossenica dei dintorni di Rieti*. «Boll. R. Com. geol.», XIV, 314, 1883.

(5) V. Sabatini, *La pirossenite melilitica di Coppaeli*. «Boll. R. Com. geol.» [4], IV, 376, 1903. Id., *Ancora sulla pirossenite melilitica di Coppaeli*. «Id.» [4], VII, 317, 1906.

Washington [1], è riportata in molti trattati di petrografia, ed è stata recentemente calcolata dal Niggli [2] e dal Lacroix [3], nei loro saggi sulla classificazione delle rocce eruttive.

Ho scelto a Cupaello, appositamente per l'analisi chimica, un campione che appariva, all'osservazione macroscopica, fresco, compatto, e privo di zeoliti; ciò nonostante l'esame di sezioni sottili, e la verificata presenza di una notevolissima quantità di acqua, dimostrano la forte alterazione della roccia, anche nelle zone apparentemente fresche, come pure l'esistenza di minerali zeolitici. Di fronte alla stessa difficoltà si era trovato anche il Brugnatelli, come appare da quanto egli scrive, e dai risultati della sua analisi, che riporto (I) accanto a quelli da me ottenuti (II), nella seguente tabella:

	I	II
SiO_2	43.36 [4]	42.64
TiO_2	non det.	0.87
P_2O_5	tracce	1.26
SO_3	—	0.62
Al_2O_3	9.37	7.01
Fe_2O_3	8.88 [5]	5.78
FeO		1.66
MnO	—	0.16
MgO	10.42	10.86
CaO	15.38	14.53
Na_2O	1.49	0.71
K_2O	3.21	5.61
H_2O+	6.66	6.22
H_2O-		2.28
	98.77	100.21
p. sp.	2.65	2.61

A parte il titanio, il fosforo, e lo solfo, che non erano stati determinati dal Brugnatelli, le differenze più notevoli tra le due analisi si osservano

(1) H. S. Washington, *Chemical analyses of igneous rocks*. «U. S. Geol. Survey, prof. Papers», XIV, 467, 1903.

(2) P. Niggli, *Gesteins- und Mineralprovinzen*, I. (In collaborazione con P. J. Beger). Berlin, p. 474, 1923.

(3) A. Lacroix, *Classification des roches éruptives*. (In *Contribution à la connaissance des roches éruptives de l'Indochine*). «Bull. serv. géol. de l'Indochine», XX, 198, 1933.

(4) Con piccolissime quantità di anidride titanica.

(5) Determinato tutto come ossido ferrico.

nei riguardi degli alcali e dell'allumina, insieme alla quale, evidentemente, il Brugnatelli pesò l'anidride fosforica.

Nel complesso, caratteristiche fondamentali della composizione chimica della roccia di Cupaello appaiono i valori bassi dei percenti della silice, dell'allumina, e della soda, in contrasto con quelli, assai alti, della calce, della magnesia, e della potassa. Notevole pure la quantità di anidride fosforica, la qual cosa corrisponde a quanto è stato già trovato per altre rocce ricche di feldispatoidi, anche italiane (1).

Ho già ricordato che l'analisi del Brugnatelli è stata utilizzata dal Niggli e dal Lacroix; ecco i risultati che si ottengono calcolando la nuova analisi col metodo del Niggli:

si	ti	p	so_3	al	fm	c	alk
92.48	1.42	1.16	0.98	8.94	48.03	33.77	9.26

k	mg	c/fm	sezione
0.16	0.74	0.70	V

Le differenze tra questi valori e quelli pubblicati dal Niggli sono abbastanza sensibili, ma non tanto, mi sembra, da fare variare la posizione della roccia nella classificazione di questo autore, dove viene considerata come roccia effusiva lamprofirica appartenente al tipo magmatico delle missuriti. Ecco in ogni modo il tipo medio della serie missouritica delle rocce effusive lamprofiriche, secondo il Niggli:

si	al	fm	c	alk	k	mg	c/fm	sezione
85	11	46.5	32	10.5	0.73	0.74	0.69	V

Calcolando la mia analisi secondo il metodo americano, si ottengono i risultati seguenti:

Anortite	1,67
Leucite	26,16
Nefelina	0,85
Thenardite	1,14
Wollastonite	23,55
Enstatite	20,30
Forsterite	4,83
Ortosilicato di Ca.	1,98
Magnetite	3,25
Ematite	3,52
Ilmenite	1,67
Apatite	3,02

(1) Cfr., per es., qualche analisi riportata in H. S. Washington, *Some analyses of italian volcanic rocks*, II. « Am. Jour. Sc. », IX, 47, 1900 e in F. Zambonini e G. Carobbi,

Da questi valori deriva la seguente formula del Lacroix:

$$'IV \cdot 9 \cdot 1' \cdot 1\,[(1)\,2 \cdot 1\,(2) \cdot '3 \cdot 1'].$$

Ed anche nella classificazione di questo autore, la roccia, con i risultati della nuova analisi, resta nella famiglia A (Missouriti) della seconda divisione (Rocce essenzialmente feldispatoidiche).

Secondo il Sabatini « la composizione della roccia di Coppaeli... mostra che non v'ha alcuna ragione per collegarla a quella delle regioni eruttive dei dintorni » (1). Dalle ricerche chimiche, mi sembra invece che non si possa escludere una eventuale analogia tra la roccia in questione ed altre dell'Italia centrale, per quanto possa apparire diversa la costituzione mineralogica. Mi riservo di riprendere in esame la cosa nel mio successivo lavoro.

La roccia leucitica dell'Averno nei Campi Flegrei. « Atti R. Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli » [2], XVIII, 3, 12, 1930.

(1) V. Sabatini, *La pirossenite* ecc., loc. cit., p. 378.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. Millosevich ricorda brevemente i Soci recentemente scomparsi: Ettore Marchiafava, Guido Grassi, Leon Fredericq e Alessandro von Brill e annuncia che di Ettore Marchiafava parlerà, in una delle prossime sedute, il Socio Cesaris Demel.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Parravano presenta le opere giunte in dono segnalando: « Le opere di G. V. Schiaparelli », vol. VI; « Leçons d'Algebre di R. Garnier; « Series de Fourier et classes quasi-analytiques des fonctions » di S. Mandelbrojt; « Pression solaire et Atomes » di G. Froin; il processo verbale del Congresso internazionale delle Scienze di Bruxelles del 1934; « Lezioni di Chimica » di G. R. Levi; « Distillation » di M. Lecat e « Synthèses organiques » pubblicato sotto la direzione di E. Fourneau.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. Scorza legge, anche a nome del Socio Castelnuovo, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di N. Spampinato, dal titolo « Teoria delle caratteristiche di un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli Atti Accademici i Soci Sacco, Scorza, Somigliana, Visco.

Per la Memoria dal titolo « Controvento; dimostrazione di una nota formula di M. Planck senza i quanta » inviata, senza presentazione di alcun Socio, dal sig. Barreca e che riproduce il testo di un plico sugellato inviato dallo stesso sig. Barreca il 30 dicembre 1934, l'Assemblea decide di affidarne l'esame ad una commissione formata dai Soci Lo Surdo e Fermi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 17 novembre 1935

Abetti G. — Altezza della cromosfera nel 1934 ed andamento del cielo solare. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei » Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXI, serie VI, pp. 294-296). Roma, 1935. 8°.

Alfani Guido. — L'esperienza di Foucault nel Duomo di Firenze. (Estr. dalla Rivista « Gli astri », anno IV). Roma, 1935. 8°, pp. 1-15.

Alfani Guido. — Le grandi livelle registratrici della cupola del Duomo di Firenze. (Estr. dal « Bollettino del Comitato per la Geodesia e la Geofisica del Consiglio naz. delle Ricerche ». Serie 2ª anno V). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-12.

Alfani Guido. — Sul numero degli astri. Riflessione. (Estr. dalla Rivista « Gli astri ». Anno IV). Roma, 1935. 8°, pp. 1-2.

Andreatta Ciro. — La formazione gneissico-kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige). Trento, 1935. 4°, pp. 1-160.

Arcangeli Alceste. — Gli isopodi terrestri del Portogallo. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIX). Portici, 1935. 8°, pp. 1-39.

Baer Jean G. — L'adaptation des Helminthes à leurs hôtes. (Extr. du « Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles ». Tome 58, pp. 57-76). Neuchâtel, 1934.

Baillaud Benjamin. — Benjamin Baillaud 1848-1934. (Extr. des « Annales de l'Observatoire Astronomique et Météorologique de Toulouse »). Toulouse, 1935. 4°, pp. I-XX.

Battaglia Mario. — Critérium biologique déduits de quelques expériences sur les cultures symbiotiques de certains microorganismes (Estr. dal « Bollettino della Società internaz. di Microbiologia », 1935, n. 5). Milano, 1935. 8°, pp. 1-5.

Bellows Marjorie T. and Reed Lowell J. — Effect of certain environmental factors on urban infant mortality rates. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». Vol. XX, pp. 565-573). S. l. 1934. 8°.

Braccini Paolo. — Contributo allo studio delle pecore sopravissane e vissane. (Estr. dai « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno XII, pp. 545-598). Roma, 1932. 8°.

Braccini Paolo. — Intervallo fra le mungiture e suoi rapporti sul contenuto percentuale di grasso, di sostanza secca e di residuo magro nel latte. (Estr. da « Latte e Latticini ». Anno XI). Lodi, 1934. 4°, pp. 1-7.

Carathéodory Costantin. — Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig und Berlin, 1935. 8°, pp. I-XI, 1-407.

Catalogo della mostra del libro antico di medicina nella Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna. Bologna, 1935. 8°, pp. 1-77.

Ciocco Antonio. — Vedi Pearl Raymond.

Conti Dante. — Un'altra legge fisica che se ne va (dattilografato). Aquila, s. d. 8°, pp. 1-114.

Dale Alison S. and Narayana B. — Observations on the Perfused Lungs of the Guinea-pig. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXV, pp. 85-97). Edinburgh, 1935. 8°.

Daly Reginald Aldworth. — The changing World of the Ice Age. New Haven, 1934. 8°, pp. I–XIX, 1–271.

De Burgh Daly I, Peat S. and Schild H. — The Release of a histamine-like Substance from Lungs of Guinea–pigs during anaphylactic Shock. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXV, pp. 33, 59). Edinburgh, 1935. 8°.

De Burgh Daly I. and Schild H. — Inactivation by histaminase preparations of the histamine–like Substance recovered from Lungs during anaphylactic Shock. (Reprinted from the « Proceedings of the Physiological Society ». Vol. 83). S. l. 1934. 8°, pp. 1–3.

De Toni Nando. — L'idraulica in Leonardo da Vinci. (Frammenti Vinciani, VIII–IX). Brescia, 1935. 8°, pp. 1–69, 1–23.

Devadatta S. C. — Distribution of Lactate between the Corpuscles and the Plasma in Blood. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXIV, pp. 295–303). Edinburgh, 1934. 8°.

Eddigton A. S. — The density of interstellar Calcium and Sodium. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCV). Edinburgh, 1934. 8°, pp. 1–11.

Eddington A. S. — The Speed of Recession of the Galaxies. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 95, pp. 636–638). Edinburgh, 1935. 8°.

Edwards Thomas I. — Influence of Temperature and Nutrition on the Growth and Duration of Life of *cucumis melo* seedlings. (Reprinted from the « Botanical Gazette ». Vol. 96, pp. 118–135). S. l. 1934. 8°.

Eggleton P. — A stimulation unit for A. C. mains. (Reprinted from the « Proceedings of the Physiological Society ». Vol. 84). S. l. 1935. 8°, pp. 1–2.

Eggleton P. — The Chemistry of Musele. (Reprinted from « Annual Review of Biochemistry ». Vol. IV, pp. 413–434). Edinburgh, 1935. 8°.

Fagiani G. — Il sen. prof. ing. Gaudenzio Fantoli nominato socio ordinario dell'Associazione Idrotecnica Italiana. (Estr. dalla Rivista « L'Acqua », 1935). Milano, 1935. 4°, pp. 1–4.

Ferrari Ercole. — Vedi Pirocchi Antonio.

Froin Georges. — Pression solaire et atomes. La circulation de l'énergie. Paris, 1935. 8°, pp. 1–250.

Gafafer William M. — John Forbes's British and Foreign medical Review (1836–1847) and its relation to Medical Statistics. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. 6, pp. 637–649). Baltimore, 1934. 8°.

Garbin U. V. — In memoria di Benedetto Bonacelli. Albano Laziale, 1935. 4°, pp. 1–15.

Garnier René. — Leçons d'algèbre et de géométrie a l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. Paris, Editeur Gauthier Villars, 1935. 8°, pp. I–VIII, 1–233.

Ghaffar Abdul. — A note on the Mechanism of Iodoacetate Poisoning of Muscle. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXV, pp. 61–67). S. l. 1935. 8°.

Giusti Giuseppe. — I gusci di ostriche e i granuli di marmo nella alimentazione dei polli. (Estr. da « La Clinica veterinaria ». Anno 1934). Milano, 1934. 8°, pp. 1–12.

Giusti Giuseppe. — Il costo del pollo dalla incubazione a tre mesi di età secondo i dati del pollaio sperimentale del R. Istituto superiore agrario di Milano. (Estr. da « La Clinica veterinaria ». Anno 1933). Milano, 1933. 8°, pp. 1–12.

Godlewski Emile. — Oeuvres D'Emile Godlewski. Tome II. Kraków, 1935. 8°, pp. 1–774.

Goldberg Leo. — Relative multiplet Strengths in LS Coupling. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Volume 82). S. l. 1935. 8°, pp. 1–25.

Gooch Marjorie. — An analysis of the time change in milk production in individual lactactions. (Reprinted from the « Journal of agricultural Science ». Volume XXV, pp. 71–102). Cambridge, 1935. 8°.

Gould Sophia A. — Vedi Edwards Thomas S.

Grace Eggleton M. — A physiological study of phosphagen in plain muscle. (Reprinted from the « Journal of Physiology ». Vol. 82, pp. 79-87). S. l. 1934. 8°.

Green H. E. — The ultra violet absorption spectrum of Nova Herculis. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 95, pages 694-704). Edinburgh, 1935. 8°.

Green H. E. — Vedi Smart W. M.

Harrison Ross G. — Correlation in the development and growth of the eye studied by means of heteroplastic transplantation. (Sonderdruck aus « Wilhelm Roux Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen ». Band 120). Berlin, 1929. 8°, pp. 1-55.

Harrison Ross G. — Experiments on the development and growth of limbs in the Amphibia. (Reprinted from « Science ». Vol. 74). S. l. 1931. 8°, pp. 1-3.

Harrison Ross G. — Heteroplastic grafting in Embryology. (Reprinted from « The Harvey Lectures », 1933-34, pp. 116-157). S. l. 1935. 8°.

Harrison Ross. G. — Heteroplastic Transplantation in Amphibian Embryos. « X^e Congrès International de Zoologie », pp. 641-650). S. l. s. d. 8°.

Harrison Ross. G. — On the Status and Significance of Tissue Culture. « X^e Congrès International de Zoologie », pp. 112-135). New Haven. S. d. 8°.

Harrison Ross G. — Some difficulties of the determinations problem. (Reprinted from the « American Naturalist ». Volume LXVII, pp. 306-321). S. l. 1935. 8°.

Harrison Ross G. e Pasquini P. — Esperimenti d'innesto sul cestello branchiale di « Clavelina lepadiformis » (Muller). (Estr. dai « Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XI, serie 6^a, pp. 139-146). Roma, 1930. 8°.

Ivaldi Gaetano. — La soluzione algebrica dell'equazione di terzo grado a tre radici reali e distinte. (Estr. da « Il Monitore tecnico ». N. 4, 1935). S. l. 1935. 4°, pp. 1-5.

Jeuss Rachel M. — Age variations of systolic blood pressure in United States Army Officers. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». Volume XX, pp. 574-603). Lancaster, 1934. 8°.

Kamp (van de) P. and Vyssotsky A. N. — Analysis of 18.000 proper Motions derived at the Leander Meccormick Observatory. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXI, pp. 419-428). S. l. 1935. 8°.

Kennedy Walter P. — Regression of anterior pituitary reactions II and III in the mouse ovary. (Reprinted from the « Journal of Experimental Biology ». Vol. XI, pp. 261-266) S. l. 1934. 8°.

Kennedy Walter P. — Sodium salt of C-C-Cyclohexenylmethyl-N-methyl, barbituric acid (Evipan) anaesthesia in laboratory animals. (Reprinted from the « Journal of Pharmacology and Experimental Therapeuctis ». Vol. L, pp. 347-353). Edinburgh, 1933. 8°.

Kennedy Walter P. and Narayana Basudeva. — Investigations on the Pharmacology of Evipan Sodium. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXIV, pp. 69-75). Edinburgh, 1933. 8°.

Lecat Maurice. — Azéotropisme et distillation. (Extrait du « Traité de Chimie organique ». Tome I, pp. 121-267). Paris, Editeurs Masson et C.^ie, 1935. 8°.

Lecat Maurice. — Les couples éthanol-halogénure azèotropiques sous la pression normale. (Extr. des « Annales de la Societé scientifique de Bruxelles ». Tome LV, pp. 43-44). Louvain, 1935. 8°.

Lecat Maurice. — Probabilité et Induction. Partie I. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques », 1935, pp. 269-286). Louvain, 1935. 8°.

Levi Giorgio Renato. — Chimica. Lezioni tenute nella Facoltà di Medicina e Chirurgia con la collaborazione del prof. A. Baroni. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1935. 8°, pp. I-XI, 1-482.

Lockyer W. J. S. — The variable spectrum of γ Cassiopeiae. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 95, pp. 520-529). Edinburgh, 1935. 8°.

Longo Biagio. — Sulla canapa indiana. (Cannabis indica lam.). (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIII, pp. 17–30). S. l. 1934. 8°.

Lyttleton R. A. — The Stellar Case of the Problem of three Bodies, with Application to the Algol System. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 95, pp. 42–55). Edinburgh, 1935. 8°.

Mammana Gabriele. — Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni. (Estr. da « La Ricerca scientifica ». Vol. I). Roma, 1933. 8°, pp. 1–15.

Mandelbrojt S. — Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1935. 8°, pp. I–VIII, 1–156.

Miner John. — Vedi Pearl Raymond.

Monterosso B. — Osservazioni e ricerche sperimentali su « Pediculoides ventricosus ». (Estr. dalla « Rivista di Biologia ». Vol. XVI). Firenze, 1934. 8°, pp. 1–81.

Narayana Basudeva. — Vedi Dale Alison S.

Narayana Basudeva. — Vedi Kennedey Walter P.

Nyrop J. E. — Adsorption and catalysis. (Reprinted from the « Journal of Physical Chemistry ». Vol. XXXIX, pp. 641-653). S. l. 1935. 8°.

Palmer Carroll E. — Age Changes in the physical Resemblance of Siblings. (Reprinted from « Child Development ». Vol. V, pp. 351–360). S. l. 1934. 4°.

Pasquini P. — Vedi Harrison Ross G.

Pearl Raymond. — L'organisation et le travail de la section de Biologie a l'Ecole d'Hygiène et de Santé Publique de l'Université Johns Hopkins. (Extr. de la « Biotypologie ». Tome II). Paris, 1934. 8°, pp. 1-18.

Pearl Raymond. — The Dinamics of Population. (Reprinted from « Science ». Vol. 80). Baltimore, 1934. 8°, pp. 1–3.

Pearl Raymond. — The weight of the Negro Brain. (Reprinted from « Science ». Vol. 80). S. l. 1934. 8°, pp. 1–8.

Pearl Raymond. — Vedi Edwards Thomas I.

Pearl Raymond and Ciocco Antonio. — Studies on constitution. II. Somatological differences associated with diseases of the heart in white males. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. VI, pagine 656–713). Baltimore, 1934. 8°.

Pearl Raymond and Miner John R. — Experimental studies on the duration of life. XIV. The comparative mortality of certain lower organisms. (Reprinted from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. 10. pp. 59–79). S. l. 1935. 8°.

Pearl Raymond and Miner John R. — On the comparison of groups in respect of a member of measured characters. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. VII, pp. 95–107). Baltimore, 1935.

Peat S. — Vedi De Burgh Daly I.

Petraroja Ludovico. — Il sistema atomico dell'Universo. Teoria fisica. Portici, 1933, 1935. 8°, pp. 145–196.

Picchi Alberto. — Altre ricerche sulla mungitura meccanica. (Estr. dei « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno XII, pp. 531–544). Roma, 1932. 8°.

Picone Mauro. — Ricerche e studi. (Estr. da « La Ricerca scientifica ». Vol. I). Roma, 1933. 8°, pp. 1–30.

Pirocchi Antonio. — Altre prove di alimentazione con farina lattea « Vitelia ». (Estr. da « Latte e latticini ». Anno IX, 1933). Lodi, 1933. 4°. pp. 1–7.

Pirocchi Antonio. — Il latte scremato nell'alimentazione del bestiame. Milano, 1934. 8°, pp. 1–31.

Pirocchi Antonio. — Influenza dei raggi ultravioletti sull'accrescimento e sulla salute dei pulcini. (Estr. dagli « Atti del V Congresso mondiale di pollicoltura ». Roma, 6–15 settembre 1933-XI Vol. II, pp. 425–438). Roma, 1934. 8°.

Pirocchi Antonio. — Studi e ricerche sull'alimentazione del bestiame in Lombardia. (Estr. da « La Ricerca Scientifica ». Vol. I). Roma, 1934. 8°, pp. 1-7.

Recherches sur la fertilisation effectuées en 1934 par les stations agronomiques. Donvai, 1935. 8°, 1-125.

Reed Lowell J. — Vedi Bellows Marjorie T.

Reports of Proceedings of the second General Assembly of the International Council of Scientific Unions held at Brussels. July 9th to 13th 1934. London, 1935. 8°, pp. 1–229.

Russo Achille. — La classificazione degli Echinodermi e l'opera didattica di Carlo Emery nel 50° anno del suo trattato di zoologia. (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano ». Vol. XLVI, pp. 97–101). Firenze, 1935. 8°.

Russo Giuseppe. — Il raggrinzimento o arricciamento del cotone nella Somalia Italiana. Relazione presentata al II Congresso di Studi Coloniali. Napoli, ottobre 1934. Firenze, 1935. 8°, pp. 1-43.

Scarlata Giuseppe. — Il sesso negli atomi. Palermo, 1935. 8°, pp. 1-13.

Schiaparelli G. V. — Le opere di G. V. Schiaparelli pubblicate per cura della R. Specola di Roma. Tomo VI. Milano, Editore Ulrico Hoepli, 1935. 4°, pp. 1–530.

Schild H. — Vedi De Burgh Daly I.

Sewertzoff S. A. — On the dinamics of populations of vertebrates. (Reprinted from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. IX, pp. 409-437). S. l. 1934. 8°.

Sewertzoff S. A. — Vom Massenwechsel bei den Wildtieren. (Sonderdruck aus dem « Biologischen Zentralblatt ». Band LIV, pp. 337-364). Leipzig, 1934. 8°.

Shiveshwarkar S. W. — On the Direction of Star-streaming in the Galaxy. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume 95, pp. 655–663). Edinburgh, 1935. 8°.

Shiveshwarkar S. W. — Radial Velocities of globular Clusters and Nebulae. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume 95, pp. 555-558). Cambridge, 1935. 8°.

Silvestri Filippo. — A further Report on Marquesan Myriopoda (From « Bernice P. Bishop Museum Bulletin ». N. 142). S. l. s. d. 8°, pp. 1-11.

Silvestri Filippo. — Descripción preliminar de una nueva especie de Prospaltella (Hym. Chalcididae) de la República Argentina. (« Anales del Museo Argentino de Ciencias Naturales Bernardino Rivadavia ». Tome XXXVIII, pp. 131–132). Buenos Aires, 1935. 4°.

Silvestri Filippo. — Specie nuove di Isopodi terrestri della Spagna; Porcellio (Porcellio) novus n. sp. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore di Portici ». Vol. XXIX, pp. 39–46). Spoleto, 1935. 8°.

Simon Horst. — Das Doppelsternsystem Cassiopejae. (Sonderabd. aus « Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte Königsberg. Heft. V). Würzburg, 1934. 8°, pp. 1-29.

Simon Horst. — Dass grosse Meteor vom 2. Februar 1933. (Sonderabdruck aus den « Schriften der Phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg ». Band. LXVIII, pp. 183–203). Königsberg, 1934. 8°.

Simonoff Miguel. — Electricidad y Magnetismo. Introdución al curso de electrotécnica. La Plata, 1935. 8°, pp. I-VIII, 1–260.

Smart W. M. — A new method of determining the atmospherical extinction factor in photo-electric photometry. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume 94, pp. 839–846).

Smart W. M. — Photo-electric Light-curves of S Cephei and β Lyrae. (Reprinted from the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. 95, pp. 643–650). Edinburgh, 1935. 8°.

Smart W. M. — Some theoremes in the statistical treatment of stellar Motions. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 95, pp. 116–131). Edinburgh, 1934. 8°.

Smart W. M. and Green H. E. — Photometric Observations of ζ Aurigae. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume 95, pp. 31–33). Cambridge, 1934. 8°.

Sterne T. E. — A note on creation and annihilation in statistical assemblies. (Reprinted from the « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society ». Vol. XXXI, pp. 303–306). Cambridge, 1935. 8°.

Sterne T. E. — Nuclear reactions at stellar temperatures. (From the « Transactions of the electrochemical Society ». Vol. XXVIII). Washington, 1935. 8°, pp. 1–13.

Synthèses Organiques. — (Édition d'ensemble revisée des volumes annuels I–IX). Traduction française. Paris, Editeurs Masson et C.ie 1935. 8°, pp. 1–510.

Vignal Jean. — Célébration du cinquantenaire du service, et inauguration de ses nouveaux batiments, le 27 Juin 1934. (Nivellement général de la France 1884–1934). Paris, 1934. 4°, pp. 1–72.

Vittadini Piero. — Vedi Pirocchi Antonio.

Vyssotsky A. V. — Vedi Kamp (van de) P.

Winants Marcel. — Résolution d'un problème à deux courbes pour l'équation semi-parabolique du troisième ordre et de la catégorie IV. (Extr. de « Mathesis ». Tome 48, pp. 311–323). S. l. 1934. 8°.

Winants Marcel. — Résolution d'un problème a trois courbes pour certaines équations hyperboliques du second ordre. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Tome LIX). Paris, 1935. 8°, pp. 1–6.

Winants Marcel. — Résolution de quelques nouveaux problèmes pour certaines équations sémiparaboliques du troisième ordre. (Extr. du « Bulletin des mathématiques ». Serie 2ª, tome LIX). Paris, 1935. 8°, pp. 1–20.

Winants Marcel. — Résolution du problème. ($^a_0$, IV, 2). (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie 5ª, tome XXI, pp. 405–503). Bruxelles, 1935. 8°.

Winants Marcel. — Résolution du problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \varphi(x, y, z)$. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences, n. 5, 1935, pp. 433–438). Liège, 1935. 8°.

N. P.

SOSPENSIONE DI CONCORSI A PREMIO BANDITI O DA BANDIRE DALLE ACCADEMIE, DAGLI ISTITUTI ED ASSOCIAZIONI DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

IL MINISTRO SEGRETARIO DI STATO
PER L'EDUCAZIONE NAZIONALE

Veduto il R. D. 5 gennaio 1933-XI, n. 31 riguardante il conferimento per concorso di premi annuali a presidi, direttori e professori di Istituti e scuole di istruzione media, classica, scientifica, magistrale e tecnica ad aiuti e assistenti di Università e Istituti Superiori.

Veduto il decreto ministeriale 14 maggio 1935-XIII, con il quale è aperto un concorso ad otto premi di L. 4000 ciascuno da conferirsi:

a) il primo al migliore lavoro su argomenti di scienze filosofiche e sociali;

b) il secondo al migliore lavoro su argomenti di scienze giuridiche economiche e corporative;

c) il terzo al migliore lavoro su argomenti di scienze storiche;

d) il quarto al migliore lavoro su argomenti di scienze filologiche;

e) il quinto al migliore lavoro su argomenti di scienze matematiche;

f) il sesto al migliore lavoro su argomenti di scienze fisiche;

g) il settimo al migliore lavoro su argomenti di scienze chimiche;

h) l'ottavo al migliore lavoro su argomenti di scienze naturali.

Considerata l'opportunità che i concorsi a premi banditi o da bandire dal Ministero e dalle Accademie, dagli Istituti od Associazioni di scienze, di lettere o di arti siano sospesi.

DECRETA:

Art. 1.

Il decreto ministeriale 14 maggio 1935-XIII è revocato.

Art. 2.

Il presente decreto, da comunicare alla Corte dei Conti per la registrazione, sarà pubblicato nel *Bollettino Ufficiale* di questo Ministero e negli Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei.

Roma, 14 novembre 1935-XIV.

IL MINISTRO:

Fto: De Vecchi di Val Cismon.

Reg.to alla Corte dei Conti
Addì 2 dicembre 1935-XIV
Reg. 25. Educazione Naz.le, foglio 115.

Per disposizione generale s'intendono sospesi fino a nuova disposizione, anche tutti gli altri concorsi a Premio presso questa Reale Accademia.

Nella Seduta Solenne del 1936 verranno perciò attribuiti soltanto:

1° I Premi reali per la Mineralogia e la Geologia, per le Scienze giuridiche e politiche, per la Storia e la Geografia; e il Premio Santoro, già scaduti rispettivamente il 31 dicembre 1934 o il 31 ottobre 1935 e attualmente sotto giudizio;

2° Il Premio Sella, perchè da assegnarsi senza concorso.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° dicembre 1935 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. Millosevich.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

Da qualche tempo stavo raccogliendo in un lavoro organico e completando la teoria degli invarianti proiettivi differenziali, finiti o infinitesimi, che già da alcuni anni ho posto a base della geometria proiettivo-differenziale sia dello spazio ordinario che degli iperspazi.

Alcune Note apparse di recente in questi « Rendiconti » m'inducono a stralciare da quel lavoro qualche risultato riguardante elementi di curve (piane o sghembe o iperspaziali); in una prossima Nota ne mostrerò qualche applicazione alla teoria dei reticolati piani di curve e a quella delle superficie.

I. — Invarianti di elementi curvilinei di un piano.

Il birapporto delle quattro rette che dal punto x (di coordinate proiettive omogenee $x^i, i = 1, 2, 3$) proiettano i punti $z_1 z_2 z_3 z_4$ è dato da

$$x(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{|x z_1 z_3|}{|x z_1 z_4|} \frac{|x z_2 z_4|}{|x z_2 z_3|}$$

ove p. es. $|x z_1 z_3|$ è il determinante formato con le coordinate omogenee dei punti x, z_1, z_3.

Se due o più punti tendono a coincidere, nei modi che preciseremo, il valore limite del birapporto se è finito, o il suo valore principale se è

(1) Presentata nella seduta del 1° dicembre 1935.

infinitesimo, sarà un invariante proiettivo della configurazione esaminata. Vediamo appunto alcuni casi.

I. 1. – *Invariante di un elemento e di due rette spiccate dal suo centro.*

Sia z_3 variabile sopra una curva C per x, $z_3 = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \cdots$, z_1 un punto qualsiasi sulla tangente in x a C, e z_2 e z_4 definiscano le due rette per x. Il valore principale del birapporto è

$$-\frac{1}{2} \frac{\left|x \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}\right| \cdot |x z_2 z_4|}{\left|x \frac{dx}{dt} z_2\right| \cdot \left|x \frac{dx}{dt} z_4\right|} dt,$$

invariante infinitesimo relativo alle due rette e all'elemento del 2° ordine E_2 *della curva considerata.*

Questo invariante ha pure un *significato metrico* molto semplice. Se si indicano con α e β gli angoli che le rette $x z_2$ e $x z_4$ formano con la tangente a C, e con ds ed r l'elemento d'arco e il raggio di curvatura di C in O detto invariante vale

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta} \frac{ds}{r}.$$

Aggiungiamo ancora che:

Un elemento del 3° ordine di curva E_3 *e due rette spiccate dal suo centro determinano sulla tangente ad* E_3 *un punto invariante, per cui passano le congiungenti i punti d'intersezione delle coniche del fascio determinato da* E_3 *con le due rette. Se una di queste varia (in un fascio) il punto invariante descrive (sulla tangente) una punteggiata proiettiva al fascio.*

Un elemento del 4° ordine E_4 *e due rette uscenti dal suo centro determinano completamente un sistema di riferimento (trilatero e punto unità); quindi ogni altro elemento (punto, retta, ecc.) dà luogo ad invarianti.*

I. 2. – *Invarianti di due elementi uscenti da un punto con tangenti distinte.*

Sia x il centro dei due elementi, $x z_1$ e $x z_2$ le tangenti ivi alle curve descritte risp. da $z_3 = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \cdots$, $z_4 = x + \delta x + \frac{1}{2} \delta^2 x + \cdots$.

Il termine principale del solito birapporto è

$$-\frac{1}{4} \frac{\left|x \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}\right| \left|x \frac{\delta x}{\delta\tau} \frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}\right|}{\left|x \frac{dx}{dt} \frac{\delta x}{\delta\tau}\right|^2} dt\, d\tau,$$

invariante infinitesimo dei due E_2 *con lo stesso centro e tangenti distinte.*

Sia data ora una retta per il centro dei due E_2. Il rapporto dei due invarianti infinitesimi I. 1 costruiti per ciascun E_2 e per le due rette rimanenti è un invariante finito. Se z_2 è il punto che con x individua la retta, la sua espressione è

$$-\frac{|x\,dx\,d^2x|}{|x\,\delta x\,\delta^2 x|}\,\frac{|x\,z_2\,\delta x|^3}{|x\,z_2\,dx|^3},$$

invariante finito di due E_2 *e di una retta per un punto.*

Eccone un significato finito (indipendente dalla considerazione precedente di rapporto di due birapporti infinitesimi).

Si considerino due coniche possedenti i due E_2 *e tangenti in un punto (qualsiasi, con tangente arbitraria) della retta data: il birapporto, di queste due coniche e di quelle degeneri del loro fascio è l'invariante precedente* (1).

Si prova ancora che: *Due* E_2 *uscenti da un punto con tangenti distinte determinano nel fascio di rette per il centro un'involuzione cubica, le cui terne sono caratterizzate dai valori dell'invariante precedente.*

I. 3. – *Invarianti di due elementi tangenti in un punto.*

Se nell'ultimo invariante trovato si suppongono coincidenti le tangenti agli E_2, il punto z_2, cioè la retta per il centro degli E_2 non figura che apparentemente; si ha dunque un *invariante finito (di contatto) di due* E_2 *tangenti*: esso è l'invariante già trovato da Mehmke e Wölfing e di cui C. Segre ha messo in evidenza una costruzione proiettiva (come limite di un birapporto; una finita si ha dall'ultimo enunciato prendendo arbitrariamente la retta che vi figura).

Ho già avuto occasione (2) di esaminare la configurazione di due elementi d'ordine >2 aventi un contatto semplice o più elevato; per completare quell'analisi aggiungo ora che:

Due elementi del 3° ordine aventi in un punto un contatto del 1° ordine determinano una retta invariante per il centro e un punto invariante sulla tangente. Per costruirli si considerino due qualsiansi coniche possedenti ciascuna uno degli E_3 *dati e le loro residue intersezioni: la coniugata armonica della tangente rispetto alle rette che le proiettano dal centro e l'intersezione della tangente con la loro congiungente sono la retta e il punto invarianti dei due* E_3.

Due elementi E_4 *a contatto del 1° ordine possono esser tali che le coniche da essi individuate siano bitangenti, e in tal caso determinano un triangolo invariante; se ciò non accade (caso generale) i due* E_4 *determinano un riferimento proiettivo (trilatero e punto invariante non appartenente ad esso).*

(1) Di quest'invariante ho già dato applicazioni in una Nota: *Costruzioni grafiche dei piani osculatori ad una curva.* «Rend. Ist. Lombardo», 1935.

(2) *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane.* «Rend. Acc. Lincei», vol. III, ser. 6ª, 1926.

Nel 1° caso ogni punto o retta ha *un* invariante rispetto agli E_4, nel secondo *due*.

I. 4. – *Invarianti di due elementi con centri distinti ma con la stessa tangente.*

Si considerino due elementi del 2° ordine $z_3 = z_1 + dz_1 + \frac{1}{2} d^2 z_1 + \cdots$ e $z_4 = z_2 + \delta z_2 + \frac{1}{2} \delta^2 z_2 + \cdots$ con centri z_1 e z_2 distinti ma con la stessa tangente (quindi la retta $z_1 z_2$ contiene i punti dz_1, δz_2) e inoltre un punto θ su $z_1 z_2$. Si consideri poi un punto ξ ad arbitrio nel piano e le coniche possedenti i due E_2 e tangenti in ξ alla retta $\xi\theta$. Queste coniche hanno un invariante di contatto I. 3 che vale

$$- \frac{|\delta^2 z_2 z_1 z_2|}{|d^2 z_1 z_1 z_2|} \frac{|dz_1 z_1 \xi|^2}{|\delta z_2 z_2 \xi|^2} \frac{|\theta z_2 \xi|^3}{|\theta z_1 \xi|^3},$$

e questo non dipende che apparentemente da ξ (a causa della coincidenza delle tangenti). Sicchè:

Due elementi del 2° ordine con la stessa tangente e un punto su di essa hanno un invariante proiettivo finito: esso ha l'espressione precedente ed è l'invariante di contatto I. 3 *di due qualsiansi coniche possedenti i due* E_2 *fra loro tangenti, quando la tangente comune* ($\neq z_1 z_2$) *passi per il punto fissato* (*su* $z_1 z_2$).

Due elementi del 2° ordine nelle condizioni dette determinano sulla loro tangente un'involuzione del 3° ordine, le cui terne corrispondono ai valori dell'invariante precedente: in particolare essi determinano i punti invarianti corrispondenti ai valori + 1 *e* — 1 *dell'invariante (coniche fra loro osculatrici o a contatto armonico).*

Il significato metrico dell'invariante proiettivo trovato è il seguente: *esso è uguale al rapporto dei raggi di curvatura dei due elementi moltiplicato per il cubo del rapporto delle distanze del punto fissato dai centri degli* E_2.

Se questi coincidono, il secondo fattore è = 1 e si ritrova l'interpretazione metrica di I. 3 da cui son partiti Mehmke e Wölfing.

Poichè ogni E_3 determina una proiettività fra i punti della sua tangente e le rette per il suo centro, dati due E_3 nelle condizioni precedenti, ad ogni punto della tangente corrispondono due rette, una per il centro di ciascun E_3 e perciò:

Dati due E_3 *a centri distinti e con la stessa tangente, essi determinano una conica invariante passante per i loro centri. Questa conica è anche il luogo dei punti tali che le coniche passanti per uno di essi e alle quali appartengono i due* E_3 *di partenza si toccano.*

Se ad ogni punto della conica invariante si fa corrispondere il punto della tangente agli E_3 *da cui si ricava con la prima costruzione e il punto d'inter-*

sezione della tangente alla conica con la tangente agli E_3 *si ha su questa una corrispondenza* (1, 2) *che dipende esclusivamente dagli* E_2.

Vi sono sulla conica invariante dei due E_3 *tre punti (dei quali uno reale) tali che le coniche per uno di essi e per ciascuno degli* E_3 *si osculano (nel punto); sicchè due* E_3 *nelle condizioni dette determinano completamente un riferimento proiettivo.*

I. 5. – *Invarianti di due elementi generici.*

Dati due elementi curvilinei generici cioè con centri e tangenti distinti, che rappresentiamo come nel numero precedente, può accadere che i loro E_2 appartengano alla stessa conica oppur no. In ogni caso essi hanno un *invariante finito* dato dal birapporto delle due coniche possedenti un E_2 e tangenti all'altro, della retta dei centri contata due volte e della coppia di tangenti [1]. Come espressione dell'invariante può prendersi

$$\frac{|z_2\,\delta z_2\,\delta^2 z_2|}{|z_1\,dz_1\,d^2 z_1|}\,\frac{|z_1\,z_2\,dz_1|^3}{|z_1\,z_2\,\delta z_2|^3}.$$

Un E_3 e un E_2 generici o appartengono ad una stessa conica, oppure esiste una conica contenente E_3 e tangente ad E_2, oppure E_3 *ed* E_2 *definiscono un punto invariante (oltre l'invariante precedente)*; esso è l'intersezione ulteriore della conica per E_3 e per il centro di E_2 e della conica per E_2 tangente ad E_3. Ne segue che *due* E_3 *hanno un ulteriore invariante* che può caratterizzarsi geometricamente come il birapporto delle due tangenti e delle rette che dal loro punto d'intersezione proiettano i due punti invarianti.

II. — Invarianti di elementi curvilinei nello spazio.

È proiettivamente invariante nello spazio l'espressione formata con le coordinate proiettive omogenee di 6 punti x, y, z_1, z_2, z_3, z_4

$$\frac{|x\,y\,z_1\,z_3|}{|x\,y\,z_1\,z_4|}\,\frac{|x\,y\,z_2\,z_4|}{|x\,y\,z_2\,z_3|}$$

ove i termini delle frazioni rappresentano determinanti, ed è il valore del birapporto dei 4 piani proiettanti dalla retta xy i punti $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$. Da questa espressione, come dall'analoga nel piano, trarremo diversi invarianti proiettivo–differenziali di elementi curvilinei.

(1) Di quest'invariante mi ero servito da diversi anni per assegnare il significato geometrico dell'invariante assoluto (rapporto dei due *relativi* di Darboux) di un'equazione di Laplace.

II. 1. – *Invarianti di un elemento e di tre rette spiccate dal suo centro.*

Siano l'elemento rappresentato da $\zeta_3 = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \cdots$ e le rette quelle congiungenti x con y, ζ_2, ζ_4 e sia ζ_1 sulla tangente. Il termine principale del birapporto indicato vale

$$\frac{1}{2} \frac{|x\,y\,dx\,d^2x|}{|x\,y\,dx\,\zeta_4|} \frac{|x\,y\,\zeta_2\,\zeta_4|}{|x\,y\,\zeta_2\,dx|}$$

ed è un *invariante infinitesimo di* E_2 *e di tre rette generiche per il suo centro* (mai tre delle quattro rette stiano in un piano, nè la retta xy appartenga al piano osculatore; oltre a ciò si ha naturalmente l'invariante finito birapporto del piano osculatore e dei piani proiettanti dalla tangente le tre rette).

Supponiamo ora invece che la retta xy stia nel piano osculatore ad E_2; sicchè $|y\,x\,dx\,d^2x| = 0$. Si ha l'*invariante infinitesimo*

$$\frac{1}{3!} \frac{|x\,dx\,d^2x\,d^3x|}{|x\,dx\,d^2x\,\zeta_4|} \frac{|x\,y\,\zeta_2\,\zeta_4|}{|x\,y\,\zeta_2\,dx|}$$

relativo ad un E_3, *ad una retta nel suo piano osculatore e a due rette arbitrarie (tutte per il centro di* E_3*).*

Se ζ_2 e ζ_4 sono infinitamente vicini, posto $\zeta_2 = \zeta, \zeta_4 = \zeta + \delta\zeta$ si ha l'invariante

$$\frac{1}{3!} \frac{|x\,dx\,d^2x\,d^3x|}{|x\,dx\,d^2x\,\zeta|} \frac{|x\,y\,\zeta\,\delta\zeta|}{|x\,y\,\zeta\,dx|}$$

relativo ad un E_3, ad una retta nel suo piano osculatore e ad un E_1 (anzi ad un elemento del 1° ordine di cono con vertice nel centro di E_3). Questa configurazione, o quella di un E_3 e di due piani generici per il punto, determina una retta invariante per il punto.

II. 2. – *Invarianti relativi a due elementi generici.*

I due elementi siano definiti da $\zeta_3 = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \frac{1}{3!} d^3x + \cdots$ $\zeta_4 = y + \delta y + \frac{1}{2} \delta^2 y + \cdots$: essi abbiano centri distinti, tangenti distinte e non incidenti, piani osculatori distinti.

Se si prende ζ_1 sulla tangente in x al primo e ζ_2 sulla tangente in y al secondo elemento il termine principale del birapporto è

$$-\frac{1}{4} \frac{|x\,y\,dx\,d^2x|\,|x\,y\,\delta y\,\delta^2 y|}{|x\,y\,dx\,\delta y|^2}$$

invariante infinitesimo relativo a due E_2 *generici.*

Consideriamo ora l'E_3 di centro x dato e un E_2, di centro $z_2 = z$, $z_4 = z + \delta z + \frac{1}{2}\delta^2 z$ generico rispetto ad E_3; preso y nel punto d'intersezione del piano osculatore ad E_3 con la tangente ad E_2 e z_1 sulla tangente ad E_3 il termine principale del solito birapporto vale

$$\frac{1}{12}\,\frac{|x\,dx\,d^2x\,d^3x|}{|x\,dx\,d^2x\,z|^3}\,\frac{|x\,z\,\delta z\,\delta^2 z|}{|x\,z\,\delta z\,dx|},$$

invariante infinitesimo di E_3 *ed* E_2 *generici.*

Il quoziente di questo per il quadrato del precedente (in cui si legga z al posto di y) è

$$\frac{4}{3}\,\frac{|x\,dx\,d^2x\,d^3x|}{|x\,dx\,d^2x\,z|^3}\,\frac{|x\,z\,\delta z\,dx|^3}{|x\,z\,\delta z\,\delta^2 z|},$$

invariante finito di un E_3 *e di un* E_2 *generici.*

L'esistenza, e il significato in forma finita (cioè indipendente dalla considerazione dei birapporti infinitesimi) può dedursi proiettando E_3 ed E_2 dal centro di E_3 (x) sopra un piano qualsiasi; si hanno due E_2 piani e l'invariante finito I. 5 che si costruisce mediante due coniche bitangenti. Ma se ne può dare un'interpretazione più elegante nello spazio.

Si considerino le due cubiche sghembe, definita l'una dal contenere E_3 *ed esser tangente ad* E_2, *l'altra dal contenere l'*E_2 *dato e anche l'*E_2 *di* E_3 *e la quadrica cui esse appartengono.*

Su qualsiasi delle due cubiche il birapporto dei due centri e degli ulteriori punti d'intersezione della cubica con i piani in essi centri tangenti alla quadrica è l'invariante proiettivo finito di E_3 *ed* E_2.

Ciò, s'intende, quando le due cubiche non coincidono: *l'eventuale appartenenza di* E_3 *ed* E_2 *ad una medesima cubica sghemba è già un carattere proiettivo dei due elementi.*

II. 3. – *Invarianti di due elementi uscenti da un punto.*

Siano due elementi di curve uscenti dal punto x con tangenti distinte, $z_3 = x + dx + \frac{1}{2}d^2x + \cdots$, $z_4 = x + \delta x + \frac{1}{2}\delta^2 x + \cdots$, e di cui il piano osculatore ad uno non contenga la tangente all'altro.

Prendendo z_1 e z_2 sulle tangenti si ha per il birapporto

$$-\frac{1}{4}\,\frac{|x\,y\,dx\,d^2x| \cdot |x\,y\,\delta x\,\delta^2 x|}{|x\,y\,dx\,\delta x|^2},$$

invariante infinitesimo dei due E_2 *e di una retta generica per* x.

Se la retta xy è nel piano osculatore alla prima curva (ma non all'altra) si ha

$$\frac{1}{12}\,\frac{|\,x\,dx\,d^2x\,d^3x\,|}{|\,x\,dx\,d^2x\,\delta x\,|}\,\frac{|\,x\,y\,\delta x\,\delta^2 x\,|}{|\,x\,y\,\delta x\,dx\,|}\,,$$

invariante relativo ad un E_3 *e ad un* E_2 *uscenti da un punto e ad una retta generica situata nel piano osculatore ad* E_3 *e passante per il punto.*

Se la retta xy è l'intersezione dei piani osculatori alle due curve

$$\left(\frac{1}{3!}\right)^2\frac{|\,x\,dx\,d^2x\,d^3x\,|}{|\,x\,dx\,d^2x\,\delta x\,|}\,\frac{|\,x\,\delta x\,\delta^2 x\,\delta^3 x\,|}{|\,x\,\delta x\,\delta^2 x\,dx\,|}\,,$$

è un invariante infinitesimo relativo a due E_3 *generici incidenti in un punto.*

Due tali E_3 hanno anche un *invariante finito*, come si vede proiettandoli dal centro comune sopra un piano generico e ricordando l'invariante I. 5 che ne dà l'interpretazione geometrica. Sono anche *invarianti* di due tali E_3 le *rette* e i *punti principali* già da me dati in altra occasione [1].

Ometto, per ragioni di spazio, di riferire sui casi più particolari in cui il piano osculatore ad un elemento sia tangente all'altro o in cui i piani osculatori coincidano (sempre con tangenti distinte).

II. 4. – *Invarianti di elementi tangenti in un punto.*

Rappresentati due elementi nel solito modo, preso z_1 sulla tangente comune, y fuori dei due piani osculatori (distinti) e z_2 arbitrario, se si forma il solito birapporto si vede che z_2 non ha alcuna influenza su di esso (cioè sul suo limite) e che y può variarsi, senza alterare il birapporto, in un piano per la tangente. Poichè quel birapporto dipende solo dagli E_2, si ha che: *due* E_2 *tangenti (con piani osculatori distinti) e un piano per la tangente hanno un invariante finito; o viceversa due* E_2 *e un valore di quest'invariante determinano un piano tangente agli* E_2: *questo piano generalizza quello di Halphen (piano principale) per cui l'invariante vale* 1, ed è luogo dei punti dai quali gli E_2 vengono proiettati in due elementi dello stesso piano aventi per invariante di contatto I. 3 quello dato.

Se y appartiene al piano osculatore ad uno dei due elementi si ha un *invariante infinitesimo dipendente unicamente da un* E_3 *e un* E_2 tangenti, con piani osculatori distinti.

Se y è sulla retta d'intersezione dei due piani osculatori si ha un *invariante finito di contatto di due* E_3 *tangenti con piani osculatori distinti.*

Se infine i due E_3 hanno lo stesso piano osculatore, preso y in esso si trova che: *due* E_3 *gobbi aventi in comune il centro la tangente e il piano*

(1) *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV, ser. 6ª, 1931.

osculatore hanno, oltre l'invariante finito di contatto I. 3 *dipendente dai loro* E_2, *un altro invariante finito il cui valore si ottiene nel modo detto.*

Del resto questo secondo invariante può ottenersi proiettando i due E_3 dal loro centro su un piano generico ed applicando I. 3 ai due E_2 proiezioni.

Non così per l'invariante di due E_3 tangenti ma con diversi piani osculatori. Proiettando gli E_3 dal centro comune si avrebbero infatti due E_2 con lo stesso centro e tangenti distinte e questi non hanno un invariante finito; se si proiettassero da un punto del loro piano principale (di Halphen) si avrebbero due E_3 (di uno stesso piano) fra loro osculatori variabili col punto: in particolare prendendo questo sulla retta principale (da me definita) i due E_3 piani risulterebbero coincidenti.

Per chiarire completamente la situazione geometrica e le relazioni fra gli invarianti introdotti valgono i teoremi seguenti:

Siano dati un E_3 *di centro* x *e un* E_2 *di centro* ζ *in posizione generica (come in* II. 2*). Le cubiche considerate in* II. 2 *hanno un invariante di contatto dei loro* E_3 *(osculatori) in* x *e un invariante di contatto dei loro* E_3 *(a contatto del* 1° *ordine) in* ζ*; il primo di essi è uguale all'invariante di* E_3 *e di* E_2*, il cui significato geometrico è stato dato in* II. 2*, e il secondo al cubo di quest'invariante cambiato di segno.*

Dati due E_3 *a contatto del* 2° *ordine si considerino le cubiche sghembe definite da esse e da un* E_1 *generico: l'invariante delle due cubiche relativo al centro di* E_1 *non varia con questo.*

Dati due E_3 *a contatto del* 1° *ordine essi definiscono per ogni punto* P *dello spazio un piano e una retta invarianti: il piano (passante per il centro dei due* E_3 *e per* P*) contiene le tangenti alle cubiche sghembe definite dai due* E_3 *e che hanno in* P *lo stesso piano osculatore; questi piani osculatori formano fascio intorno alla retta invariante, situata nel piano per* P *tangente ai due* E_3*. Piano e retta invarianti possono costruirsi proiettando da* P *i due* E_3 *sopra un piano e applicando alle proiezioni quanto s'è detto in* I. 3.

L'invariante di contatto di due delle cubiche che hanno in P *la stessa tangente e lo stesso piano osculatore (dipendente dai loro* E_2 *in* P*) non varia al variare della tangente, ma dipende solo da* P*. Il rapporto di quest'invariante al cubo dell'invariante* I. 3 *relativo alle proiezioni (su un piano qualsiasi) da* P *dei due* E_3 *non dipende neppure da* P*: ed è l'invariante trovato dei due* E_3 *tangenti.*

È ovvio come gli stessi procedimenti si estendano alla ricerca di invarianti proiettivi di elementi curvilinei negli spazi a più dimensioni.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sul problema di Cauchy per equazioni differenziali a coefficienti singolari.* Nota di R. Einaudi, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

Il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z + f(x,y)$$

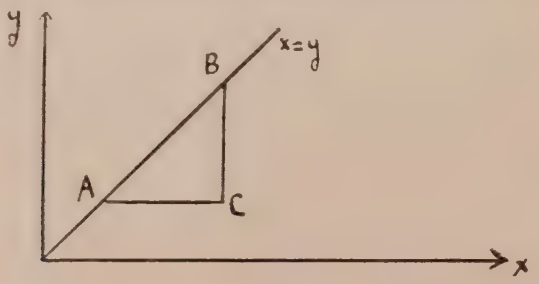
è stato l'oggetto di numerose ed importanti ricerche nel caso in cui i coefficienti a, b e c siano regolari nei punti della linea γ, sulla quale sono dati i valori della funzione z e della sua derivata normale.

Non mi consta invece che il problema di Cauchy sia stato mai trattato nel caso in cui i coefficienti a, b e c diventano singolari nei punti della linea γ. L'esame di un tipo, particolarmente notevole, di singolarità, costituisce appunto l'oggetto del presente lavoro.

§ 1. – Consideriamo l'equazione differenziale:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha(x,y)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta(x,y)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\gamma(x,y)}{(x-y)^2}z + (x-y)^k g(x,y) \qquad k \geq 0,$$

nella quale α, β, γ denotano tre funzioni continue nel triangolo ABC, indicato in figura, mentre g è una funzione continua in questo triangolo, non identicamente nulla sul lato AB, e proponiamoci di determinare quando l'equazione (1) ammette una soluzione continua, colle sue derivate prime, nel triangolo ABC, nulla, colle sue derivate prime, sul lato AB.



[1] Nella seduta del 1° dicembre 1935.

A tal uopo, scriviamo l'equazione (1) nella forma più generale:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda\left\{\frac{\alpha(x,y)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta(x,y)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\gamma(x,y)}{(x-y)^2}z\right\} + (x-y)^k g(x,y)$$

λ essendo un parametro da porsi uguale a *uno*, se si vuole che l'equazione (2) si riduca alla (1), e cerchiamo di soddisfare formalmente a questa equazione con uno sviluppo in serie del tipo:

$$(3)\qquad z = z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2 + \cdots$$

Sostituendo lo sviluppo (3) nell'equazione (2) ed uguagliando nei due membri i coefficienti delle potenze simili di λ, si trova:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x\,\partial y} = (x-y)^k g(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\alpha}{x-y}\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \dfrac{\beta}{x-y}\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + \dfrac{\gamma}{(x-y)^2} z_{n-1}. \end{cases}$$

Integrando ambo i membri delle (4) rispetto a x e a y, e imponendo che le funzioni z_i si annullino, colle loro derivate prime, per $x = y$, si trova:

$$(5)\qquad z_0 = \int_x^y d\eta \int_\eta^x (\xi-\eta)^k g(\xi,\eta)\, d\xi$$

$$(6)\qquad z_n = \int_x^y d\eta \int_\eta^x \left[\frac{\alpha(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\beta(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + \frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^2} z_{n-1}(\xi,\eta)\right] d\xi.$$

Ciò posto, indichiamo con M il massimo modulo della funzione $g(x,y)$ nel triangolo ABC. Dalla formula (5) si ricavano allora le diseguaglianze:

$$(7)\qquad \begin{cases} |z_0| \leq \dfrac{M}{(k+1)(k+2)}(x-y)^{k+2} \\ \left|\dfrac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leq \dfrac{M}{k+1}(x-y)^{k+1} \quad ; \quad \left|\dfrac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leq \dfrac{M}{k+1}(x-y)^{k+1}. \end{cases}$$

Indichiamo inoltre con m, n, p i massimi moduli delle funzioni α, β, γ nel triangolo ABC; si dimostra allora che, posto:

$$(8)\qquad \rho = \frac{m}{k+1} + \frac{n}{k+1} + \frac{p}{(k+1)(k+2)},$$

valgono le diseguaglianze

$$(9)\qquad \begin{cases} |\zeta_n| \leq \dfrac{\rho^n M}{(k+1)(k+2)}(x-y)^{k+2} \\ \left|\dfrac{\partial \zeta_n}{\partial x}\right| \leq \dfrac{\rho^n M}{k+1}(x-y)^{k+1} \quad ; \quad \left|\dfrac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right| \leq \dfrac{\rho^n M}{k+1}(x-y)^{k+1}. \end{cases}$$

Ed invero, dalle formule (6) si vede immediatamente che le diseguaglianze (9) risultano verificate per $n = i$, quando si ammettono valide per $n = i - 1$. Ma per $n = 1$, esse risultano verificate, in virtù delle diseguaglianze (7). Se ne deduce che esse sono valide per qualunque valore di n.

Le diseguaglianze (9) mostrano che, per $\lambda = 1$, la serie (3) e quelle che si ottengono derivandola rispetto a x e y termine a termine, sono uniformemente ed assolutamente convergenti nel triangolo ABC, *purchè sia* $\rho < 1$.

Dimostriamo ora che, nell'ipotesi $\lambda = 1$ e $\rho < 1$, la serie (3) soddisfa l'equazione differenziale (1). A tal uopo osserviamo che, detta S_n la somma dei primi n termini della serie (3), si ha, in virtù delle relazioni (5) e (6):

$$(10)\qquad S_n = \int_x^y d\eta \int_\eta^x (\xi-\eta)^k g(\xi,\eta)\, d\xi +$$

$$+ \int_x^y d\eta \int_\eta^x \left[\frac{\alpha(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\beta(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \eta} + \frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^2} S_{n-1}\right] d\xi.$$

Ma quando n tende a ∞, S_n, $\dfrac{\partial S_n}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial S_n}{\partial y}$ tendono uniformemente verso ζ, $\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}$; passando al limite nelle formule (10) per $n \to \infty$, si ricava pertanto

$$(11)\qquad \zeta(x,y) = \int_x^y d\eta \int_\eta^x \left[\frac{\alpha(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\beta(\xi,\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^2}\zeta(\xi,\eta) + \right.$$

$$\left. + (\xi-\eta)^k g(\xi,\eta)\right] d\xi,$$

da cui, derivando una volta rispetto a x e una volta rispetto a y, si ottiene precisamente la (1).

Concludendo, possiamo pertanto affermare che, *sè* $\rho < 1$, *l'equazione* (1) *ammette una soluzione costruibile col metodo delle successive approssimazioni, continua, colle derivate prime continue, nel triangolo* ABC, *infinitesimo sul lato* AB *di ordine* $\geq k+2$ [1], *colle derivate prime infinitesime di ordine* $\geq k+1$.

(1) Assumiamo qui, come nel seguito di questa Nota, la quantità $x - y$ come infinitesimo principale sul lato AB.

Va rilevato che il metodo delle successive approssimazioni, adottato in questa ricerca, porta a maggiorare la soluzione del problema di Cauchy con una serie geometrica, mentre nel caso regolare esso porta, come è noto, a maggiorare la soluzione del problema di Cauchy con una serie esponenziale.

§ 2. Riprendiamo la condizione (2), ed osserviamo che, se

$$m + n + p/2 < 1 ,$$

la diseguaglianza $\rho < 1$ risulta verificata qualunque sia k (purchè, si intende, $\geqq 0$), mentre se

$$m + n + p/2 \geqq 1 ,$$

la diseguaglianza $\rho < 1$ risulta verificata se $k > k^*$, k^* essendo la radice positiva o nulla dell'equazione

$$1 = \frac{m+n}{k+1} + \frac{p}{(k+1)(k+2)} .$$

Risolvendo questa equazione, si ottiene per k^* l'espressione:

$$(12) \quad k^* = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m + n + p/2 = 1 \\ \frac{1}{2}\left[m + n - 3 + \sqrt{(m+n-3)^2 + 8\,(m+n+p/2-1)}\right] & \\ & \text{se} \quad m + n + p/2 > 1 . \end{cases}$$

Ciò premesso, supponiamo $\rho < 1$ e dimostriamo che *la funzione* z, *costruibile col metodo delle successive approssimazioni, è l'unica soluzione continua, colle derivate prime continue, nel triangolo* ABC, *infinitesima sul lato* AB *di ordine* $\geqq 2$, *colle derivate prime infinitesime di ordine* $\geqq 1$, *se* $m + n + p/2 < 1$, *infinitesima sul lato* AB *di ordine* $> k^* + 2$, *colle derivate prime infinitesime di ordine* $> k^* + 1$, *se* $m + n + p/2 \geqq 1$.

A tal uopo, cominciamo coll'osservare che, detta Z una soluzione generica dell'equazione (1) che gode di questa proprietà, si può certamente determinare un numero N tale che, nel triangolo ABC valgano le diseguaglianze:

$$(13) \quad \begin{cases} |Z| \leqq \dfrac{N}{(h+1)(h+2)}(x-y)^{h+2} \\ \left|\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right| \leqq \dfrac{N}{h+1}(x-y)^{h+1} \quad ; \quad \left|\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right| \leqq \dfrac{N}{h+1}(x-y)^{h+1} \end{cases}$$

h essendo un numero soddisfacente alla condizione:

$$(14) \quad \begin{cases} h \geqq 0 & \text{se} \quad m + n + p/2 < 1 \\ h > k^* & \text{se} \quad m + n + p/2 \geqq 1 . \end{cases}$$

Consideriamo ora le differenze

$$U_n = Z - S_n \tag{15}$$

ed osserviamo che, in virtù delle relazioni ricorrenti (10), cui soddisfano le S_n, e dell'equazione integrodifferenziale (11), cui soddisfa la Z, si ha:

$$U_0 = \int_x^y d\eta \int_\eta^x \left[\frac{\alpha(\xi,\eta)}{\xi-\eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\beta(\xi,\eta)}{\xi-\eta} \frac{\partial Z}{\partial \eta} + \frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^2} Z(\xi,\eta) \right] d\xi \tag{16}$$

$$U_n = \int_x^y d\eta \int_\eta^x \left[\frac{\alpha(\xi,\eta)}{\xi-\eta} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\beta(\xi,\eta)}{\xi-\eta} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \eta} + \frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^2} U_{n-1}(\xi,\eta) \right] d\xi. \tag{17}$$

Tenendo conto delle diseguaglianze (13), si ricava dalla (16):

$$\begin{cases} |U_0| \leq \dfrac{\sigma N}{(h+1)(h+2)} (x-y)^{h+2} \\ \left| \dfrac{\partial U_0}{\partial x} \right| \leq \dfrac{\sigma N}{h+1} (x-y)^{h+1} \quad ; \quad \left| \dfrac{\partial U_0}{\partial y} \right| \leq \dfrac{\sigma N}{h+1} (x-y)^{h+1} \end{cases} \tag{18}$$

essendo

$$\sigma = \frac{m+n}{h+1} + \frac{p}{(h+1)(h+2)}. \tag{18'}$$

Dalle diseguaglianze (14) risulta immediatamente

$$\sigma < 1.$$

Per dimostrare il nostro asserto, basta ora osservare che, come dalle relazioni ricorrenti (6) si deducono, tenendo conto delle diseguaglianze (7), le diseguaglianze (9), così dalle relazioni ricorrenti (17) si deducono, tenendo conto delle diseguaglianze (18), le diseguaglianze:

$$|U_n| \leq \frac{\sigma^{n+1} N}{(h+1)(h+2)} (x-y)^{h+2} \tag{19}$$

delle quali, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene, in virtù della condizione $\sigma < 1$:

$$Z - z = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

§ 3. Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha(x,y)}{x-y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta(x,y)}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\gamma(x,y)}{(x-y)^2} z + f(x,y) \tag{20}$$

in cui f è una funzione continua nel triangolo ABC, *che diventa infinitesima di ordine comunque elevato in ogni punto del lato* AB. La funzione $f(x, y)$ si può allora rappresentare nella forma:

$$(21) \qquad f(x, y) = (x - y)^k g(x, y)$$

k essendo un numero soddisfacente alle condizioni:

$$(22) \qquad k \geq 0 \text{ se } m + n + p/2 < 1 \quad ; \quad k > k^* \text{ se } m + n + p/2 \geq 1$$

e $g(x, y)$ una funzione continua in tutto il triangolo ABC.

Per l'equazione differenziale che si ottiene, sostituendo nella (20) l'espressione della funzione $f(x, y)$ fornita dalla formula (21), si possono ripetere le considerazioni svolte nel § 1.

Da esse si deduce che, essendo, in virtù delle diseguaglianze (22), $\rho < 1$, e potendosi d'altra parte k scegliere grande quanto si vuole, *l'equazione differenziale* (20) *ammette certo una soluzione, costruibile col metodo delle successive approssimazioni, continua, colle sue derivate prime, nel triangolo* ABC, *infinitesima, colle sue derivate prime, di ordine comunque elevato, in ogni punto del lato* AB.

Infine, per questa soluzione vale il teorema di unicità enunciato nel § 2.

Ringrazio vivamente il prof. M. Picone per i consigli che mi ha fornito durante l'elaborazione di questa Nota.

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Applicazioni aerodinamiche.* Nota V[1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

13. Ala spezzata. Caso del Tchapligin e Arjanikov[2]. — La lamina bilatera, quale profilo di un'ala indefinita, si può chiamare, coi sigg. Tchapligin e Arjanikov, *ala spezzata*.

Si supponga l'ala mobile di moto traslatorio, rettilineo, uniforme, in un liquido in quiete all'infinito e si assuma la direzione del moto come verso negativo di un nuovo asse delle ascisse x' che supporremo orizzontale. Allora, nel moto relativo del liquido rispetto all'ala, la corrente investitrice avrà all'infinito direzione parallela al verso positivo di detto asse (v. fig. 4). Senza perdere in generalità supporremo l'asse y' rivolto verso l'alto, per cui, secondo le convenzioni fatte al n. 11, la R e la S misureranno, in valore e segno, la *resistenza diretta* e la *portanza*.

Si indichi ora con τ (angolo d'attacco) l'angolo che il lato OA dell'ala forma colla direzione negativa dell'asse Ox', contato positivamente in senso antiorario dall'asse al lato dell'ala; si supponga inoltre

$$(23) \qquad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} - 2\alpha < \tau < \frac{3\pi}{2} - 2\alpha .$$

Con queste convenzioni A sarà da chiamarsi la prora e B la poppa. L'angolo τ è legato all'angolo β finora considerato dalla relazione

$$\beta = -(\tau + \alpha).$$

Conveniamo ora cogli aerotecnici che il moto sia regolarizzato a poppa. Il valore della circolazione necessario per tale regolarizzazione viene fornito dalla (12'); sostituendo in essa a β il valore ora scritto, otteniamo

$$(12'') \qquad C = -\frac{4\pi V}{k} \operatorname{sen}(\sigma_1 + n\varepsilon - \alpha - \tau).$$

Dalle (19) si ha allora $F_B = 0$ e l'azione dinamica risulta costituita dalla spinta verticale di Joukowsky

$$(24) \qquad -\rho C V = \frac{4\pi\rho V^2}{k} \operatorname{sen}(\sigma_1 + n\varepsilon - \alpha - \tau),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1935.

(2) Vedi la precedente Nota IV in questi « Rendiconti », vol. XXII, fasc. 9–10, p. 411.

e da una forza diretta secondo $A \to O$, di intensità

$$(25) \qquad F_A = \frac{8\pi\rho V^2}{k^2 l} (\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varepsilon) \operatorname{sen}\sigma_1 \cos^2(\tau + \alpha - n\varepsilon).$$

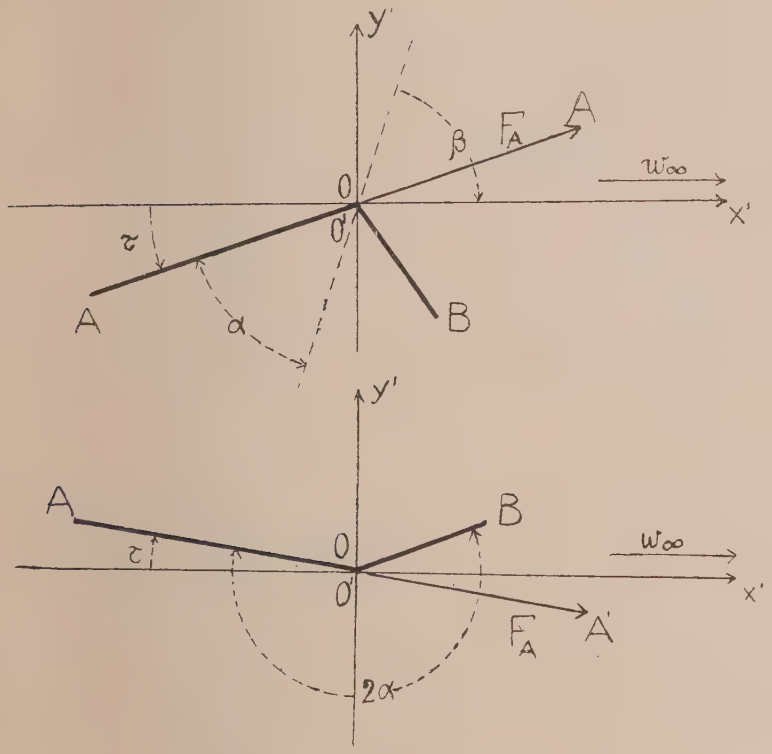


Fig. 4.

Come si è già avvertito nell'introduzione, Tchapligin e Arjanikov non trovano quest'ultima forza F_A, avendo essi ammesso *a priori* la validità del teorema di Kutta–Joukowsky nonostante la presenza della singolarità del moto nella cuspide A non regolarizzata.

L'azione di Joukowsky è nulla per

$$\tau = \tau_0 = \sigma_1 + n\varepsilon - \alpha,$$

(lo sarebbe anche per $\tau = \tau_0 - \pi$, ma tale valore esce dai limiti imposti alla variabilità di τ), ed è positiva per

$$\tau < \tau_0,$$

sempre compatibilmente colle (23).

L'angolo τ_0, la cui ampiezza dipende dall'apertura della lamina e dalla lunghezza dei suoi lati, è positivo per α acuto, negativo per α ottuso.

La componente verticale dell'azione aggiunta

$$F_A \operatorname{sen} \tau ,$$

ha lo stesso segno dell'angolo τ. Potremo allora concludere che, nei limiti consentiti alla variabilità di τ dalle (23):

a) Se $\alpha < \frac{\pi}{2}$, per ogni angolo d'attacco positivo minore di τ_0, la portanza dovuta alla forza aggiunta va ad aumentare l'azione sostentatrice di Joukowsky, mentre per angoli d'attacco negativi la forza aggiunta diminuisce tale azione;

b) Se $\alpha > \frac{\pi}{2}$, la spinta verticale di Joukowsky è positiva solo per angoli d'attacco negativi, maggiori in valore assoluto del valore assoluto di τ_0, e la forza aggiunta diminuisce tale portanza;

c) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha $\tau_0 = 0$: l'azione di Joukowsky è positiva per angoli d'attacco negativi, e la forza aggiunta produce una diminuzione della portanza.

Nel caso particolare in cui l'angolo d'attacco sia sufficientemente piccolo e l'apertura 2α del profilo alare sia compresa fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ potremo affermare che: *se l'ala volge al basso la concavità, la forza aggiunta aumenta la portanza di Joukowsky per angoli d'attacco positivi e la diminuisce per angoli d'attacco negativi; se l'ala volge al basso la convessità tale portanza viene sempre diminuita dalla forza aggiunta.*

L'azione diretta (componente orizzontale) acquista il valore

$$F_A \cos \tau ,$$

avendo F_A la forma (24); entro i limiti fissati per la variabilità di τ essa ha sempre il carattere di resistenza.

Riunendo i vari termini ed introducendo nelle formule l'angolo τ_0 definito sopra, otteniamo come espressione complessiva delle due componenti, orizzontale (R) e verticale (S), dell'azione dinamica, le seguenti formule

$$(26) \quad \begin{cases} R = \dfrac{8\pi\rho V^2}{k^2 l} (\operatorname{sen} \sigma_1 - \operatorname{sen} \varepsilon) \operatorname{sen} \sigma_1 \cos^2 (\tau - \tau_0 + \sigma_1) \cos \tau , \\ S = \dfrac{4\pi\rho V^2}{k} \left\{ \operatorname{sen} (\tau_0 - \tau) + \dfrac{2}{kl} \operatorname{sen} \sigma_1 (\operatorname{sen} \sigma_1 - \operatorname{sen} \varepsilon) \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot \cos^2 (\tau - \tau_0 + \sigma_1) \operatorname{sen} \tau \right\} , \end{cases}$$

avendo k, σ_1 ed ε il valore dato dalle (5), (2), (6).

Per l'ala a lati uguali basta porre nelle precedenti $\varepsilon = 0$ e dare a k e σ_1 i valori (2') e (5'') del n. 5.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha l'ala semplice con profilo rettilineo. Allora essendo $\tau_0 = 0$, $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$, $k = \frac{2}{l_0}$, ($2l_0$ lunghezza totale del profilo alare) si avrà

$$(26') \qquad \begin{cases} R = \pi\rho l_0 V^2 \operatorname{sen} 2\tau \cdot \operatorname{sen} \tau \\ S = -\pi\rho l_0 V^2 \operatorname{sen} 2\tau \cdot \cos \tau \end{cases}$$

come è ben noto [1].

14. Azioni dinamiche nel caso della doppia regolarizzazione. — Assai semplice si presenta l'espressione dell'azione dinamica nel caso del moto regolarizzato in entrambe le cuspidi. Mantenendo le posizioni fatte al numero precedente, e tenendo presenti le formule considerate al n. 10, possiamo dedurre l'angolo d'attacco per il quale ha luogo la doppia regolarizzazione. È il seguente

$$\tau = -\alpha + n\varepsilon + \frac{\pi}{2} .$$

Esso è sempre compreso nei limiti di variabilità stabiliti nella (23), se $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, può non esserlo in caso contrario.

La circolazione acquista allora il valore

$$C = \frac{4\pi V \cos \sigma_1}{k} = -\frac{4\pi V n \cos \varepsilon}{k} .$$

È nulla la forza aggiunta F_A, essendo cessato il comportamento singolare del moto in A; l'azione dinamica si riduce alla sola spinta verticale di Joukowsky che, tenuto presente il valore di k dato dalla (5), diventa

$$(27) \qquad S = 2\pi\rho l \sqrt{m}\, \Gamma V^2 \text{ [2]},$$

avendo posto come al n. 10

$$\Gamma = \frac{n}{(1-n)^{\frac{1-n}{2}} \cdot (1+n)^{\frac{1+n}{2}}} \text{ [3]}.$$

(1) Vedi la Nota già citata del Cisotti, *Una notevole eccezione* ecc.

(2) La formula (27) coincide con quella ottenuta dal Tchapligin e Arjanikov, nel lavoro più volte citato [p. 13, formula (40)].

(3) Nel lavoro ora accennato viene dato anche, per n piccolo, un valore approssimato del fattore Γ,

$$\Gamma = 1 - \frac{n^2}{2} .$$

Esiste quindi per ogni ala spezzata, con $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$ [1], *un opportuno angolo d'attacco per il quale il moto traslatorio, rettilineo, uniforme dell'ala avviene senza resistenza diretta.*

L'azione dinamica è rivolta verso l'alto o verso il basso secondo che $n \gtrless 0$, *cioè secondo che l'ala volge verso l'alto o verso il basso la convessità. Essa è direttamente proporzionale alla radice quadrata del prodotto delle lunghezze dei due lati, al quadrato della velocità e dipende dall'apertura dell'ala mediante il fattore* Γ, sulla cui variabilità si è fatto cenno al n. 10.

Per l'ala equilatera la doppia regolarizzazione si ha per $\tau = \frac{\pi}{2} - \alpha$ [2], cioè quando l'ala avanza normalmente alla sua bisettrice, e la portanza risulta proporzionale alla lunghezza comune dei due lati, a V^2 e a Γ.

Per $n = 0$, (ala semplice), la doppia regolarizzazione si ha per $\tau = 0$ e la portanza è allora nulla.

15. Ala con appendice. — Supponiamo che la lunghezza $\lambda = ml$, del lato OB dell'ala, sia molto piccola rispetto alla lunghezza l del lato OA. In queste condizioni OA si può pensare come il profilo di un'ala piana munito di appendice e che costituisce uno schema di ala munita di *alettone* ad uno dei suoi estremi. Supponiamo addirittura che il rapporto $m = \frac{\lambda}{l}$ sia infinitesimo, anzi, per ragioni di semplicità suggerite dai calcoli ulteriori, assumiamo come infinitesimo del primo ordine il valore

$$\delta = \sqrt{m} = \sqrt{\frac{\lambda}{l}}.$$

Determiniamo innanzi tutto il valore delle varie costanti, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo in δ.

La (6), che definisce in forma implicita $\operatorname{sen}\varepsilon$ come funzione di m, ci permette di dedurre

$$\operatorname{sen}\varepsilon = -1 + 2N\delta^2,$$

avendo posto

$$N = \frac{1}{(1-n)^{1-n}\cdot(1+n)^{1+n}}.$$

(1) In ogni caso esiste un opportuno angolo d'attacco per il quale ha luogo la doppia regolarizzazione. Quando però $2\alpha < \frac{\pi}{2}$, oppure $2\alpha > \frac{3\pi}{2}$, esso può uscire dai limiti imposti colle (23).

(2) Quest'angolo rientra nei limiti stabiliti dalle (23) qualunque sia α.

Si ha allora colla stessa approssimazione

$$\cos\varepsilon = 2\delta\sqrt{N},$$

e quindi in base alla (2) e alla (5):

$$\cos\sigma_1 = -2\Gamma\delta \quad ; \quad \operatorname{sen}\sigma_1 = 1 - 2\Gamma^2\delta^2 \quad ; \quad k = \frac{1}{l},$$

essendo Γ il fattore funzione di n definito dalla (17) del n. 10. Sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo in δ, abbiamo anche

$$\varepsilon + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,sen}\, 2\delta\sqrt{N} = 2\delta\sqrt{N},$$

$$\sigma_1 - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,sen}\, 2\Gamma\delta = 2\Gamma\delta,$$

$$n\varepsilon - \sigma_1 = -\frac{\pi}{2}(n+1) = -\pi + \alpha,$$

$$n\varepsilon + \sigma_1 = 4\Gamma\delta + \alpha.$$

Tenendo conto di questi valori, i due fattori F_A ed F_B, che caratterizzano l'azione dinamica dovuta alle cuspidi, nel caso generale di una corrente traslocircolatoria qualunque che investa l'ala, acquistano, in base alle (19), colla solita approssimazione, la forma seguente

$$(28) \qquad \begin{cases} F_A = F_A^0 + \delta F_A' + \delta^2 F_A'', \\ F_B = F_B^0 + \delta F_B' + \delta^2 F_B'', \end{cases}$$

con

$$(29) \qquad \begin{cases} F_A^0 = \dfrac{\pi\rho l}{4} V_A^2, \\ F_B^0 = \dfrac{\pi\rho l}{4} \nu V_B^2, \end{cases}$$

$$(29') \qquad \begin{cases} F_A' = 0, \\ F_B' = 2\pi\rho l \nu\Gamma V V_B \cos\tau, \end{cases}$$

$$(29'') \qquad \begin{cases} F_A'' = -\dfrac{\pi\rho l}{4} \nu V_A^2, \\ F_B'' = \dfrac{\pi\rho l}{2} \nu\Gamma^2 \left[V_B^2 + 8 V V_B \operatorname{sen}\tau + 8 V^2 \cos^2\tau \right], \end{cases}$$

avendo posto

$$V_A = V \operatorname{sen}\tau + \frac{C}{\pi l} \quad ; \quad V_B = -V \operatorname{sen}\tau + \frac{C}{\pi l} \quad ; \quad \nu = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n.$$

L'angolo τ poi ha lo stesso valore che al numero precedente senza che siano necessarie le restrizioni (23).

Le (29) dànno la parte dell'azione dinamica che è indipendente dalla lunghezza dell'alettone, le (29′) esprimono la parte proporzionale alla radice quadrata di detta lunghezza, le (29″), infine, la parte proporzionale alla prima potenza della lunghezza stessa.

Supponendo l'appendice sufficientemente corta, possiamo, in una prima approssimazione, tener conto solo dei valori (29) e confrontarli con quelli che si hanno per il caso di un'ala semplice senza appendice di uguale lunghezza ed inclinazione, e cioè (n. 12, *d*):

$$F_A = \frac{\pi \rho l}{4} V_A^2 \quad ; \quad F_B = \frac{\pi \rho l}{4} V_B^2 ,$$

avendo V_A e V_B gli stessi valori attribuiti sopra.

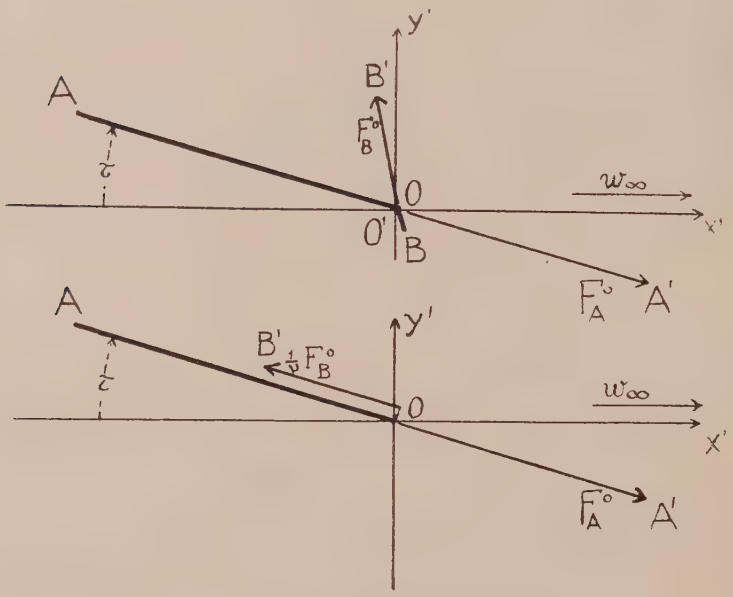


Fig. 5.

Da tale confronto risulta che (v. anche fig. 5):

L'esistenza di un'appendice, comunque piccola, in un profilo alare rettilineo, modifica profondamente le azioni dinamiche esercitate su detto profilo da una corrente traslocircolatoria qualunque. Precisamente, mentre lascia inalterato il contributo F_A *portato dalla cuspide libera in* A, *fa assumere all'altro termine* F_B

la direzione parallela all'appendice anzichè parallela all'ala, riducendone l'intensità proporzionalmente al fattore

$$\nu = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2,$$

che dipende solo dall'inclinazione dell'appendice sull'ala.

16. Alettone regolarizzato. — Esaminiamo ora il caso in cui, sempre mantenendo l'appendice molto corta, il moto sia regolarizzato alla estremità dell'alettone. Sostituendo allora nella (12″) del n. 13, ai vari angoli i valori determinati al n. 15, otteniamo per la circolazione il seguente valore

$$C = \pi l V \operatorname{sen}(\tau - 4\Gamma\delta),$$

essendo Γ il fattore già considerato al numero precedente.

Otteniamo allora a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo in δ

$$(30)\quad \begin{cases} F_B = 0 \\ F_A = \pi\rho l V^2 \{ \operatorname{sen}^2\tau - 2\Gamma\delta \operatorname{sen} 2\tau + [4\Gamma^2 - (12\Gamma^2 + \nu)\operatorname{sen}^2\tau]\delta^2 \}, \\ -\rho C V = -\pi\rho l V^2 \{ \operatorname{sen}\tau - 4\Gamma\delta\cos\tau - 8\Gamma^2\delta^2 \operatorname{sen}\tau \}. \end{cases}$$

È facile verificare [cfr. la (26′) del n. 13], che i termini di queste formule indipendenti da δ, esprimono l'azione dinamica relativa al caso dell'ala semplice, con uguale lunghezza ed inclinazione, priva dell'alettone; gli altri esprimono la variazione dovuta alla presenza dell'alettone.

Indicando con ΔR, ΔS l'aumento di resistenza e di portanza relativo, e supponendo l'angolo d'attacco τ abbastanza piccolo perchè sia possibile trascurare i termini di ordine superiore al secondo in δ e $\operatorname{sen}\tau$ complessivamente, abbiamo

$$(31)\quad \begin{cases} \Delta R = 0, \\ \Delta S = 4\pi\rho l V^2 \Gamma\delta. \end{cases}$$

La resistenza rimane quindi sensibilmente inalterata nelle accennate condizioni. La portanza invece viene aumentata se l'alettone è rivolto verso il basso ($2\alpha < \pi$, $n > 0$), *e diminuita se l'alettone è rivolto verso l'alto* ($2\alpha > \pi$, $n < 0$). *La variazione è in ogni caso direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza dell'alettone, al quadrato della velocità e dipende dall'inclinazione dell'alettone sull'ala mediante il fattore*

$$(17)\quad \Gamma = \frac{n}{(1-n)^{\frac{1-n}{2}} \cdot (1+n)^{\frac{1+n}{2}}}.$$

Ricordando la discussione fatta al n. 10 riguardo appunto a questo fattore, osserviamo che, a parità di altre condizioni, vi è un massimo nell'aumento di portanza dovuto all'alettone, per il valore dell'angolo di inclinazione sull'ala, $2\alpha = 30°$ (approssimato per eccesso); e un massimo negativo per $2\alpha = 330°$ circa.

Meccanica. — *Equazioni generali della turbolenza.* Nota di F. Odone, presentata [1] dal Corrisp. P. Burgatti.

In questa Nota dò anzitutto forma assoluta, seguendo i metodi dell'Analisi Vettoriale Generale [2], alle equazioni della turbolenza proposte da Mattioli; in seguito espongo una modificazione alla teoria di Mattioli, in modo che le equazioni generali si riducano, quando il moto non è turbolento, alle equazioni classiche idrodinamiche del moto dei fluidi sia viscosi che perfetti.

1. – Forma assoluta delle equazioni della turbolenza secondo Mattioli.

Mi riferisco alla Nota seguente: G. Mattioli, *Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza* [3].

Le grandezze che, secondo Mattioli, definiscono un mezzo turbolento sono le due seguenti:

1) la densità di quantità di moto $\rho \boldsymbol{v}$, essendo ρ la densità e $\boldsymbol{v}$ il vettore velocità;

2) la densità del momento della quantità di moto $\rho\lambda^2 \boldsymbol{\omega}$, essendo $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ e λ una lunghezza costante, il cui valore è da fissarsi per ogni particolare problema di moto; per un moto non turbolento si pone $\lambda = 0$.

In un fluido, sede di moto turbolento, vi son da considerare tre sorta di tensioni interne:

1) tensioni provenienti dall'azione di vincolo che le parti contigue esercitano le une sulle altre; Mattioli ammette che, come nelle teorie classiche, tale azione di vincolo sia rappresentata dalla pressione $-p$, più esattamente da un'omografia che si riduce ad un'omotetia;

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(2) *Analisi Vettoriale Generale.* Zanichelli, Bologna. Vol. I, *Trasformazioni lineari*, 1929, a cura di C. Burali-Forti e R. Marcolongo. Nel seguito indicherò tale opera col richiamo A. V. G., I. – Vol. III, *Teoria matematica della elasticità*, 1931, a cura di P. Burgatti. Nel seguito indicherò tale opera col richiamo A. V. G., III.

(3) «Rendiconti della R. Acc. dei Lincei», vol. XXII, ser. 6ª, luglio 1935.

2) tensioni provenienti da un trasporto di quantità di moto: Mattioli ammette che le tensioni corrispondenti a questo trasporto siano date da una dilatazione τ_m a cui assegna l'espressione seguente

$$\tau_m = \rho\,(\varepsilon + \nu)\left(2\,\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\bigwedge - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right),$$

essendo ν il coefficiente di viscosità ed ε il coefficiente di trasporto turbolento.

Si vede facilmente che a τ_m può anche essere data la forma seguente (A. V. G., III, p. 132 ed A. V. G., I, p. 69, form. [6])

$$\tau_m = \frac{2}{3}\,\rho\,(\varepsilon + \nu)\,(3 - \mathrm{I}_1)\,\mathrm{D}\,\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}},$$

da cui risulta subito la condizione (A. V. G., I, p. 59, form. [3])

$$\mathrm{I}_1\,\tau_m = 0;$$

3) tensioni provenienti da un trasporto di momento di quantità di moto; Mattioli ammette che le tensioni corrispondenti a questo trasporto siano date da un'omografia assiale σ, a cui assegna l'espressione

$$\sigma = -\frac{\mathbf{M}\bigwedge}{2},$$

essendo $\mathbf{M}$ il vettore definito da

$$-\mathbf{M} = \lambda^2\,\frac{d\,(\rho\omega)}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{\psi},$$

dove $\boldsymbol{\psi}$ è un vettore, detto *vettore di turbolenza d'attrito*, da precisare per ogni singolo problema e che si deve considerare noto.

L'omografia β_m delle tensioni interne è quindi data da

$$\beta_m = \tau_m + \sigma - p,$$

in modo che la tensione agente sull'elemento superficiale di normale $\boldsymbol{n}$ è espressa, per unità d'area, da (A. V. G., III, p. 116)

$$\beta_m\,\boldsymbol{n}.$$

Determinata così l'omografia delle tensioni interne, Mattioli applica i teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto (completando l'equazione che esprime quest'ultimo con l'aggiunta di due termini per tener conto dell'agitazione turbolenta [1]); osservando che $\frac{d}{dl}\,(\rho\,dS) = 0$

(1) Notiamo che senza l'aggiunta di questi termini il teorema del momento delle quantità di moto condurrebbe al risultato $\mathbf{M} = 0$, cioè proverebbe che β_m dev'essere una dilatazione.

ed applicando i teoremi del gradiente (A. V. G., I, p. 231, form. [3] e p. 236, form. [6]), ottiene le equazioni seguenti

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{grad}(\sigma + \tau_m) - \operatorname{grad} p ,$$

$$\rho \frac{d\lambda^2 \boldsymbol{\omega}}{dt} = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon \frac{d\lambda^2 \boldsymbol{\omega}}{d\mathrm{P}}\right) - \mathbf{M} ,$$

essendo $\rho\mathbf{F}$ il vettore della forza di massa applicata al sistema. Tenendo conto che $\lambda = \text{cost}$, $\sigma = -\frac{\mathbf{M}\bigwedge}{2}$ e quindi (A. V. G., I, p. 190, form. [3]) $\operatorname{grad}\sigma = \frac{\operatorname{rot}\mathbf{M}}{2}$; le equazioni precedenti possono anche scriversi

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{grad}\tau_m + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{M} - \operatorname{grad} p$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathrm{P}}\right) - \frac{\mathbf{M}}{\lambda^2} .$$

Riassumendo si ha: le equazioni generali della turbolenza sono, secondo Mattioli, le due equazioni precedenti, dove $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M}$, τ_m hanno i valori prima indicati. A queste equazioni sono poi da aggiungere l'equazione di continuità e l'equazione di stato, cioè $\frac{d}{dt}(\rho\, d\mathrm{S}) = 0$ ossia $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$, ed $f(\rho, p, \mathrm{T}) = 0$.

2. – Funzioni da determinare nella teoria di Mattioli ed equazioni a cui esse debbono soddisfare.

Le variabili sono $\mathrm{P}(x, y, z)$ e t. Le grandezze date sono: $\mathbf{F}$, ψ, λ. Le grandezze da determinare sono: $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, p, ρ, ε, ν, T.

Noto $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t)$, è pure noto $\boldsymbol{\omega}$ perchè dev'essere $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Noti ρ, p pure noto T perchè dev'essere $f(\rho, p, \mathrm{T}) = 0$.

Restano da determinare $\boldsymbol{v}$, p, ρ, ε, ν, cioè sette numeri.

Si hanno le sette equazioni:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 ,$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{grad}\tau_m + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{M} - \operatorname{grad} p ,$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathrm{P}}\right) - \frac{\mathbf{M}}{\lambda^2} ,$$

dove tutto è esprimibile in funzione di $\boldsymbol{v}$, p, ρ, ε, ν.

Si hanno dunque sette funzioni con sette equazioni; resterebbe da provare che queste equazioni ammettono una ed una sola soluzione (A. V. G., III, p. 325).

Però per ottenere che il numero delle equazioni coincida con quello delle funzioni, abbiamo dovuto supporre che ν, coefficiente di viscosità cinematica, sia una funzione di P e t, mentre di solito ν si ritiene noto e costante. Riteniamo ν funzione di P e t; ma supponiamo, come spesso si fa nella meccanica dei liquidi, che sia $\rho = f(p)$; il numero delle equazioni supera allora il numero delle funzioni da determinare; le equazioni restano fra loro compatibili? E in generale, se alle equazioni precedenti si aggiungono le relazioni supplementari a cui deve soddisfare la temperatura [1], il numero delle equazioni viene a superare il numero delle funzioni; il problema è ancora possibile? Mi pare quindi che la teoria di Mattioli conduca a delle equazioni in soprannumero.

Inoltre, supponendo il moto non turbolento, cioè $\varepsilon = \lambda = 0$ e quindi $\mathbf{M} = 0$, le equazioni di Mattioli non si riducono esattamente alle equazioni classiche dell'idrodinamica, pur conservandone la forma; mentre sarebbe desiderabile (per non dire logicamente necessario) che le equazioni della turbolenza contengano, come sotto caso, le equazioni dell'idrodinamica classica.

Per raggiungere questo risultato ed insieme eliminare l'inconveniente detto sopra, che cioè il numero delle equazioni superi quello delle funzioni, propongo di modificare la teoria di Mattioli nel modo seguente.

3. - Nuovo modo di considerare le equazioni della turbolenza.

Seguiamo la teoria classica del moto dei fluidi viscosi, modificandola in base alle idee esposte da Mattioli [2] per tener conto dell'agitazione turbolenta.

Chiameremo mezzo turbolento un mezzo fluido in cui l'omografia delle tensioni interne sia data

$$\beta = \tau + \sigma - p,$$

essendo:

1) $-p$ un'omotetia (pressione) che tien conto delle azioni di vincolo tra le varie parti;

2) τ un'omografia, che tien conto degli sforzi che non producono delle coppie, e riducibile quindi ad una dilatazione; per τ assumeremo l'espressione

(1) Si veda Bouasse, *Hydrodynamique générale*, p. 7. Paris, Delagrave, 1928. Si veda pure, per una trattazione più generale, Duhem, *Traité d'Energétique*, to. II, cap. XV. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

(2) Accettiamo le formule proposte da Mattioli, senza voler con questo affermare la loro validità sperimentale.

$$\tau = \tau_c + \tau'_m = (\eta I_1 + 2\mu) D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \frac{2}{3}\rho\varepsilon (3 - I_1) D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP},$$

ossia

$$\tau = \left[\left(\eta - \frac{2}{3}\rho\varepsilon\right) I_1 + 2(\mu + \rho\varepsilon)\right] D \frac{d\boldsymbol{v}}{dP},$$

in modo che τ è la somma della dilatazione classica τ_c relativa agli sforzi viscosi [1] con la dilatazione τ'_m introdotta da Mattioli per tener conto della turbolenza; se il moto non è turbolento si ha $\varepsilon = 0$;

3) σ un'omografia che tien conto degli sforzi producenti delle coppie e riducibile quindi ad un'assiale; a σ daremo la forma

$$\sigma = -\frac{\mathbf{M} \wedge}{2},$$

con $\mathbf{M}$ vettore che, come vedremo, resterà determinato dal teorema del momento delle quantità di moto.

Applichiamo ora i teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto, indicando con S il volume occupato dal fluido turbolento, con Σ la superficie che limita S e con $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario normale in ogni punto a Σ e volto verso l'esterno.

Il teorema delle quantità di moto ci dà (A. V. G., III, p. 118)

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho \boldsymbol{v}\, dS = \iiint \rho \mathbf{F}\, dS + \iint \beta \boldsymbol{n}\, d\Sigma,$$

essendo $\mathbf{F}$ il vettore della forza di massa applicata al sistema; tenendo conto che $\frac{d}{dt}(\rho\, dS) = 0$ ed applicando il teorema del gradiente (A. V. G., I, p. 231, form. [3]) l'equazione precedente fornisce:

$$(\alpha) \qquad \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{grad} \beta.$$

Il teorema del momento delle quantità di moto dev'essere scritto così:

$$\frac{d}{dt}\iiint (P - o) \wedge \rho \boldsymbol{v}\, dS + \frac{d}{dt}\iiint \rho\lambda^2 \boldsymbol{\omega}\, dS = \iiint (P - o) \wedge \rho \mathbf{F}\, ds +$$

$$+ \iint (P - o) \wedge \beta \boldsymbol{n}\, d\Sigma + \iiint \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon \frac{d\lambda^2 \boldsymbol{\omega}}{dP}\right) dS,$$

(1) Si veda Bouasse, *Hydrodynamique générale*, p. 169 ed anche A. V. G., III, p. 132.

dove i termini contenenti λ sono stati introdotti per tener conto dei momenti delle quantità di moto dovuti all'agitazione turbolenta [1]; notando che $\frac{d}{dt}(\rho\, dS) = 0$, applicando il teorema del gradiente (A. V. G., I, p. 236, form. [6]) e ricordando la (α), dall'equazione precedente risulta

$$-2\,V\beta = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon\frac{d\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{dP}\right) - \rho\frac{d\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

ossia (A. V. G., I, p. 78, form. [10])

$$\mathbf{M} = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon\frac{d\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{dP}\right) - \rho\frac{d\lambda^2\,\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

relazione che, supponendo $\lambda =$ costante, determina $\mathbf{M}$ in funzione di $\boldsymbol{v}$. Da notare che, se il moto non è turbolento, si ha $\lambda = 0$ e quindi anche $\mathbf{M} = 0$.

In conclusione, l'equazione di un moto turbolento è data da

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \operatorname{grad}\tau + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{M} - \operatorname{grad}p, \tag{1}$$

che è l'equazione (α) sviluppata, essendo

$$\begin{cases} \tau = \left[\left(\eta - \frac{2}{3}\rho\varepsilon\right)I_1 + 2(\mu + \rho\varepsilon)\right] D\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}, \\ \mathbf{M} = \operatorname{grad}\left(\rho\varepsilon\lambda^2\,\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dP}\right) - \rho\lambda^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \\ \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}. \end{cases}$$

Se il moto non è turbolento si ha $\varepsilon = \lambda = 0$ e quindi

$$\tau = (\eta I_1 + 2\mu)\, D\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \quad , \quad \mathbf{M} = 0;$$

l'equazione (1) si riduce all'equazione classica dei fluidi viscosi [2].

(1) Sull'introduzione di coppie elementari anche nel campo della teoria classica si veda A. V. G., III, p. 119 ed anche i lavori di DUHEM.

(2) Desidero notare che rot $\boldsymbol{v}$ *non* è l'elemento caratteristico di un moto turbolento; anche un moto laminare può essere un moto rotazionale. Per esempio, l'efflusso alla Poiseuille è certo un moto laminare e tuttavia rot $\boldsymbol{v}$ in questo moto, che è anche un moto permanente, è diverso da zero. Se infatti $\boldsymbol{k}$ è il vettore unitario parallelo all'asse del tubo e nel senso del moto, ed r la distanza dall'asse si ha: $\boldsymbol{v} = w(r)\cdot\boldsymbol{k}$. L'equazione di questo

Se il moto non è turbolento ed il fluido è perfetto, si ha $\varepsilon = \lambda = \eta = \mu = 0$ e quindi $\tau = 0$, $\mathbf{M} = 0$; l'equazione (1) si riduce all'equazione classica dei fluidi perfetti.

Nel caso generale di un moto turbolento le funzioni incognite sono $\boldsymbol{v}, p, \rho, \varepsilon$ oppure $\boldsymbol{v}, p, \rho, \varepsilon, \mathrm{T}$ se si considera anche la temperatura.

Le equazioni del problema sono la (1) e queste altre:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \quad , \quad f(\rho, p, \mathrm{T}) = 0$$

ed infine la relazione supplementare a cui deve soddisfare la temperatura.

In generale dunque si ha un numero di equazioni inferiore di un'unità al numero delle funzioni da determinare; il numero delle funzioni diventa eguale al numero delle equazioni quando si conosca ε, coefficiente cinematico di turbolenza; resterebbe quindi da precisare come si può trovare ε in funzione di $\boldsymbol{v}$, o meglio ancora in funzione del numero di Reynolds [1].

moto si riduce a $\mu \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p$, ossia a $\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{dp}{dz}$ (si veda p. es. Bouasse, *Hydrodynamique générale*, p. 200); $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ è quindi diverso da zero e difatti si ha (A. V. G., I, p. 182, form. [2]) $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} w \wedge \boldsymbol{k} = \frac{dw}{dr} \operatorname{grad} r \wedge \boldsymbol{k}$.

Notiamo anche che un moto vorticoso, nel senso che questa parola ha in fisica (si veda Bouasse, *Tourbillons*, to. I, p. 6), può anche essere correntilineo, cioè nel fluido possono esistere delle linee di corrente ben definite; il moto vorticoso diventa turbolento quando non esistono più delle linee di corrente (si veda Bouasse, *Tourbillons*, to. I, cap. VIII, in particolare p. 320 e p. 324).

(1) Per la dipendenza di ε dal numero di Reynolds nel caso dell'efflusso turbolento da tubi, si veda: F. Liceni, *Sopra l'influenza del numero di Reynolds sull'efflusso turbolento nei tubi.* «L'Energia Elettrica», numero del giugno 1935.

Da notare che nel caso di turbolenza libera, in cui secondo Mattioli $\mathbf{M} = 0$, condizione a cui si soddisfa supponendo $\lambda = 0$, si può probabilmente supporre $\varepsilon =$ costante (si veda G. Mattioli, *Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti.* «Rend. Sem. Matematico di Padova», gennaio 1933); nel caso di turbolenza d'attrito invece, in cui $\lambda = 0$, ε dipende dal posto e dalla velocità attraverso il numero di Reynolds (si veda la Nota citata di F. Liceni).

Meccanica. — *Sui sistemi assoluti di unità di misura.* Nota di F. Odone presentata [1] dal Corrisp. G. Giorgi.

Le ricerche sui possibili sistemi di unità di misura da usarsi in fisica sono assai numerose. Ancora recentemente a tale proposito furono pubblicate dal prof. Giorgi e dall'ing. Laboccetta presso questi stessi « Rendiconti » delle Note assai interessanti [2]. Viene posto in evidenza da questi studi che la definizione di un sistema di unità riposa su delle convenzioni liberamente scelte e che si possono quindi avere, oltre ai sistemi con tre grandezze primitive: lunghezze, masse, tempi, sistemi con più di 3 grandezze primitive (p. es., sistema Giorgi o sistema MKSΩ) e sistemi con meno di tre grandezze primitive; in particolare si possono avere dei sistemi con una sola grandezza primitiva.

Questa Nota si collega alle ricerche ora ricordate. In essa si illustra in modo elementare come si possano ottenere dei sistemi con una sola grandezza primitiva e si espongono le proprietà di tali sistemi; in particolare si determinano le dimensioni delle principali grandezze ed i valori delle loro unità nel sistema che ha la lunghezza come sola grandezza primitiva ed il centimetro come unità di lunghezza.

Il punto di partenza sta nella definizione di sistema assoluto di unità. Prima di dare questa definizione, premettiamo un'osservazione. Sia fissato arbitrariamente un sistema di unità. Nelle formule del sistema esprimenti le leggi fisiche figurano, oltre alle lettere rappresentanti i numeri che misurano, rispetto alle unità prescelte, le grandezze su cui si opera, dei coefficienti i quali si dividono in due categorie: *coefficienti dimensionali*, il cui valore cambia cambiando le unità di misura, e *coefficienti numerici*, il cui valore non dipende dalla scelta delle unità. Per esempio: il sistema di unità prescelto sia un sistema che ha come grandezze primitive quelle di lunghezza, massa, tempo. Nella formula della gravitazione universale

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(2) Si veda in particolare: G. Giorgi, *Sulle grandezze meccaniche fondamentali.* Questi « Rendiconti », vol. XXI, maggio 1935, pp. 611–614; L. Laboccetta, *Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero e della curvatura dello spazio.* Questi « Rendiconti », vol. XX, novembre 1934, pp. 327–333.

il coefficiente γ è un coefficiente dimensionale; invece nella formula che dà la durata delle piccole oscillazioni pendolari

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

il coefficiente 2π è un coefficiente numerico; il suo valore non dipende dalle unità di misura.

Ciò posto, chiameremo *sistema assoluto di unità* (in senso stretto) ogni sistema nel quale le grandezze primitive siano scelte in modo che il numero dei coefficienti dimensionali sia ridotto al minimo.

Possiamo provare facilmente che un sistema assoluto (nel senso ora precisato) di unità per la meccanica e l'elettromagnetismo deve possedere una sola grandezza primitiva. Infatti: le leggi dedotte dai principî della meccanica scritte nel modo tradizionale senza coefficienti dimensionali lasciano sussistere tre grandezze primitive, p. es., lunghezze, masse, tempi. Ma con queste tre grandezze primitive la legge dell'attrazione universale contiene un coefficiente dimensionale. Possiamo trasformarlo in un coefficiente numerico senza dimensioni e con un valore costante arbitrariamente prefissato facendo derivare, nel modo noto, l'unità di massa da quelle di lunghezza e di tempo. Si può in particolare renderlo dimensionalmente e numericamente eguale ad 1; basta prendere come unità quella massa che ad un'altra massa *qualunque* posta alla distanza 1 imprime l'accelerazione 1 [1]. Se poi passiamo all'elettromagnetismo si sa che sia il sistema elettrostatico sia il sistema elettromagnetico introducono un solo coefficiente dimensionale o potenze di esso; questo coefficiente ha le dimensioni di una velocità ed il suo valore coincide con la velocità c della luce. Possiamo rendere eguale ad 1 questo coefficiente; si elimina così ogni coefficiente dimensionale e si ottiene per di più la coincidenza del sistema elettrostatico con quello elettromagnetico; basta per questo far derivare, p. es., l'unità di tempo da quella di lunghezza, in modo che la velocità della luce risulti sempre espressa dal numero 1; ciò vuol dire che come unità di tempo si deve prendere il tempo impiegato dalla luce a percorrere nel vuoto l'unità di lunghezza e che quindi l'unità di tempo deve variare proporzionalmente a quella di lunghezza. Facendo dunque $\gamma = 1$, $c = 1$ e conservando le ordinarie formule di relazione tra le varie grandezze si ottiene un sistema di unità senza coefficienti dimensionali, in cui coincidono il sistema elettrostatico e quello elettromagnetico ed in cui c'è una sola classe di grandezze primitive, p. es., le lunghezze.

(1) Infatti: da $f = ma$, $f = \frac{mm_1}{r^2}$ si ha $ma = \frac{mm_1}{r^2}$, ossia $m_1 = ar^2$ e quindi m_1 vale 1 se vale pure 1 l'accelerazione a acquistata dalla massa generica m che si trovi ad una distanza $r = 1$ dalla massa m_1.

Ad illustrazione di queste considerazioni determiniamo le dimensioni delle principali grandezze nel sistema assoluto che ha la lunghezza come sola grandezza primitiva. Si trova facilmente il quadro seguente:

Grandezza	Dimensione	Grandezza	Dimensione
Lunghezza	L	Carica elettrica	L
Tempo	L	Intensità di corrente	L^0
Velocità	L^0	f. e. m. – d. d. p.	L^0
Accelerazione	L^{-1}	Resistenza	L^0
Massa	L	Capacità	L
Forza	L^0	Induttanza	L
Lavoro	L	Massa magnetica	L
Potenza	L^0	Campo magnetico	L^{-1}
		Potenza magnetica	L^0

Calcoliamo adesso quanto valgono le unità di misura delle grandezze ora ricordate, il sistema di unità essendo il sistema assoluto che ha la lunghezza come sola grandezza primitiva, che ha il centimetro come unità di lunghezza e nel quale si suppone $c = \gamma = 1$. Si trovano i valori seguenti, calcolati nell'ipotesi semplificativa che sia $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, $\gamma = 6.66 \cdot 10^{-8}$ cm^3 · sec^{-2} · gr^{-1}.

Unità di lunghezza = 1 cm

Unità di tempo $= \dfrac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ sec

Unità di velocità $= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec

Unità di accelerazione $= 9 \cdot 10^{20}$ cm/sec^2

Unità di massa $= 9 \cdot 10^{20} \times \dfrac{10^8}{6.66}$ gr [1]

(1) Infatti: da $ma = \gamma \dfrac{m m_1}{r^2}$ si ricava che la massa $m_1 = 1$ gr imprime ad una massa m qualunque, posta alla distanza $r = 1$ cm, un'accelerazione $a = 6.66 \cdot 10^{-8}$ cm/sec^2; ne segue che la massa che imprime ad una massa qualunque posta ad 1 centimetro di distanza un'accelerazione di $9 \cdot 10^{20}$ cm/sec^2 (massa che è la massa unità nel sistema in esame) vale $9 \cdot 10^{20} \times \dfrac{10^8}{6.66}$ gr.

Unità di forza $= 81 \cdot 10^{40} \times \frac{10^8}{6.66}$ dine $= \frac{81}{6.66} \cdot 10^{48}$ dine $=$

$= \frac{81}{6.66} \cdot 10^{43}$ vis

Unità di lavoro $= \frac{81}{6.66} \cdot 10^{48}$ erg $= \frac{81}{6.66} \cdot 10^{41}$ joule

Unità di potenza $= \frac{243}{6.66} \cdot 10^{51}$ watt

Unità di carica elettrica $= \frac{9}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{24}$ u. es. cgs di carica $=$

$= \frac{3}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{15}$ coulomb

Unita di corrente $= \frac{9}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{25}$ ampère

Unità di d. d. p $= \frac{27}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{26}$ volt

Unità di resistenza $= 30$ ohm

Unità di capacità $= \frac{1}{9.10^{11}}$ farad $= 1$ u. es. cgs di capacità

Unità di induttanza $= 10^{-9}$ henry $= 1$ u. em. cgs di induttanza

Unità di massa magnetica $= \frac{9}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{24}$ u. em. cgs

Unità di campo $= \frac{9}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{24}$ oersted

Unità di potenza magnetica $= \frac{9}{\sqrt{6.66}} \cdot 10^{24}$ u. em. cgs

Osservazione. – Si potrebbero moltiplicare gli esempi di sistemi con una sola unità primitiva: i vari sistemi differirebbero fra loro sia per le dimensioni delle varie grandezze, sia per i valori delle unità di misura. Per esempio, si potrebbe imporre che invece della velocità sia l'accelerazione ad avere dimensioni zero; allora il tempo avrebbe dimensioni $L^{1/2}$, massa e forza avrebbero dimensioni L^2, la pressione risulterebbe priva di dimensioni ecc. Oppure, conservando per le varie grandezze le dimensioni dell'esempio sopra sviluppato, si potrebbe prendere come unità di massa, anzichè la massa che ad una massa qualunque posta alla distanza 1 imprime l'accelerazione 1, quella massa che ad una massa qualunque posta ad una distanza determinata imprime l'accelerazione π; similmente come unità di

velocità si potrebbe prendere una velocità qualunque anzichè la velocità della luce [1].

Quanto precede conferma una volta di più [2] che i sistemi di unità sono fondati su convenzioni le quali si possono arbitrariamente fissare in tanti modi diversi.

Meccanica. — *Determinazione delle dimensioni della terra con il metodo meccanico di Galileo per la misura delle distanze dei punti inaccessibili.* Nota di L. Laboccetta, presentata [3] dal Socio G. A. Crocco.

La determinazione della distanza, o dell'altezza, di un punto inaccessibile era stata sempre considerata come un problema puramente geometrico.

Ma quando Galileo, confrontando il moto di due pendoli di lunghezze diverse, potè constatare che le durate delle oscillazioni sono proporzionali alle radici quadrate delle lunghezze, cosicchè dal rapporto dei tempi si può dedurre quello delle lunghezze, questa constatazione gli fece scorgere la possibilità di risolvere un problema di genere nuovo: quello cioè di determinare meccanicamente la distanza di un punto inaccessibile. Più precisamente Galileo si propose di determinare la lunghezza di una corda pendente da grandissima altezza e così Egli espone il problema e la soluzione di esso [4].

« Adunque, se io ho ben'inteso, potrò speditamente sapere la lunghezza « d'una corda pendente da qualsivoglia grandissima altezza, quando bene il « termine sublime dell'attaccatura mi fusse invisibile, e solo si vedesse l'altro « estremo basso. Imperò che se io attaccherò qui da basso uno assai grave « peso a detta corda, e farò che si vadia vibrando in quà e'n là, e che un « amico vadia enumerando alcune delle sue vibrationi, e che io nell'istesso « tempo vadia parimenti contando le vibrationi, che farà un'altro mobile « appeso a un filo di lunghezza precisamente d'un braccio, dal numero delle « vibrationi di quelli pendoli, fatte nell'istesso tempo, troverò la lunghezza « della corda ».

(1) Si deve però notare che si ottiene la coincidenza del sistema elettrostatico con quello elettromagnetico solo se si fa $c = 1$ sia numericamente che dimensionalmente, e ciò qualunque siano le dimensioni e il valore di γ; basta notare che le grandezze elettriche e magnetiche hanno le stesse dimensioni rispetto alla massa sia nel sistema elettrostatico che nel sistema elettromagnetico.

(2) Si veda la Nota già citata del prof. Giorgi e si veda pure Bouasse, *Cours de magnétisme et d'électricité*, to. I, cap. XIV, editore Delagrave. Paris, 1921.

(3) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(4) Nella Prima Giornata dei *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due Nuove Scienze*. (È Sagredo che parla).

Da questo procedimento di Galileo, sulla cui importanza avevo richiamato l'attenzione in altro mio scritto [1] discende un metodo semplice ed elegante, come sarà qui appresso esposto, per determinare la lunghezza del raggio terrestre, alla effettiva esecuzione del quale è però necessaria una cognizione che Galileo ancora non possedeva: intendo quella della condizione di equivalenza della forza centrifuga e della gravità che è dovuta ad Huygens il quale ci dice [2] di aver trovato « qu'un corps tournant en « cercle, si on veut que son effort à s'éloigner du centre, égale justement « l'effort de la simple pesanteur, il faut qu'il fasse chaque tour en autant « de temps, qu'un Pendule, de la longueur du demidiamètre de la terre, en « emploie à faire deux allées ». E servendosi del valore del raggio terrestre determinato da Picard, trova che per un corpo gravitante intorno alla terra, secondo un'orbita circolare a contatto con la superficie di essa, il tempo nel quale compirebbe una rivoluzione è di 1 ora e 24 $^1/_2$ minuti.

È questa la prima determinazione di quella grandezza, per la quale ho proposto il nome di *tempo proprio*, e che è legata nel modo più semplice con la densità [3]. Huygens ne ha determinato il valore per il caso particolare della sfera terrestre senza conoscere la relazione che lega queste due grandezze: per poter passare dal tempo proprio alla densità della terra sarebbe stata necessaria la conoscenza della costante della gravitazione, solo assai più tardi determinata da Cavendish.

Ma al valore del tempo proprio della terra si giunge anche, come è noto, confrontando le durate delle oscillazioni di uno stesso pendolo al polo ed all'equatore. Ed allora, invertendo il procedimento di Huygens che conduce dalle lunghezze ai tempi, ossia servendosi del metodo di Galileo che fa risalire dai tempi alle lunghezze, si può passare dalla conoscenza del tempo proprio della terra a quella della lunghezza del suo raggio, e quindi della massa, senza ricorrere a misure di lunghezze, ma solo con misure di tempi come sarà mostrato qui appresso.

1. *Tempo proprio della terra.* – Si abbia una sfera di densità Δ e raggio R che ruota intorno ad un suo diametro con velocità angolare uniforme ω, compiendo cioè un giro nel tempo $\theta = 2\pi/\omega$. Siano t_1 e t_2 le durate delle oscillazioni di uno stesso pendolo di lunghezza $l = R\lambda$ ad uno dei poli di questa sfera e in un punto dell'equatore di essa.

Utilizzando, per esprimere la durata dell'oscillazione, la formola, data in una precedente Nota [4], che mette esplicitamente in evidenza gli elementi

(1) *La similitudine meccanica di Galileo e la relatività dello spazio.* « L'Elettrotecnica », 5-15-25 agosto 1932.

(2) Nel *Discours de la cause de la pesanteur.*

(3) L. Laboccetta, *Una definizione assoluta della densità.* « Atti Soc. It. Progr. Sc. Riun. di Bari », 1933, vol. II., p. 203.

(4) *Definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare.* Questi « Rendiconti », vol. XXI, ser. 6ª, maggio 1935, p. 661.

caratteristici della sfera: R, Δ e Θ, tempo proprio,

$$t = \lambda^{1/2}\Theta = \{(l/R)(3\pi/k\Delta)\}^{1/2} \tag{1}$$

si sarebbe condotti a scrivere per le due durate

$$t_1 = (3\pi\lambda/k\Delta')^{1/2} \qquad t_2 = (3\pi\lambda/k\Delta'')^{1/2} \tag{2}$$

attribuendo alla sfera densità diverse, fra le quali e le durate delle oscillazioni sussisterebbe la semplice relazione

$$t_1^2 : t_2^2 = \Delta'' : \Delta'. \tag{3}$$

Poichè i rapporti fra le densità ordinarie (riferite cioè a quella dell'acqua normale) sono gli stessi di quelli delle densità assolute, espresse cioè in unità atomiche gravitazionali (u. a. g.), si può alle densità Δ sostituire il loro valore $(a/d)^3 = (1/\delta)^3$ in funzione della distanza δ fra i centri degli atomi elementari, misurata prendendo per unità di lunghezza il raggio a della sfera atomica gravitazionale, e si trova

$$t_1^2 : t_2^2 = \delta_1^3 : \delta_2^3. \tag{4}$$

Si riottiene dunque la relazione fondamentale fra tempi e distanze [1] verificata anche in questo caso nel quale una delle densità è fittizia. Infatti nel mentre la densità Δ' misurata al polo è quella reale Δ della sfera, la densità Δ'' invece, misurata all'equatore e minore della prima, è solo apparente e la differenza fra le due

$$\Delta_\omega = \Delta'(1 - \Delta''/\Delta') = \Delta'(1 - \rho) \tag{5}$$

con $\rho = \Delta''/\Delta'$, è prodotta dalla rotazione della sfera e cresce con la velocità angolare di questa.

Poichè l'effetto della rotazione è una forza centrifuga producente una diminuzione dell'intensità della gravità, si può dire che una rotazione della sfera equivale alla sovrapposizione alla sua massa attraente (positiva) di una massa ripulsiva che dà luogo ad una densità negativa. Il valore di questa densità negativa si determina facilmente uguagliando la forza centrifuga dovuta alla velocità angolare di rotazione alla intensità della gravità alla superficie della sfera in un punto dell'equatore. Si ottiene così di esprimere la diminuzione apparente di densità in funzione della velocità angolare

(1) L. Laboccetta, *La relazione fondamentale fra tempi e distanze caratteristica dello spazio fisico.* «La Ricerca Scientifica», anno VI, vol. II, nn. 9-10, 15-30 novembre 1935.

o, viceversa, della velocità angolare in funzione della densità della massa negativa che ad essa corrisponde

$$\omega^2 = (4/3)\pi k\Delta \quad , \quad \Delta = (3/4)\pi k\omega^2. \tag{6}$$

Dunque la densità della massa negativa sovrapposta, cioè la *diminuzione* apparente di densità dovuta alla rotazione, è proporzionale al quadrato della velocità angolare ed è sempre la stessa qualunque sia il raggio della sfera.

Crescendo la velocità angolare arriva un momento in cui il suo valore diventa quello che corrisponde al tempo proprio della sfera (ossia alla densità misurata al polo). In tale momento l'intensità della gravità all'equatore è completamente annullata dalla forza centrifuga e la densità negativa apparente diventa uguale a quella reale della sfera.

Tenendo presenti la (5) e le (6) si scorge che, se la sfera è quella della terra, si devono avere per la rotazione diurna e per la rotazione propria i valori

$$\Delta' - \Delta'' = (3/4)\pi k\omega^2 \tag{7}$$

$$\Delta' = (3/4)\pi k\Omega^2 \tag{8}$$

dai quali, ricordando che $\Delta''/\Delta' = \rho$, si ricava

$$\Omega/\omega = \{1/(1-\rho)\}^{1/2}. \tag{9}$$

Se ora s'intende che sia θ il tempo della rotazione diurna della terra, corrispondente alla velocità angolare ω, cioè la durata del giorno sidereo, e Θ il suo tempo proprio corrispondente alla velocità angolare Ω, poichè i tempi delle rotazioni sono in ragione inversa delle velocità angolari, dovendosi avere $\omega\theta = \Omega\Theta$ viene dalla (9)

$$\Theta = \theta\sqrt{1-\rho}. \tag{10}$$

Si ha così il tempo proprio Θ della sfera terrestre espresso in funzione della durata θ del giorno sidereo e del rapporto ρ fra i quadrati delle durate delle oscillazioni di uno stesso pendolo all'equatore e al polo.

2. *Raggio della terra.* – Avuto così il tempo proprio della terra, e supposto che sia proprio t la durata dell'oscillazione al polo del pendolo di lunghezza l, la (1) fornisce

$$t = \Theta\sqrt{l/R} \tag{11}$$

ovvero

$$\Theta^2 : t^2 = R : l \tag{12}$$

che è la relazione di Galileo, relazione la quale secondo che si legga da sinistra a destra o da destra a sinistra prende due forme diverse

$$(13) \qquad (\Theta/t)^2 = (R/l) \quad , \quad (l/R) = (t/\Theta)^2$$

che corrispondono anche alla risoluzione di due differenti problemi.

Si scorge infatti che letta la (12) da sinistra a destra, cioè nella prima forma delle (13) essa dice *che: assunta come unità di tempo la durata t dell'oscillazione al polo del pendolo avente l'unità di lunghezza l, la lunghezza* R/l *del raggio terrestre è data dal quadrato* $(\Theta/t)^2$ *del tempo proprio della terra.* Letta invece da destra a sinistra, cioè nella seconda forma delle (13) essa dice che: *assunte come unità di tempo e di lunghezza il tempo proprio* Θ *e il raggio* R *della terra la durata* t/Θ *dell'oscillazione di un pendolo è data semplicemente dalla radice quadrata della sua lunghezza,* il che è solo un diverso modo di enunciare la (1) che dà la definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare.

In particolare se la lunghezza l del pendolo è proprio di 1 m., cosicchè la durata t dell'oscillazione completa è di due secondi circa, la prima delle (13) diventa

$$(14) \qquad R = (\Theta/t)^2 ,$$

relazione la quale dice che *la lunghezza del raggio della terra, in metri, è data dal rapporto fra il tempo proprio della terra stessa e la durata dell'oscillazione al polo di un pendolo avente la lunghezza di 1 m.*, l'unità scelta per la misura dei tempi potendo essere qualsiasi.

Volendo per il tempo proprio della terra porre il suo valore, dato dalla (10), si ha

$$(15) \qquad R = (\theta/\Theta)^2 (1 - \rho) .$$

Il raggio della terra viene così espresso in funzione del giorno sidereo e delle durate delle oscillazioni del pendolo di un metro al polo e all'equatore, la durata dell'oscillazione all'equatore essendo inclusa nel rapporto ρ.

3. *Densità e massa della terra.* – Dal tempo proprio della terra si deduce anche immediatamente il valore della densità di essa dovendosi avere

$$(16) \qquad \Theta = (3\pi/k\Delta)^{1/2}$$

da cui, tenendo presente la (10), risulta

$$(17) \qquad \Delta = 3\pi/k\Theta^2 = 3\pi/k\theta^2 (1 - \rho)$$

e quindi per la massa della terra viene

$$(18) \qquad M = (4/3)\pi R^3 \Delta = 4\pi^2 \Theta^5/k t^6$$

4. *La terra reale.* – La terra non è una sfera perfetta; non è verificata quindi la condizione, come in quanto precede si è supposto, che il raggio abbia lo stesso valore all'equatore e al polo. E se delle esperienze per determinare la durata dell'oscillazione pendolare si fanno in punti convenientemente distribuiti lungo un meridiano, confrontandola con la durata dell'oscillazione all'equatore, si otterranno per il raggio valori progressivamente variabili con la latitudine. È chiaro che dal modo di variare del raggio così calcolato col variare della latitudine si può dedurre la forma reale del meridiano, appunto come nei metodi geometrici di misura essa si deduce dalla legge di variazione della lunghezza del grado.

Meccanica. — *Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio.* Nota I di G. Supino, presentata [1] dal Socio G. Fubini.

1. In passato mi sono occupato delle relazioni tra le soluzioni elastiche piane e quelle nello spazio [2]. La questione è stata di nuovo posta dal prof. G. Fubini in una discussione al Congresso di Palermo della S. I. P. S. e pertanto riprendo qui l'argomento per precisare (in questa e in una Nota successiva) i limiti in cui ha significato la interpretazione della soluzione piana come soluzione media di un problema elastico in tre dimensioni.

2. Si ha, come è noto, una soluzione elastica piana se (riferendosi al piano x, y) le componenti di tensione $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ soddisfano, in assenza di forze di massa, alle condizioni:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 .$$

Le componenti delle forze agenti sul contorno sono date da

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = P_x \quad , \quad \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = P_y .$$

La somma $\sigma_x + \sigma_y$ è proporzionale alla dilatazione cubica; se essa è lineare in x ed y i vari « fogli » elastici possono sovrapporsi combaciando perfettamente: allora la soluzione piana ha significato anche nello spazio in quanto

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(2) *I sistemi elastici in due dimensioni e le loro relazioni con la deformazione spaziale.* « Rendiconti Lincei », ser. 6ª, vol I, pp. 116–119 (1° sem., 1925); *Sul problema di Clebsch.* « Ibid. », ser. 6ª, vol. XV, pp. 366–371 (1° sem., 1932). Le Note saranno indicate con N. 1 e N. 2.

rappresenta la sollecitazione in un cilindro che abbia per sezione retta il contorno assegnato nel piano x, y e che sia soggetto a forze costanti lungo le generatrici. Ma se $(\sigma_x + \sigma_y)$ non è lineare in x, y allora la sovrapposizione dei vari « fogli » non è possibile se non si aggiungono alle due basi del cilindro opportune forze (N. 1).

A parte questa estensione esatta della soluzione piana allo spazio vi sono due altre possibili interpretazioni. Si può supporre cioè che la lastra sia scarica sulle superficie laterali, che sia soggetta a forze giacenti nel suo piano medio e che il suo spessore sia tanto piccolo da poter trascurare le condizioni di congruenza nel senso dello spessore; ma questa interpretazione ha scarsa importanza fisica perchè, se così fosse, salvo in casi molto semplici, la soluzione avrebbe carattere puramente formale in quanto non si può tener conto di eventuali fenomeni di instabilità dell'equilibrio, che molto spesso si presentano in queste condizioni.

esta la seconda interpretazione. Si consideri ancora una lastra di spessore $2a$ soggetta a forze che agiscono soltanto sul suo contorno lasciando scariche le due superficie laterali. Assumiamo il piano medio come piano x, y e cerchiamo di conoscere, su ogni elemento perpendicolare ad x, y, la media delle tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ agenti su di esso. Essendo l'asse z perpendicolare alla lastra, poniamo

$$\bar{\sigma}_x = \int_{-a}^{+a} \sigma_x \, dz \qquad \bar{\sigma}_y = \int_{-a}^{+a} \sigma_y \, dz \qquad \bar{\tau}_{xy} = \int_{-a}^{+a} \tau_{xy} \, dz$$

e prendiamo in esame le equazioni indefinite dell'equilibrio,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 .$$

Integrando queste equazioni per tutto lo spessore della lastra ed osservando che τ_{zx}, τ_{yz} sono nulle sui due lati, si ricava:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

cioè le $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ soddisfano alle equazioni indefinite di un problema piano.

Si vede immediatamente, partendo dalle equazioni ai limiti nello spazio e integrando tra $+a$ e $-a$, che esse soddisfano anche alle equazioni ai limiti relative allo stesso caso.

Ma ciò non è sufficiente per poter affermare che le $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ sono soluzioni di un problema elastico in due dimensioni perchè non è dimostrato che sia

$$\Delta_2'(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0 \qquad \left(\Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

3. Nel problema spaziale e in assenza di forze di massa le $\sigma_x \cdots \tau_{zx}$ rappresentano delle tensioni elastiche se, oltre che alle equazioni indefinite, soddisfano anche alle equazioni di Beltrami:

$$\Delta_2 \sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \qquad \Delta_2 \tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 0$$

$$\Delta_2 \sigma_y + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta_2 \tau_{zx} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial x} = 0$$

$$\Delta_2 \sigma_z + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \qquad \Delta_2 \tau_{yz} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial y} = 0$$

nelle quali $H = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, m è il coefficiente di Poisson.

Sommando le prime tre di queste equazioni si deduce che $\Delta H = 0$.

Ciò premesso si supponga $\Delta_2 \sigma_z = 0$.

Allora dalla terza delle equazioni precedenti si ricava $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$ e quindi

$$\Delta_2' H = 0. \tag{1}$$

D'altra parte se $\bar{\sigma}_z = \int_{-a}^{+a} \sigma_z \, dz$ è

$$\Delta_2' \bar{\sigma}_z = 0 \tag{2}$$

perchè

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} dz = \left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right]_{-a}^{+a} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right]_a = \left[-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right]_a = 0.$$

Si deduce dalle (1) e (2) che $\Delta_2'(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0$; cioè: se nel problema spaziale $\Delta_2 \sigma_z = 0$ e le tensioni τ_{zx}, τ_{yz} sono nulle sulle basi, allora le $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ rappresentano la soluzione di un problema piano.

4. La soluzione generale corrispondente a $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$, cioè con H della forma

$$H = k_0(x, y) + z\, k_1(x, y) \qquad \Delta_2' k_0 = \Delta_2' k_1 = 0,$$

dà luogo (se i due lati della lastra sono scarichi) alla condizione $\sigma_z = 0$.

Infatti su i due lati della lastra è $\sigma_z = 0$ $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$ ed è noto che basta constatare l'esistenza contemporanea di queste due condizioni su una piccola zona di contorno per concludere che la funzione armonica σ_z è nulla su tutto il campo.

E se $\sigma_z = 0$ e le basi sono scariche, la soluzione generale quando H è funzione lineare di z è nota [1]. La parte indipendente da z porta a una soluzione di Clebsch; la parte relativa a k_1 dà luogo ad una soluzione antisimmetrica rispetto al piano medio. Si osserva subito che queste soluzioni antisimmetriche non hanno alcun interesse per noi che ci preoccupiamo di calcolare una soluzione media perchè in esse la media è zero. La soluzione simmetrica del Clebsch dà luogo nelle generatrici del contorno a forze simmetriche rispetto al piano medio (la legge di distribuzione è del tipo $\alpha + \beta z^2$).

La soluzione piana rappresenta dunque anche la media della sollecitazione in un problema di Clebsch; da essa si risale facilmente alla soluzione stessa del Clebsch (vedi N. 2). Ambedue possono essere usate quando lo spessore della lastra sia tale da dover studiare il problema nello spazio e d'altra parte permetta – in analogia a quanto si fa nel problema del Saint Venant – di considerare assegnate su ogni generatrice del contorno le sole forze risultanti senza preoccuparsi della distribuzione delle tensioni lungo la generatrice stessa.

5. Ma in molti problemi tecnici sorge spontaneo il desiderio di applicare la soluzione piana anche ad altri casi. Si hanno infatti nelle travi e negli archi esempi di strutture nelle quali le due dimensioni della sezione trasversale sono dello stesso ordine di grandezza. E tuttavia, nelle condizioni usuali di carico (costanti lungo la sezione trasversale cioè secondo z) interessa maggiormente conoscere la distribuzione delle tensioni in un piano verticale piuttosto che su una retta orizzontale nella quale si prevedono differenze poco sensibili e dove sarebbe quindi sufficiente conoscere la sollecitazione media. Ma la interpretazione della soluzione piana come soluzione media in un cilindro soggetto a forze costanti lungo ogni generatrice e parallele alle basi (le quali alla lor volta sono supposte scariche) urta contro alcune difficoltà che è bene tenere presenti. La distribuzione assegnata dal Clebsch dà luogo a forze variabili (con la legge ricordata del tipo $\alpha + \beta z^2$) e questa variabilità deve avere una certa influenza nella distribuzione delle tensioni interne della lastra poichè (come ho rilevato in N. 2) se si immagina la lastra divisa in due dal piano medio la sollecitazione resta la stessa, le basi sono ancora scariche eppure ora si hanno anche momenti su le ge-

(1) Ved., per es., Supino, *Sopra la deformazione delle lastre.* « Rendiconti Lincei », ser. 6ª, vol. XV, pp. 448-453 (1° sem. 1932).

neratrici. D'altra parte se $\sigma_z = 0$ non è possibile soddisfare esattamente alle condizioni ai limiti (vedi un ragionamento sintetico in proposito in N. 1). Una conclusione negativa su questa interpretazione sarebbe tuttavia per ora affrettata.

6. La condizione necessaria e sufficiente perchè le $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$ rappresentino la media delle tensioni di un problema elastico nella lastra scarica alle basi soggetta sulle generatrici a forze simmetriche rispetto al piano medio e, contemporaneamente, soddisfino ad un problema elastico piano è che sia $\int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz = 0$.

Infatti è in ogni caso

$$\Delta_2 H = 0 \qquad H = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

e quindi

$$\int_{-a}^{+a} \Delta_2 H \, dz = 0 = \Delta_2'(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) + \int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z^2} dz + \int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz .$$

Ora se $\int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz = 0$ allora dalla terza delle equazioni di Beltrami segue

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} dz = 0 = \left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{-a}^{+a} .$$

Ma per la simmetria della sollecitazione rispetto al piano medio

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{-a} = -\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{+a}$$

e quindi dalla precedente si deduce $\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{\pm a} = 0$; cioè

$$\frac{\partial (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z}\bigg|_a + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\bigg|_a = 0 = \frac{\partial (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z}\bigg|_a \quad \text{perchè} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\bigg|_a = 0$$

come si è rilevato al n. 3.

Dunque la condizione $\int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz = 0$ implica $\Delta_2'(\sigma_x + \bar{\sigma}_y) = 0$ cioè la condizione è sufficiente per l'enunciato.

Ma se è $\Delta_2'(\bar{\sigma}_x + \sigma_y) = 0$ allora risulta anche

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z^2} dz + \int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz = 0$$

ossia

$$\int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz + \left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{-a}^{+a} = 0$$

e questa associata alla terza delle equazioni di Beltrami implica $\int_{-a}^{+a} \Delta_2 \sigma_z \, dz = 0$.

La condizione è anche sufficiente c. d. d.

Dalla dimostrazione risulta che anche la condizione $\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{\pm a} = 0$ può essere assunta come necessaria e sufficiente in luogo della precedente.

7. La condizione che sia $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ sulle basi suggerisce alcune considerazioni che indirizzano verso la soluzione del problema. Ricordato che, per fissate condizioni ai limiti, si ha una sola soluzione elastica, si osserva subito che la condizione $\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{\pm a} = 0$ non potrà aggiungersi alle altre; occorrerà invece classificare le soluzioni elastiche corrispondenti alle diverse condizioni ai limiti in due tipi: un tipo in cui la condizione è automaticamente soddisfatta, un secondo tipo in cui invece è $\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$ sulle basi. Esistono soluzioni del primo tipo (basta tener presente quella del Clebsch); ed esistono anche soluzioni del secondo tipo come dimostreremo nella II Nota e come si può prevedere fin da ora osservando che la condizione posta è assai restrittiva.

Per convincerci di questa affermazione rileveremo che i sistemi di sollecitazione simmetrici rispetto al piano medio e tali che sulle basi della lastra sia $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ soddisfano anche alla condizione $\left[\frac{\partial^{2n+1} H}{\partial z^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0$.

Ed infatti dalle equazioni (di Beltrami)

$$(3) \qquad \Delta_2 \tau_{zx} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 H}{\partial z \, \partial x} = 0 \qquad \Delta_2 \tau_{zy} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 H}{\partial z \, \partial y} = 0$$

si deduce, tenendo conto della $\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right]_{\pm a} = 0$:

$$[\Delta_2 \tau_{zx}]_{\pm a} = 0 \qquad [\Delta_2 \tau_{yz}]_{\pm a} = 0 .$$

Applicando l'operazione Δ_2 alla terza delle equazioni indefinite:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

segue

$$\left[\Delta_2 \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \zeta}\right]_{\pm a} = 0 \quad \text{e quindi dalla} \quad \Delta_2 \sigma_\zeta + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} = 0$$

si deduce $\left[\frac{\partial^3 H}{\partial \zeta^3}\right]_{\pm a} = 0$.

Non vi è ora altro che riprendere le equazioni (3) derivandole due volte rispetto a ζ, per dedurre con lo stesso procedimento $\left[\frac{\partial^5 H}{\partial \zeta^5}\right]_{\pm a} = 0$. Proseguendo si trova, come avevamo annunciato,

$$\left[\frac{\partial^{2n+1} H}{\partial \zeta^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0.$$

Dalla $[\Delta_2 \tau_{\zeta x}]_{\pm a} = 0$ osservando che $\tau_{\zeta x}$ è nullo per $\zeta = \pm a$ si ottiene poi $\left[\frac{\partial^2 \tau_{\zeta x}}{\partial \zeta^2}\right]_{\pm a} = 0$. Analogamente è $\left[\frac{\partial^2 \tau_{y\zeta}}{\partial \zeta^2}\right]_{\pm a} = 0$. E con lo stesso procedimento con cui si è ricavata la relazione per le derivate di H si ottiene anche $\left[\frac{\partial^{2n} \tau_{\zeta x}}{\partial \zeta^{2n}}\right]_{\pm a} = \left[\frac{\partial^{2n} \tau_{y\zeta}}{\partial \zeta^{2n}}\right]_{\pm a} = 0$.

Tenendo conto di queste condizioni e della solita equazione indefinita si trova poi $\left[\frac{\partial^{2n+1} \sigma_\zeta}{\partial \zeta^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0$.

Restrizioni analoghe si ottengono per le altre tre componenti di tensione come si vedrà nella prossima Nota.

Meccanica. — *Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio.* Nota II di G. Supino, presentata dal Socio G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia (Meccanica celeste). — *Sulle perturbazioni della eccentricità nel problema dei due corpi di masse lentamente crescenti.* Nota di L. Gialanella, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Il problema dei due corpi di masse variabili, rimesso in luce dal prof. G. Armellini venticinque anni fa, ha assunto in questi ultimi tempi — con le ricerche continuate dell'Armellini stesso e di una numerosa schiera di scienziati italiani e stranieri messisi sulle sue tracce — un'importanza assai notevole, non soltanto dal punto di vista teorico, ma anche da quello astronomico e cosmologico [2]. In questa Nota mi propongo di studiare il problema con l'ausilio della teoria delle perturbazioni della Meccanica celeste nella ipotesi che la massa del sistema cresca *lentamente* col tempo, limitandomi, per ora, ad esaminare se esistono variazioni secolari dell'eccentricità dell'orbita in dipendenza delle perturbazioni di primo ordine ed a vedere il segno che queste variazioni secolari prendono a seconda delle differenti ipotesi che si fanno sulla variazione della massa.

1. Supponiamo, dunque, che la massa m del sistema cresca lentamente col tempo secondo una funzione $\varphi(t)$, finita e continua insieme con la sua derivata prima. Diciamo m_0 la massa iniziale, cioè quella corrispondente ad un istante iniziale t_0, che può essere, per esempio, quello del passaggio della stella satellite (nel caso di un sistema binario) al periastro in una certa epoca; detto allora ε un coefficiente positivo assai piccolo, la massa al tempo t potrà esprimersi con:

$$m(t) = m_0 + \varepsilon\varphi(t). \tag{1}$$

Ma, se ci limitiamo a considerare il moto ellittico, l'anomalia media $\zeta = n(t - t_0)$ — con n medio movimento diurno — risulta proporzionale al tempo, onde potremo porre (trascurando naturalmente le perturbazioni di ordine superiore):

$$m = m_0 + \varepsilon\varphi\left(\frac{\zeta}{n} + t_0\right) = m_0 + \varepsilon F(\zeta). \tag{2}$$

Ciò posto, partiamo da alcune considerazioni del prof. G. Armellini [3] e,

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(2) Ved. G. Armellini, *Trattato di Astronomia siderale*. Vol. II, Bologna, Zanichelli.

(3) G. Armellini, *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili*. Questi « Rendiconti », 1926, 2° sem. Cfr. anche Martin, *Sulle variazioni secolari dell'eccentricità* ecc. in « Contr. Stazione di Carloforte », nn. 28 e 30.

detta v l'anomalia vera ed e l'eccentricità, consideriamo l'equazione differenziale trovata dall'Armellini a p. 417 di detta Nota:

$$d(em) + \cos v\, dm = 0 \tag{3}$$

la quale, quando si prenda come variabile indipendente il tempo, ci dà:

$$m\frac{de}{dt} + e\frac{dm}{dt} + \cos v\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e + \cos v}{m}\frac{dm}{dt}. \tag{4}$$

Sostituendo poi a v il suo sviluppo in funzione dell'anomalia media con coefficienti funzioni di Bessel [1]:

$$\cos v = -e + 2\,\frac{1 - e^2}{e}\sum_1^\infty{}_i\, J_i(ie)\cos i\zeta, \tag{5}$$

si ricava, quando si tenga conto soltanto delle perturbazioni di primo ordine:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{2}{e}(1 - e^2)\,\frac{1}{m}\,\frac{dm}{dt}\sum_1^\infty{}_i\, J_i(ie)\cos i\zeta. \tag{6}$$

Sostituiamo ad m il valore (2) ed integriamo tra 0 e 2π, supponendo, come si fa per il calcolo delle perturbazioni di primo ordine, costanti tutti gli altri elementi (contrassegnati con l'indice zero); otterremo allora:

$$\Delta_1 e = -\frac{2}{e_0}\,\frac{1 - e_0^2}{m_0}\,\varepsilon\sum_1^\infty{}_i\, J_i(ie_0)\int_0^{2\pi} F'(\zeta)\cos i\zeta\, d\zeta \tag{7}$$

la quale viene ad esprimere così la *variazione totale di primo ordine della eccentricità in un'intera rivoluzione.*

2. Facciamo ora qualche ipotesi particolare sulla $\varphi(t)$, dalla quale dipende la variazione della massa del sistema, cominciando col supporre che questa cresca *linearmente* col tempo, onde la F sarà funzione lineare di ζ. In tal caso, poichè:

$$F'(\zeta) = \text{costante} \quad ; \quad \int_0^{2\pi}\cos i\zeta\, d\zeta = 0,$$

si ha immediatamente $\Delta_1 e = 0$, e cioè:

(1) Tisserand, *Mécanique céleste.* Vol. I, p. 225.

Se la massa cresce linearmente col tempo, l'eccentricità non ha variazioni totali di primo ordine in un'intera rivoluzione.

Tale risultato vale ovviamente qualunque sia l'eccentricità (purchè $e \leq 1$) ed estende quindi un teorema già noto, dato da Poincarè per piccoli valori di e.

In secondo luogo, supponiamo che la massa cresca lentamente secondo una funzione *quadratica* del tempo; avremo allora:

$$F(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 \tag{8}$$

onde, sostituendo nella (7) ed osservando che si ha:

$$\int_0^{2\pi} \zeta \cos i\zeta \, d\zeta = 0$$

risulta subito:

$$\Delta_1 e = -\frac{2}{e_0}\frac{1-e_0^2}{m_0}\varepsilon \sum_1^\infty{}_i J_i(ie_0)\int_0^{2\pi}(c_1 + 2c_2\zeta)\cos i\zeta \, d\zeta = 0 . \tag{9}$$

Cioè:

Se la massa del sistema varia secondo una funzione quadratica del tempo, la variazione totale di primo ordine dell'eccentricità in un'intera rivoluzione è nulla.

Anche questo teorema vale naturalmente qualunque sia l'eccentricità (purchè $e \leq 1$).

Supponiamo ora che $\varphi(t)$ sia funzione cubica di t; avremo allora immediatamente:

$$F(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 . \tag{10}$$

Inoltre si ha:

$$\int_0^{2\pi} \zeta^2 \cos i\zeta \, d\zeta = \frac{2}{i^2}\cdot 2\pi ,$$

onde la (7) diventa nel caso in esame:

$$\Delta_1 e = -\frac{2}{e_0}\frac{1-e_0^2}{m_0}\varepsilon \sum_1^\infty{}_i J_{ie}(ie_0)\left[3c_3 \cdot \frac{2}{i^2}\cdot 2\pi\right] \tag{11}$$

ossia:

$$\Delta_1 e = -\frac{24}{e_0}\frac{1-e_0^2}{m_0}\varepsilon\pi c_3 \sum_1^\infty{}_i J_i(ie_0)\cdot\frac{1}{i^2} \tag{12}$$

la quale è generalmente diversa da zero. Come avevamo accennato, quello che c'interessa maggiormente è il segno della variazione $\Delta_1 e$: per determinarlo osserviamo che esso dipende dal segno della serie che compare a

secondo membro della (12) ed i cui termini sono costituiti dalle funzioni di Bessel $J_i(ie_0)$ moltiplicate per il coefficiente positivo $\frac{1}{i^2}$. Ora si ha:

$$(13)\quad J_i(ie_0) = \frac{1}{i!}\left[\left(\frac{ie_0}{2}\right)^i - \frac{\left(\frac{ie_0}{2}\right)^{i+2}}{1\cdot(i+1)} + \frac{\left(\frac{ie_0}{2}\right)^{i+4}}{1\cdot 2\,(i+1)(i+2)} - \cdots\right]$$

e la serie è – come è noto – assolutamente convergente per $e < 1$. Avremo allora:

$$(14)\quad \sum_1^\infty J_i(ie_0) = \left(\frac{e_0}{2}\right)^1 + \frac{2}{2!}\left(\frac{e_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{3^3}{3!} - \frac{1}{2!}\right]\left(\frac{e_0}{2}\right)^3 + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{k^k}{k!} + \frac{k-4}{2!(k-2)!} - \frac{(k-2)^k}{(k-1)!}\right]\left(\frac{e_0}{2}\right)^k + \cdots = \frac{1}{2}\sum_1^\infty e_0^i$$

e questa è sempre *positiva*. Pertanto la variazione dell'eccentricità (12) risulta *negativa*, o più generalmente, di segno contrario a quello del coefficiente c_3. E quindi:

Se la massa del sistema varia secondo una funzione cubica del tempo, esiste una variazione totale di primo ordine dell'eccentricità in un'intera rivoluzione e tale variazione è di segno contrario a quella del coefficiente cubico (indipendentemente dal valore dell'eccentricità stessa purchè, al solito, $e \leq 1$).

Si potrebbe estendere la ricerca al caso in cui la $F(\zeta)$ sia espressa da un polinomio di qualunque grado; si troverebbe allora, dopo calcoli laboriosi e lunghi – e che per semplicità omettiamo – che esiste analogamente una variazione totale di primo ordine dell'eccentricità in un'intera rivoluzione, ma del suo segno non si può dire nulla *a priori* senza aggiungere altre ipotesi *quantitative* sui coefficienti del polinomio. Aggiungeremo tuttavia che, almeno fino ad un certo grado del polinomio stesso – del resto sufficientemente grande e senza dubbio bastevole per le ipotesi dell'astronomia –, il segno di $\Delta_1 e$ in una rivoluzione completa è *sempre* quello contrario al segno del coefficiente di grado più elevato del polinomio, qualunque siano le singole grandezze dei coefficienti.

3. Un altro caso importante, per le applicazioni che può trovare nelle moderne teorie cosmogoniche, è quello in cui si suppone che la massa aumenti con legge *esponenziale* rispetto al tempo; il che equivale a dire che la $F(\zeta)$ sia della forma:

$$(15)\qquad F(\zeta) = \text{cost} + \lambda E^{k\zeta}$$

dove E indica la base dei logaritmi neperiani, e λ e k sono coefficienti costanti positivi. Il tal caso la (7) diventa:

$$(16) \qquad \Delta_1 e = -\frac{2}{e_0}\frac{1-e_0^2}{m_0}\varepsilon\lambda k \sum_1^\infty{}_i J_i(ie_0)\int_0^{2\pi} E^{k\zeta}\cos i\zeta\, d\zeta .$$

La quadratura a secondo membro ci dà:

$$(17) \qquad \int_0^{2\pi} E^{k\zeta}\cos i\zeta\, d\zeta = \frac{k}{i^2+k^2}(E^{2k\pi}-1)$$

che è sempre *positivo*. Si ha allora:

$$(18) \qquad \Delta_1 e = -\frac{2}{e_0}\frac{1-e_0^2}{m_0}\varepsilon\lambda k \sum_1^\infty{}_i J_i(ie_0)\left\{\frac{k}{i^2+k^2}[E^{2k\pi}-1]\right\}$$

la quale è generalmente differente da zero. Per decidere poi circa il suo segno, potremmo senza altre difficoltà ripetere il ragionamento già fatto. Troveremmo in tal maniera $\Delta_1 e < 0$, ossia:

Se la massa del sistema binario cresce rispetto al tempo con legge esponenziale, esiste una variazione totale di primo ordine dell'eccentricità in un'intera rivoluzione, ed è sempre negativa.

Anche qui non è stata fatta alcuna ipotesi sulla grandezza dell'eccentricità (purchè minore di uno). Teorema analogo, per le masse decrescenti, era stato già trovato dal prof. G. Armellini.

4. I risultati dell'esame analitico ora compiuto ci permettono adunque di poter affermare che, in dipendenza delle perturbazioni di primo ordine, nei casi in cui la massa del sistema cresca lentamente col tempo sia secondo un polinomio (di grado non inferiore al terzo) sia con legge esponenziale, esiste una variazione totale dell'eccentricità in un'intera rivoluzione, variazione che è sempre negativa (quando, naturalmente, si suppongano positivi, come conviene, tutti i coefficienti). In altre parole, in conseguenza di questo lento aumento di massa del sistema binario, l'eccentricità dell'orbita descritta dal satellite intorno all'astro principale diminuisce continuamente nelle successive rivoluzioni, e quindi l'orbita stessa tende a trasformarsi da ellittica in circolare.

Chimica fisica. — *Ulteriori osservazioni sulle costanti chimico-fisiche dell'acqua nella quale è stato immerso il tuorlo dell'uovo di gallina.* Nota di Antonietta Orrù, presentata dal Corrisp. S. Visco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Scheletro di «Elephas planifrons» rinvenuto nel Pliocene della Val d'Era*[1] Nota di G. Ramaccioni presentata[2] dal Corrisp. G. Stefanini.

Nell'estate del 1933, compiendosi alcuni lavori agricoli in località La Vallata a un chilometro circa a nord di Laiatico (Pisa), dove anche precedentemente erano stati rinvenuti frammenti di ossa, vennero in luce avanzi ossei fossili di un grosso mammifero. Il proprietario del fondo cav. colonnello Alberto Gotti Lega fece subito sospendere i lavori in quella zona, e i tentativi di recupero, che eseguiti da persone incompetenti avrebbero portato alla completa distruzione delle altre parti dello scheletro, il quale mostrava continuarsi in profondità e lateralmente. Dopo questo opportuno provvedimento avvertì il prof. G. Stefanini, Direttore dell'Istituto di Geologia della R. Università di Pisa, mettendo a sua disposizione i frammenti fossili già scavati, e permettendo, con l'autorizzazione della R. Soprintendenza di Firenze, che venissero eseguiti i lavori di scavo e il recupero del materiale; materiale che egli volle poi rimanesse ad arricchire le collezioni del Museo Geologico Pisano.

Lo scavo potè essere effettuato grazie ad una sovvenzione straordinaria concessa a tal fine dal Ministero della Educazione Nazionale; mentre più tardi il gravoso trasporto dei pezzi estratti, da Laiatico a Pisa, venne compiuto con gli automezzi della Banca di Laiatico gentilmente concessi da quel direttore cav. Bocelli.

A questi enti e al cav. Gotti Lega risale in gran parte il merito di aver reso possibile la preservazione e lo studio di questi pregevoli avanzi: vadano ad essi i nostri ringraziamenti.

Il prof. Stefanini affidò a me l'incarico dello scavo ed estrazione delle parti dello scheletro rimaste nel terreno dopo le prime scoperte; e i lavori di scavo, consolidamento e recupero del materiale, iniziati sotto la sua direzione il 20 settembre 1934, proseguirono fino al 15 novembre, esplorando una superficie di terreno di 360 m^2, con un movimento di terra di circa 570 m^3.

Per effetto della naturale pendenza del suolo e della sua sistemazione a cultura, alcune parti dello scheletro erano subaffioranti nel terreno agrario (resti rinvenuti nel 1933 e precedentemente) altre giacevano a m. 1,70

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Geologia della R. Università di Pisa.
(2) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

circa, la maggior parte tra m. 1,70 e m. 2,70 circa sotto l'attuale superficie del terreno. Esse riposavano quasi direttamente sopra uno strato di argilla nerastra torbosa, intercalato nei depositi pliocenici argilloso-arenacei con conchiglie marine.

È evidente che in origine lo scheletro si trovava, nel suolo, intero e con tutte le sue parti in connessione anatomica. Disgraziatamente il terreno, in cui giacevano inglobati i resti fossili, ha subìto nel corso dei secoli un processo di lento scivolamento verso il fondo valle, con espansione della massa slittante e conseguente stiramento e rottura dei resti in frammenti spesso minutissimi.

Che questi movimenti si siano verificati con una certa regolarità ed uniformità è dimostrato dal fatto, che ad esempio le difese, pur conservando *grosso modu* la loro posizione reciproca, e (a parte un certo schiacciamento) anche la loro forma, erano suddivise in pezzi subeguali, posti in serie, a distanza quasi regolare gli uni dagli altri. D'altro canto le parti del fossile che pel procedere dell'erosione e poi dei lavori campestri venivano a trovarsi più vicine alla superficie del suolo andarono via via distrutte.

Tra le perdite più gravi da lamentare è quella della maggior parte del cranio, che disgraziatamente venne ad affiorare nel corso dei tempi e di cui era ormai rimasto solo qualche frammento della faccia inferiore, con le difese e due molari. Fra i materiali conservati, ma sempre più o meno lesionati o frammentari, sono poi – come vedremo tosto – la mandibola, parte della colonna vertebrale e delle coste, le scapole, piccole parti della cintura pelvica, parti delle ossa degli arti.

Dopo il restauro, compiuto nel laboratorio dell'Istituto di Geologia di Pisa, e in base allo studio da me ormai quasi ultimato, lo scheletro fossile di Laiatico resulta riferibile all'*Elephas planifrons* Falconer. Dò brevemente un cenno dei pezzi più notevoli.

Cranio. – Il cranio, oltre che dal mascellare superiore sinistro, occupato per tutta la sua lunghezza da M^3, e provvisto di piccola porzione del palato, è rappresentato dalla parte inferiore dell'occipitale con i due condili.

Difese. – Considerevole è il volume, circonferenza e lunghezza, delle due difese. La lunghezza misurata sulla faccia inferiore (grande curvatura) risulta di m. 3,41 per la difesa sinistra, e di m. 3,35 per la difesa destra. Esse hanno sezione ovale con tendenza a divenire subconiche all'estremità distale. La massima circonferenza cm. 71,5 e il diametro massimo cm. 26, si misurano nella difesa destra in corrispondenza dell'estremità prossimale. Le due difese hanno un movimento elicoidale alquanto pronunciato; prima si dirigono in basso in fuori e in avanti, descrivendo con la loro prima metà un quarto di circolo non giacente però in un medesimo piano. La spirale prosegue verso l'estremità distale ma più accentuata, e quindi a passo più corto, dirigendosi prima in alto, poi in dentro. Questo movimento

elicoidale molto marcato non raggiunge però quello presentato dalla difesa sinistra di *El. meridionalis* Nesti, descritta e figurata da Tuccimei [1].

Queste due belle difese assumono un alto interesse per il fatto, che zanne intere di *El. planifrons* in Italia non sarebbero state ancora rinvenute data la rarità della specie.

Mandibola e molari. – La mandibola con le sue due branche e con M_3 sinistro ancora in posto, è molto interessante perchè la sinfisi è conservata e mostra il *becco sinfisario*, sebbene frammentario, diretto decisamente in basso, carattere proprio della specie.

Elephas planifrons
Profilo della mandibola, 1/4 della grandezza naturale.

In Italia, di *El. planifrons* esiste una sola mandibola [2] la quale presenti conservata la sinfisi e l'apofisi mentoniera; proviene da Peccioli (Val d'Era), cioè da località assai vicina a Laiatico, ed è conservata nel Museo di Geologia della R. Università di Firenze.

Non meno interessanti sono i molari, i quali presentano tutti i caratteri specifici dell'*El. planifrons*: *corona* di tipo marcatamente brachiodonte e molto bassa (altezza media mm. 34 per M^3 superiore sinistro, e mm. 35,5 per M_3 inferiore sinistro); *formula laminaria* di 8 lamine per M^3 superiore sinistro, e di 9 per M_3 inferiore, più i due talloni; *frequenza laminaria* [3]

(1) Tuccimei G., *Alcuni mammiferi fossili delle provincie Umbra e Toscana*. Roma, 1891.

(2) Dépéret e Mayet, *Monographie des Élèphants Pliocènes de l'Europe ed de l'Afrique du Nord*, p. 119 (in *Les Élèphants pliocènes*). «Annal. de l'Université de Lyon». Nouv. série Sc. et Med., vol. I, fasc. 42. Lyon, 1923.

(3) M. Paolow, *Les Élèphants fossiles de Russie*. «Nouveaux Mem. de la Soc. impériale de Nat. de Moscou», 1910.

di 4 lamine per 10 cm. di lunghezza della corona; *indice dentario* 3,1 per M_3 inferiore sinistro, e 2,6 per M^3 superiore destro; rapporto L/L 2 per M^3 superiore sinistro, e 2,05 per M_3 inferiore sinistro; lamine larghe, smalto massiccio e poco ondulato, spazi cementari interlaminari notevoli. Il *seno loxodonte* è incostante, qualche volta interessa le due lamelle, generalmente la sola lamella anteriore.

Dei due M^3 superiori il destro è frammentario perchè privo del tallone anteriore e di una o due lamine; il sinistro invece è completo e attaccato al supporto osseo mascellare. Questo M^3 superiore sinistro presenta l'anomalìa alquanto curiosa dell'alternanza di ciascuna metà di una lamina con la metà opposta, ed ha una stretta analogia con i due M^3 superiori di Montopoli del Museo di Firenze, prima riferiti da Weithofer [1] all'*El. meridionalis*, ma in seguito Dèperet e Mayet [2] assegnati all'*El. planifrons*, forma arcaica (*frequenza laminaria* 3,5). M^3 superiore destro, incompleto, presenta l'andamento delle lamine normale.

	M^3 sinistro
Lunghezza della parte visibile	mm. 220
Larghezza massima	» 109

Degli inferiori è rappresentato solo M_3 sinistro attaccato al supporto osseo mandibolare. Notevoli in questo molare sono gli spazi cementari interlaminari molto massicci, lo smalto alquanto spesso, la corona bassissima e il *seno loxodonte* più evidente per le lamelle anteriori.

	M_3 sinistro
Lunghezza della parte visibile	mm. 232
Larghezza massima	» 93

Vertebre e coste. – Vertebre cervicali complete non sono state rinvenute nel giacimento di Laiatico. Queste sono rappresentate dalla 2ª cervicale, dalla 3ª, e dalla 6ª o forse 7ª, prive delle apofisi trasverse e dall'apofisi spinosa.

L'asse è in migliore condizione di conservazione e per la sua forma ha molta somiglianza con l'asse dell'*El. meridionalis* descritto e figurato da L. Adams [3] mostrando peraltro l'apofisi odontoidea più alta e più conica.

Le vertebre dorsali in numero di 14 o 15 (mancano le prime 5 o 6) formano la corrispondente parte della colonna vertebrale, la quale misura una lunghezza di m. 1,32 circa. Delle apofisi spinose, data la posizione sul dorso

(1) K. Weithofer, *Proboscidiani fossili del Valdarno*, p. 63, tav. IX, fig. 3. Firenze, 1893.

(2) Depéret e Mayet, op. cit., p. 118, tav. V, figg. 3 *a*, 3 *b*.

(3) A. L. Adams, *Monograph of the fossil British Elephants*. «Palaeontographical Society», vol. XXXV. London, 1881.

dello scheletro, è visibile solo quella corrispondente alla 1ª vertebra della serie, ed è molto robusta, incurvata indietro e lunga. Altre apofisi spinose isolate e frammentarie, hanno sezione triangolare, sono appiattite e profondamente scanalate sulla faccia posteriore. Le apofisi trasverse non sono visibili. Il canale midollare ha sezione trasversalmente ovale.

Numerosissime sono le coste ma tutte rotte, in frammenti di circa 15 o 20 cm. Una tra queste, larga, appiattita trasversalmente, frantumata, appartiene alla serie toracica. La maggior parte, a sezione ovale o subquadrata, sono invece da riportarsi alla serie dorsale.

Cintura toracica. – La scapola sinistra, incompleta e frantumata, è provvista di una piccola porzione della spina. La cavità glenoidea bene conservata è poco profonda, trasversalmente allungata, col suo piccolo diametro di cm. 13,5, e col diametro antero–posteriore di cm. 26,7. La scapola destra è anch'essa incompleta e con la spina rotta per tutta la sua lunghezza. La cavità glenoidea è frammentaria; il suo piccolo diametro è di 13 cm. circa.

Cintura pelvica. – Il bacino è rappresentato da una porzione d'ileo, dai rami superiori (orizzontali) destro e sinistro del pube, e da una cavità cotiloidea.

Arti posteriori. – Dei femori, oltre numerosi frammenti, sono presenti: una grande porzione del corpo, subappiattito trasversalmente e a sezione elittica e le estremità articolari prossimali destra e sinistra, emisferiche e regolarmente arrotondate. Delle estremità articolari distali ho esaminato un condilo anteriore (mediale), e un condilo posteriore (laterale) incompleto.

Delle due tibie, in buono stato di conservazione, la destra è mancante dell'estremità articolare prossimale. Il corpo si mostra robusto e a sezione triangolare. L'estremità distale che si articola sull'astragalo è ampia e a contorno subquadrato.

Le estremità articolari inferiori della fibula, destra e sinistra, provviste di una piccola porzione del corpo, mostrano la faccia inferiore che si articola col calcagno, concava; quella superiore, che si articola coll'astragalo, più piccola e più pianeggiante; quella infine per la tibia, pianeggiante e subcircolare. La continuità della faccia inferiore e superiore è interrotta anteriormente da un'ampia fossa ligamentare. Queste due estremità articolari di fibula dell'*El. planifrons* di Laiatico hanno stretta analogia per la loro forma e proporzioni generali con le estremità distali dell'*El. meridionalis* figurate da Adams[1].

L'astragalo del piede destro è rotto in corrispondenza del terzo interno. Quello del piede sinistro, completo, è un osso massiccio e subappiattito,

(1) A. L. Adams, op. cit., tav. XIX.

con la faccia superiore, sulla quale poggia la tibia, ampia, e più larga in avanti che indietro. Convessa è la faccia anteriore per lo scafoide. Le faccie inferiori che poggiano sul calcagno sono separate da una lunga e relativamente profonda fossa. La faccia esterna per l'articolazione con la superficie superiore del perone è pianeggiante.

Il calcagno del piede destro è rappresentato dalla sola tuberosità, quello del piede sinistro molto bene conservato e completo, massiccio, col corpo di poco più lungo della tuberosità e con la faccia articolare superiore per l'astragalo interrotta da una larga fossa. Regolare si presenta la faccia esterna per la fibula.

Alquanto meno robusto delle precedenti ossa è lo scafoide con la sua faccia interna trasversalmente concava e l'esterna convessa.

I primi cuneiformi del piede destro e sinistro sono frammentari, dei secondi è rappresentato quello del piede sinistro.

Arti anteriori. – Dell'omero destro oltre vari frammenti, è presente l'estremità articolare prossimale, frammentata.

L'omero sinistro, più o meno completo, è però deformato anche dopo il restauro, ed ha la forma e i caratteri soliti degli omeri degli elefanti; la cresta supinatrice, incompleta, non permette di apprezzare l'angolo che essa forma; la testa articolare prossimale è alquanto massiccia, con la tuberosità che si eleva sopra di essa. Inferiormente i due condili hanno la scanalatura mediana ampia, ma poco profonda.

I metacarpi, in genere incompleti, sono rappresentati dall'estremità distale di un 3° metacarpale, dall'estremità distale del 4° metacarpale probabilmente del piede sinistro, dall'estremità distale del 1° e 5° metacarpale; esistono anche tre prime falangi e inoltre due piccole ossa delle ultime.

Il rinvenimento dello scheletro fossile di Laiatico, inglobato in terreno pliocenico marino, assume un notevole interesse paleontologico in considerazione della rarità in Italia dell'*El. planifrons* Falconer e della sua età.

Zoologia. — *Effetti della surrenalectomia mono- o bilaterale sulle grandezze nucleari di alcuni organi endocrini* [1]. Nota di E. Silvestroni, presentata [2] dal Corrisp. T. Terni.

La surrenalectomia eseguita per la prima volta dal *Tizzoni* (1884-1889) per ricercare se fosse o meno compatibile con la vita dell'animale, fu successivamente praticata su larga scala da numerosissimi altri A.A. (Stilling, Tirolois, Pettit, Di Mattei, Canalis, Abelous e Langlois, Strehl e Weiss, Moore e Purinton, Lucibelli, Oppenheim, Hultgren e Anderson, Wiesel, Rolleston, Marchetti, Velich, Simmonds, Parodi, Marenghi, Alquier ecc. ecc.) con scopi diversi e specialmente per studiare o il grado d'ipertrofia compensatoria del surrene lasciato in sito (Elliott e Tuckett, 1906) o delle altre ghiandole endocrine (Boinet, 1895; Marenghi, 1903) o la resistenza degli operati verso le infezioni (Lucibelli, 1901) o le turbe nell'accrescimento corporeo (Ferreira de Mira, 1914; Pende, 1934) o le modificazioni dei prodotti di secrezione del surrene superstite (Mulon, 1907) o le variazioni di sensibilità, da parte degli operati, verso determinate sostanze, quali la neurina e i veleni cardiaci dell'Oubanghi e dell'Oubaio (Boinet, 1896-97), la morfina, veratrina, atropina, veleno del Cobra, curaro, digitotossina, papaverina, codeina (Lewis, 1920-21-23), l'adrenalina (Schwarz, 1910; Kahn e Starkenstein, 1911; Lewis, 1921), la florizina (Schwarz, 1910), la tossina difterica (Lewis, 1920; Belding e Wyman, 1926; Molinelli, 1926), l'insulina (Lewis, 1923; Artundo, 1927; Silvestroni, 1935), il cianuro di potassio e la nicotina (Crivellari, 1926), la morfina (Lewis, 1927) ecc. Nè da questi AA. però nè da altri furono mai studiati gli effetti della surrenalectomia sulle grandezze nucleari delle ghiandole endocrine.

Quei pochi cenni che la letteratura ci fornisce su quest'argomento sono infatti assolutamente incompleti [si parla soltanto genericamente di una notevole ipertrofia e iperplasia, con cariocinesi abbondanti (Lucibelli, 1901; Marenghi, 1903) senza maggiori dettagli] e riguardano la sola surrenale superstite; nessun accenno vien fatto invece alle grandezze nucleari delle altre ghiandole endocrine al seguito di surrenalectomia bilaterale.

Mi sono dunque proposto con indagini cariometriche di portare un contributo su tale argomento.

Ho scelto come animale di esperimento il ratto albino (oltre cento soggetti), a cui ho asportato le ghiandole surrenali in due tempi con intervalli diversi da 2 a 20 giorni. Ho misurato i nuclei dei due surreni di 24 ratti (operati di surrenalectomia bitaterale con l'intervallo di 10–20 giorni tra l'asportazione della prima dalla seconda ghiandola) di cui la prima surrenale asportata (sempre ipertrofica) serviva da autocontrollo. Per le ricerche sulle altre ghiandole endocrine mi sono servito del materiale di 10 ratti surrenalectomizzati bilateralmente (8 operati 6 mesi prima e 2 da un mese) e di altrettanti controlli normali, corrispondenti ai primi per età, sesso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia-Embriologia nella R. Università di Padova.
(2) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

e peso. Le ghiandole surrenali ed alcune ipofisi normali furono sezionate al microtomo congelatore, essendo state fissate le surrenali in formalina–bicromato (Wiesel), e le ipofisi in formolo al 10%. Le altre ghiandole endocrine, per ragioni d'opportunità tecnica, furono invece fissate in formalina e quasi sempre incluse in paraffina. Le misurazioni (oltre quattordicimila per le surrenali, quattromila per l'ipofisi anteriore e circa duemila per ciascuna delle altre ghiandole endocrine prese in esame) furono eseguite con fortissimi ingrandimenti forniti da ottimi obbiettivi a immersione. I dati cariometrici ottenuti furono raccolti in un certo numero di classi (7–10 nei vari strati corticosurrenali; 8–12 nella midolla surrenale; 6–8 nel pancreas endocrino; 5–11 nell'ipofisi anteriore; 5–8 nel glomo carotico.

1° Corticosurrenale. – Le grandezze nucleari della sostanza corticale presentano valori diversi a seconda della zona a cui appartengono. Nella *zona glomerulare* i *valori nucleari tipo*, oscillano, in condizioni normali, fra μ^3 157 e μ^3 274; nell'ipertrofia compensatoria da surrenalectomia unilaterale vanno invece da μ^3 125 a μ^3 274. Nella *porzione esterna della zona fascicolata* essi oscillano fra μ^3 274 e μ^3 456, in condizioni normali, e fra μ^3 328 e μ^3 531 nei surreni ipertrofici al seguito di surrenalectomia unilaterale. Nella *porzione interna della zona fascicolata* i valori nucleari tipo vanno da μ^3 238 a μ^3 328 in condizioni normali e da μ^3 274 a μ^3 389 nell'ipertrofia compensatoria. Nella *zona reticolare* essi vanno da μ^3 195 a μ^3 274 in condizioni normali e dà μ^3 238 a μ^3 389 nei surreni ipertrofici.

I *valori nucleari minimi* oscillano fra μ^3 74 e μ^3 97 nella zona glomerurale e fra μ^3 125 e μ^3 157 nelle zone fascicolate e reticolare di surreni normali: vanno da μ^3 54 a μ^3 97 nella zona glomerulare e da μ^3 125 a μ^3 195 nella zona fascicolata e da μ^3 125 a μ^3 157 nella zona reticolare di surreni ipertrofici al seguito di monosurrenalectomia.

I *valori nucleari massimi* oscillano fra μ^3 389 e μ^3 456 nella zona glomerulare e fra μ^3 389 e μ^3 531 nelle zone fascicolata e reticolare in condizioni normali; e vanno da μ^3 328 a μ^3 456 nella zona glomerulare e da μ^3 531 a μ^3 614 nelle zone fascicolata e reticolare di surrenali ipertrofiche.

Vi è dunque ipertrofia nucleare in seguito a surrenalectomia soltanto nelle zone fascicolata e reticolare.

2° Midolla surrenale. – I *valori nucleari tipo* di questo tessuto oscillano fra μ^3 274–328 e μ^3 389–456 in condizioni normali e fra μ^3 328 e μ^3 389 nell'ipertrofia compensatoria. I *valori nucleari minimi* vanno da μ^3 125 a μ^3 195 nelle due diverse condizioni (normale e dopo surrenalectomia unilaterale): ed i *valori nucleari massimi* oscillano fra μ^3 614 e μ^3 778 in condizioni normali e fra μ^3 681 e μ^3 778 nei surreni ipertrofici al seguito di surrenalectomia unilaterale.

Non vi sono perciò modificazioni importanti delle grandezze nucleari.

3° Nel pancreas endocrino i *valori nucleari tipo* di ratti normali vanno da μ^3 97 a μ^3 157; quelli di ratti surrenalectomizzati bilateralmente 6 mesi prima oscillano fra μ^3 125 e μ^3 238. I *valori nucleari minimi* vanno da μ^3 39 a μ^3 74 in condizioni normali e da μ^3 39 a μ^3 97 dopo surrenalectomia bilaterale. I *valori nucleari massimi* oscillano fra μ^3 195 e μ^3 274 nei soggetti normali e fra μ^3 238 e μ^3 328 nei ratti surrenalectomizzati bilateralmente.

Insorge dunque dopo l'operazione un certo grado d'ipertrofia nucleare.

4° Ipofisi anteriore. – Le *grandezze nucleari tipo* di questo tessuto oscillano fra μ^3 39 e μ^3 238 nei controlli normali e vanno da μ^3 54 a μ^3 274 nei surrenalectomizzati. I *valori nucleari minimi* oscillano, nelle ipofisi normali, fra μ^3 29 e μ^3 97; e vanno da μ^3 29 a μ^3 54 dopo surrenalectomia bilaterale. I *valori nucleari massimi* oscillano fra μ^3 125 e μ^3 328 nei controlli normali; e vanno da μ^3 157 a μ^3 456 negli operati di surrenalectomia bilaterale.

Si osserva perciò, dopo surrenalectomia, maggior assortimento di grandezze nucleari.

5° Nel glomo carotico – Le *grandezze nucleari tipo*, sia in condizioni normali che al seguito di surrenalectomia bilaterale, oscillano fra μ^3 50 e μ^3 125; i *valori nucleari minimi* vanno invece da μ^3 24 a μ^3 50 in condizioni normali e da μ^3 24 a μ^3 35 dopo surrenalectomia bilaterale. I *valori nucleari massimi* oscillano fra μ^3 125 e μ^3 195 in condizioni normali; e vanno da μ^3 157 a μ^3 238 dopo surrenalectomia bilaterale.

Perciò nessuna modificazione importante di grandezze nucleari.

Curve di frequenza. – Con i dati cariometrici ottenuti con le misurazioni ho costruito le curve di frequenza.

A) Surrenale: nella *zona glomerulare* ho ottenuto curve che si avvicinano, negli autocontrolli, al V tipo di Pearson (curve normali); curve prevalentemente con massimo leggermente abbassato e posto un po' più a sinistra nelle surrenali ipertrofiche. Nella *zona fascicolata* si hanno invece curve asimmetriche (I tipo di Pearson), con massimo elevato e situato verso sinistra nei soggetti normali e con massimo meno elevato e spostato verso destra nelle surrenali ipertrofiche. Nella *zona reticolare* le curve sono asimmetriche (III tipo di Pearson) e con massimo elevato e posto verso sinistra negli autocontrolli normali e con massimo meno elevato e spostato verso destra nei surreni in stato d'ipertrofia compensatoria. Nella *sostanza midollare* le curve dei surreni ipertrofici sono simili a quelle degli autocontrolli: sono cioè tutte asimmetriche (si avvicinano al III tipo di Pearson) e con massimo elevato e posto verso sinistra.

B) Pancreas endocrino. – Le curve degli esemplari normali sono assai regolari e presentano massimi elevati e situati tutti verso sinistra: le curve di frequenza dei ratti bisurrenalectomizzati sono anch'esse scarsamente accidentate, però hanno i massimi meno elevati, cioè alcune (3) in sedi pressochè corrispondenti a quelle dei normali, le altre (4) con massimi notevolmente spostati verso destra. Delle varie curve (di esemplari normali e di bisurrenalectomizzati) alcune appartengono al I tipo di Pearson (curve limitate da ambo le parti e asimmetriche), altre al III tipo (curve limitate da una sola parte e asimmetriche) ed altre infine al V tipo (curve normali). Nel complesso risulta cioè che le curve degli animali bisurrenalectomizzati, tendono, generalmente, a spostarsi verso destra, in confronto a quelle di animali (della stessa età, peso e sesso) normali.

C) Ipofisi anteriore. – Le curve degli esemplari normali sono tutte ad un solo massimo e rientrano nei tipi (I–III–V) di curve semplici di Pearson: hanno andamento assai regolare e vertici più o meno elevati. Identico comportamento presentano anche le curve di animali bisurrenalectomizzati un mese prima. Invece nei ratti surrenalectomizzati bilateralmente 6 mesi prima: nei maschi operati in età adulta le curve di frequenza (pur conservandosi ad un solo massimo) risultano spostate, rispetto a quelle dei controlli normali, verso destra del diagramma e dimostrano una variabilità di grandezze nucleari di molto superiore alla norma (10–11 classi anzichè 7–8); nelle femmine bisurrenalectomizzate in età precocissima (20 giorni dopo la nascita) in un caso ho avuto la curva di frequenza ad un solo massimo e in un altro caso (a grande assortimento di valori) una curva con ampio vertice pianeggiante. Nelle femmine operate in età adulta le curve di frequenza sono risultate con due vertici, di cui il primo più elevato del secondo: appartengono al tipo di *curve composte*.

D) Nel glomo carotico le curve sia nei controlli normali che negli animali bisurrenalectomizzati sono risultate tutte ad un solo massimo ed appartengono tanto le une che le altre, o al I tipo (quelle con apice posto a sinistra del diagramma) ovvero al V tipo (curve a campana = normali) di *curve semplici* di Pearson: esse hanno, per lo più, massimi molto elevati e tratti ascendente o discendente assai ripidi. In quest'organo non esistono dunque differenze degne di nota tra curve di frequenza di esemplari normali e quelle di ratti bisurrenalectomizzati.

Riassumendo, gli effetti della surrenalectomia mono– o bilaterale sulle grandezze nucleari degli organi endocrini da me presi in esame sono dunque rappresentati:

1° Nel surrene superstite: da una certa tendenza dei nuclei cellulari a rimpicciolir di volume (non però costantemente) nella zona glomerulare e ad ipertrofizzare più o meno notevolmente nelle zone fascicolata e reticolare.

2° Negli altri organi endocrini: le grandezze nucleari degli elementi insulari del pancreas risultano generalmente aumentate di volume; quelle dell'ipofisi anteriore presentano molto maggior variabilità di valori nucleari.

Le grandezze nucleari della sostanza midollare del surrene superstite (dopo surrenalectomia unilaterale) e del glomo carotico (dopo surrenalectomia bilaterale) restano invece pressochè immutate.

Zoologia (Embriologia). — *La determinazione ciliare e la polarità del movimento vibratile studiate mediante l'irradiazione ultravioletta di neurule di "Rana esculenta"* [1]. Nota di G. Austoni, presentata [2] dal Corrisp. T. Terni.

Si ritiene generalmente che la capacità di formare ciglia non possa essere acquisita da una cellula epiteliale qualsiasi: è presumibile che ciò debba valere anche per l'epidermide embrionale degli Anfibi, epitelio cigliato che pure si distingue, per peculiarità evolutive e morfologiche, da quegli epiteli a cui noi comunemente diamo tale appellativo.

Sarebbe da ammettere cioè che negli Anfibi abbia luogo una determinazione ciliare precoce in un numero limitato di elementi epidermici: sotto l'azione di cause determinanti e con un meccanismo a noi sconosciuto, numerose cellule, sparse qua e là in seno all'epidermide dell'embrione secondo modalità topografiche specifiche e costanti che fanno pensare all'influenza di fattori genetici, assumono la potenzialità di produrre ciglia e di acquistare tutti gli attributi specifici dell'elemento differenziato.

Nei riguardi dell'epoca in cui questa determinazione ciliare si compie, tutti gli Autori sono concordi nell'ammettere che essa avvenga in stadi assai precoci dello sviluppo embrionale. Però mentre Baumann e Dèruaz [3], senza tuttavia corredare la loro asserzione con qualche dato sperimentale che la documenti, accennano alla possibilità che essa abbia luogo al momento in cui si costituisce il tubo midollare, le esperienze di Holtfreter [4] di colture « in vitro » in soluzioni saline di frammenti di larve di Anfibi, dimostrano chiaramente che un lembo di ectoderma, prelevato da una giovane gastrula

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana Normale della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

(3) A. Baumann e G. Dèruaz, *Recherches sur l'histologie et la physiologie de l'appareil ciliarie chez les larves de quelques batraciens.* « Arch. d'Anat., d'Histol. et d'Embriol. », to. 16, p. 233, 1933.

(4) J. Holtfreter, *Ueber die Aufzucht isolierter Teile des Amphibienkeimes. II. Züchtung von Keimen und Keimteilen in Salzlösung.* « Roux' Arch. für Entwicklungsmech. der Organismen », Bd. 124, S. 404, 1931.

di *Amblystoma mexicanum*, presenta in genere al secondo giorno dall'espianto (corrispondentemente allo stadio di chiusura del tubo midollare nella larva di controllo) un distinto movimento vibratile; al terzo giorno poi l'intero frammento ruota vivacemente nel liquido.

Come in tutti gli altri epiteli cigliati, anche nell'epidermide embrionale degli Anfibi il movimento ciliare (m. c.) possiede una ben netta « polarità »: il battito della ciglia si effettua cioè sempre su di uno stesso piano, generando nel liquido ambiente delle correnti che posseggono fin dagli inizi una direzione definita e costante.

Gli Autori sono concordi nel ritenere che questa proprietà caratteristica delle ciglia di battere costantemente nella stessa direzione sia rigorosamente determinata nei gruppi di cellule cigliate quando ancora l'apparato ciliare non si è differenziato. Infatti dei lembetti di epidermide embrionale di Anfibio escissi, ruotati di 180° e reinnestati nello stesso punto quando ancora non si è determinata questa « polarizzazione » dei futuri elementi cigliati, presentano in seguito un m. c. che concorda perfettamente con quello delle zone circostanti, mentre se l'operazione viene effettuata più tardi le ciglia del lembo ruotato batteranno in senso opposto rispetto a quelle dei territori vicini.

Nei riguardi dell'epoca in cui avrebbe luogo la determinazione della polarità del m. c. nelle cellule di questa epidermide embrionale, Woerdeman [1] sostiene che in *Rana esculenta* essa ha inizio negli ultimi momenti della gastrulazione, partendo dal blastoporo, mentre le successive ed assai precise ricerche di Twitty [2] su *Amblystoma punctatum* dimostrano che tale determinazione non si verifica che allo stadio di chiusura del tubo midollare, precedendo quindi soltanto di poco l'apparizione delle ciglia.

Ho ritenuto non privo di interesse, in rapporto alle questioni più sopra prospettate, osservare quali effetti produca nei riguardi del futuro m. c. l'irradiazione ultravioletta (u. v.) dell'epidermide di embrioni di Anfibi in stadi precocissimi di sviluppo. Quali conseguenze avranno sull'epoca di comparsa delle prime cellule cigliate, sulla loro distribuzione, sulla direzione e quantità totale del m. c., la morte e la caduta per azione dell'u. v. degli elementi ectodermici, in momenti così importanti e delicati per la differenziazione del mantello epidermico?

Ho sottoposto a brevi irradiazioni (10″–15″) di un intero lato del corpo, embrioni di *Rana esculenta* a placca midollare appena abbozzata ed embrioni con doccia midollare ampiamente aperta od in stadi abbastanza

(1) M. W. Woerdeman, *Entwicklungsmechanische Untersuchungen über die Wimperbewegung des Ectoderms von Amphibienlarven.* «Roux' Arch. für Entwicklungsmech. der Organismen», Bd. 106, S. 41, 1925.

(2) V. Ch. Twitty, *Experimental studies on the ciliary action of amphibian embryos.* « Journ. exp. Zool. », vol. 50, p. 319,, 1928.

avanzati del processo di chiusura del tubo midollare, quando tuttavia non è ancora comparso alcun elemento ciliato (Austoni) [1].

La tecnica seguìta è quella stessa già da me applicata nello studio degli effetti immediati dell'irradiazione u. v. sul m. c. ectodermico degli embrioni di Anfibi (Austoni) [2]: ho usato cioè una luce u. v. monocromatica di circa 2800 Å., prodotta dallo stesso apparecchio ad elettrodi di *Mg* adoperato in quelle esperienze. Il materiale è stato mantenuto costantemente, anche durante le irradiazioni, in ambiente liquido salino (liquido di Holtfreter) a temperatura ambiente (22°). La direzione del m. c. veniva indicata dalle correnti di granuli di Sudan III aggiunto al liquido stesso.

Le esperienze, fatte su di un numero abbastanza notevole di neurule, mi hanno permesso le seguenti constatazioni:

Il movimento ciliare *compare* costantemente, sul lato irradiato, alla stessa epoca in cui si rende manifesto sull'epidermide normale, cioè immediatamente prima della chiusura completa del tubo midollare, e con una successione cronologica e topografica identica a quella che si osserva negli embrioni di *Rana esculenta* indenni (vedi Austoni, 1935).

La *direzione* del movimento ciliare considerata in embrioni a sviluppo più avanzato, largamente provvisti di elementi vibratili (stadi precedenti non offrono che accenni a correnti liquide ben definite) è pressochè normale soltanto nella parte mediana del fianco irradiato, quantunque anche qui sia sempre riscontrabile una maggiore o minore obliquità delle correnti liquide rispetto al lato opposto. Nelle parti dorsale e ventrale, come in tutte le altre zone periferiche, si notano invece deviazioni più spiccate e numerosi vortici, quale conseguenza della retrazione che ha luogo a livello dell'epidermide colpita. (Fig. 1ª). Infatti l'epidermide circostante non irradiata e persino quella del lato opposto (il che è chiaramente visibile specie sulla superficie ventrale) per effetto della forte retrazione viene stirata e spostata in modo notevole, e ciò sia per l'estensione del territorio leso che per la precocità degli stadi irradiati.

La *quantità totale* del m. c. sul fianco irradiato si presenta fin dall'inizio (ma in modo più evidente in stadi successivi di sviluppo dell'embrione) nettamente e notevolmente inferiore a quella del lato indenne e i granuli di Sudan III non arrivano mai a spostarsi con moto uniforme. I granuli procedono abbastanza velocemente, ma anzichè rettilinei procedono a zig–zag per effetto di impulsi non sufficientemente ravvicinati: rarità d'impulsi dovuta al fatto che il numero degli elementi cigliati è molto inferiore al normale.

(1) G. Austoni, *Il movimento ciliare ectodermico degli embrioni di Triton taeniatus, alpestris, cristatus e di Rana esculenta.* « Monit. Zool. Ital. », vol. XLV, fasc. 11–12, p. 311, 1935.

(2) G. Austoni, *Irradiazione u. v. localizzata e suoi effetti sul m. c. dell'epidermide embrionaria di Anfibi.* « Attì R. Istit. Veneto Scienze, Letttere ed Arti », to. XCIV, par. IIª, p. 105, 1934–35.

Inoltre, seguendo nel loro ulteriore sviluppo le neurule così irradiate, si osserva, nello stadio in cui di norma la differenziazione vibratile è completa, una forte deficienza di movimento ciliare sul lato leso: tale deficienza è molto più accentuata di quanto non si abbia irradiando larve adulte per uno stesso periodo di tempo.

Fig. 1. — *a* Embrione di *Rana esculenta* irradiato allo stadio di neurula (placca midollare incipiente); è chiaramente visibile specie lungo il cercine midollare una forte reazione. *b* Nello stesso embrione in uno stadio più tardivo di sviluppo, la direzione del m. c. (indicata dalle freccie) si allontana notevolmente dalla norma anche per l'esistenza di alcuni vortici (il corpo dell'embrione presentava deformazioni abbastanza cospicue).

Fig. 2. — Embrione di *Rana esculenta* nello stesso stadio di sviluppo di quello riprodotto in Fig. 1 (*b*). Le freccie indicano il comportamento delle correnti liquide quale esso appare in embrioni indenni (da Austoni, 1935).

Riassunto: l'irradiazione u. v. per 10″–15″ dell'epidermide di neurule in stadio di placca midollare e di iniziale chiusura del tubo midollare:

1) non influisce in alcun modo sull'epoca di comparsa e sulla distribuzione dei primi elementi ciliati;

2) altera più o meno sensibilmente la direzione complessiva del m. c. fino al punto da dare origine a dei vortici di corrente quando sia causa di una considerevole retrazione che modifichi l'orientamento delle zone epidermiche circostanti alla parte irradiata;

3) è causa di un deficente sviluppo di elementi cigliati in seno al rivestimento ectodermico, sviluppo che è tanto più scarso quanto più giovane è l'embrione che si è irradiato.

Dalle mie osservazioni risulta come molto probabile che in *Rana esculenta* una determinazione ciliare insorga realmente ad un dato momento dello sviluppo embrionale in un numero limitato di elementi ectodermici e che queste cellule siano determinate a produrre ciglia già in stadi antecedenti a quello di placca midollare incipiente.

Riguardo all'epoca in cui si determina la polarità del futuro m. c. i risultati da me ottenuti si accordano con quanto Woerdeman sostiene in proposito; quindi in *Rana esculenta* diversamente da *Amblystoma punctatum* (Twitty), anche la determinazione della polarità avrebbe luogo in uno stadio di sviluppo molto precoce e per lo meno antecedente a quello di placca midollare incipiente.

Nota. – Il problema della polarità dell'ectoderma degli embrioni di Anfibi, polarità che si manifesta con un diverso orientamento strutturale del piano profondo rispetto a quello superficiale del mantello epidermico, è stato affrontato in epoca affatto recente anche da Luther (1934), mediante una serie di esperienze in cui ectoderma di blastula, gastrula, neurule e di embrioni a tubo midollare chiuso veniva trapiantato col lato interno rivolto verso la superficie libera. Si è così stabilito che l'inversione della polarità dell'ectoderma di giovani embrioni di Afibi, con differenziazione di cellule cigliate dall'originario lato profondo del lembo epidermico, è possibile soltanto fino ad un certo stadio di sviluppo, diverso secondo la specie: in *Axolotl* la possibilità d'inversione della polarità permane fino all'epoca di formazione della placca midollare, in *Triton* fino alla completa chiusura del tubo nervoso.

Biologia. — *Notizie preliminari sulle caratteristiche chimiche e biologiche del lago di Massaciuccoli.* Nota di G. Brunelli e G. Cannicci, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Levi-Civita presenta un opuscolo fatto in collaborazione col Collega Amaldi dal titolo « Nozioni di balistica esterna » e ne espone il contenuto.

Il Socio Sacco presenta in omaggio l'opera in tre volumi che illustra il Parco Nazionale del Gran Paradiso, pubblicata a cura della Commissione Reale del Parco stesso.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci Armellini, Bompiani, Crocco, Giorgi, Levi-Civita, Raffaele, Stefanini, Visco.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° dicembre 1935

Acerbo Giacomo. — Compiti e prospettive dell'agricoltura nei sistemi di economia regolata. (Estr. dal « Giornale degli Economisti e rivista di Statistica », Novembre 1935). Città di Castello, 1935. 8°, pp. 1-37.

Amaldi Ugo. — Vedi Levi-Civita Tullio.

Coblentz W. W. — Sources of ultraviolet and infrared Radiation used in Theraphy. (Reprinted from the « Journal of the American Medical Association ». Volume 103). Vashington, s. d. 8°, pp. 1-26.

Coblentz W. W. — Vergleichende Untersuchungen über die Ergthemwaksamkeit und die radiometrisch sich ergebende UV-Intensität bei verschiedenen Lichtquellen als Grundlage für die Festsetzung einer Masseinheit. (Sonderabdruck aus « Strahlentherapie ». Band 50, pagine 179–190). Washington, 1934. 8°.

Commissione Reale del Parco. — Il Parco Nazionale del Gran Paradiso. Voll. I–III. Torino, 1925. 8°, pp. 1–120, 1–112, 1–152.

Conrad Frank H. — Some Equilibrium Relations in the System Calcium Oxide-Sulfur Dioxide-Water. (Acid Region) at Pressures below Atmospheric. (Reprinted from the « Journal of the Americen Chemical Society ». Volume 56, pp. 2554-2562). Washington, 1934. 8°.

D'Arrigo Agatino. — Ricerche sulla « linea neutra » inerente al Golfo di Gaeta e sul regime del litorale deltizio del Volturno. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici ». Anno 1934). Roma, 1934. 8°, pp. 1–33, tavv. I–II.

Dwight Pierce. — Some new Viewpoints on the atomic Theory. Philadelphia, 1935. 8°, pp. 1-28.

Eyraud H. — Valori osservati di una variabile casuale e loro perequazione. (Estr. dal « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari ». Anno VI, n. 3). Roma, 1935. 8°, pp. 1–15.

Fedele Marco. — Vedi Pazzini Adalberto.

Gumbel E. J. — Le plus grand âge, distribution et série. (Extr. du « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris ». 29 Juillet 1935, pp. 318-319). Paris, 1935. 8°.

Levi-Civita Tullio e Amaldi Ugo. — Nozioni di balistica esterna secondo il programma stabilito dalla Commissione suprema di Difesa. Bologna, 1935. 8°, pp. 1–56.

McClain Kenneth Herbert. — Electrode Potentials and adsorbed ionic Films. (Reprinted from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. 53, pp. 3202-3212). Washington, 1934. 8°.

Pazzini Adalberto e Fedele Marco. — Giovanni Battista Grassi. 27 marzo 1854-4 maggio 1925. (Estr. dalla « Rivista di Biologia ». Vol. XIX). Firenze, 1935. 8°, pp. 1–46.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 dicembre 1935 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geologia. — *Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino.* Nota II [1] del Socio F. Sacco.

Dalla Romagna che, coll'Emilia, parrebbe costituire, dal punto di vista geologico, il vero Appennino Settentrionale (str. s.), passando alle Marche, colle quali si inizierebbe geologicamente l'Appennino centrale, vediamo che permangono, diventando più grandiosi e complessivamente più regolari, i corrugamenti longitudinali che fanno emergere le catene mesozoiche, così per es. quelle principali di M. Nerone, M. Catria, M. Pennino, M. Cavallo, ecc., e quelle laterali, minori, di Gubbio, M. Subasio, M. Martano ecc., ad ovest e di M. Paganuccio; Monti Cesana, M. S. Vicino, M. Sibillini ecc.; di Cingoli, Monte dei Fiori ecc., ad est. Ma invece non compaiono più veri corrugamenti anticlinalici trasversali, ciò che probabilmente è dovuto, almeno in gran parte, alla notevole compattezza delle formazioni mesozoiche dell'Appennino centrale; formazioni non più parzialmente argilloscistose come nell'Appennino settentrionale, ma costituite essenzialmente da strati e banchi calcarei più o meno rigidi; questi, mentre si adattano a costituire tettonicamente più o meno grandiose anticlinali cupuloidi longitudinali, cioè con andamento direzionale parallelo all'asse appenninico, spesso anche fratturandosi in ampie zolle più o meno spostate, rialzate o sprofondate da un lato, non si prestano invece a corrugamenti un po' anormali come quelli trasversali sovra indicati.

Tuttavia ad un fenomeno tettonico un po' analogo a quelli sovraccennati può riferirsi l'importantissima linea di dislocazione tettonica (n. VIII dello

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1935.

schema orogenetico) che si sviluppa dalla regione di Amandola, per Cittaducale, Antrodoco, Orvinio, ecc. sin oltre Tivoli, forse fino alla punta mesozoica del Circeo.

Tale importantissima linea tettonica è probabilmente in relazione, direi angolare, ad incrocio, colla molto complessa linea di fratturazione longitudinale dell'Appennino occidentale (linea A–B dell'annesso schema geotettonico), che originò l'estesissimo vulcanismo plistocenico laziale, dagli Albani al Monte Amiata, attraverso cioè la regione romana-sabatina-cimina-volsinia, continuantesi ancora ulteriormente, verso N-O, in modo da produrre le emersioni mesozoiche del Senese (l. s.) sin oltre Montaione; gigantesco quanto complicato allineamento di fratture e conseguenti faglie, a cui è probabilmente connesso un'altro, subparallelo (ad ovest), complesso e multiplo allineamento di ripetute fratturazioni, faglie e pieghe, che originò vari fenomeni, come: 1° la emersione paleomesozoica del Grossetano–Massetano, del Campigliese ecc. sin presso il piano pisano, con probabile prolungamento (per quanto spezzato e deviato) nei monti pisani, apuani e spezzini; 2° le protrusioni trachitiche di Roccastrada–Orciatico e del Campigliese; 3° i soffioni boraciferi del Volterrano; 4° le sorgenti termali calcarifere che depositarono le ampie masse di travertino di dette regioni (linea A' — B' dello schema).

Ritornando alla Direttrice tettonica trasversale di Amandola–Tivoli, notisi che essa rappresenta una importantissima linea di dislocazione, sia in senso orizzontale, producendo uno spostamento (da N-N–E a S–S–O) tra le linee direttrici longitudinali della tettonica umbra e quella della tettonica abruzzese, sia in senso verticale, lasciando relativamente depresso il lato orientale, amplissimamente occupato dai depositi cenozoici dell'alto Ascolano e Teramano occidentale (tra Amandola e Montereale l. s.) ed invece facendo sorgere, con complicate fratture secondarie in vario senso, una lunga serie di gruppi montuosi mesozoici, dai Sibillini ai Sabini–Tiburtini.

A questo grandioso allineamento di dislocazione, quasi direi fronteggiantelo (ma a molti chilometri di distanza da essa), potrebbe forse parallelizzarsi, verso est, l'altro allineamento, più irregolare (perchè con forte spostamento e complicazioni nel Gruppo del Gran Sasso e perchè più connesso con le linee tettoniche longitudinali dell'Appennino) che si sviluppa, con direzione N–S ad un dipresso (n. IX dello schema grafico) da Ascoli Piceno, attraverso il Gran Sasso d'Italia, i Monti di Sulmona, dell'Alto Sangro ecc., sino al Monte Massico, connettendosi colla fratturazione profonda che originò il vulcanismo di Rocca Monfina; lasciando così fra dette due direttrici (VIII e IX) un'amplissima zona di relativo sprofondamento o di speciale depressione, in cui si depositarono amplissimamente le formazioni cenozoiche entrappenniche dell'alto Teramano e del Carsolano (l. s.).

Anche le due braccia costituenti il mirabile Golfo di Napoli corrispondono a due linee di frattura trasversali (n. X dello schema); quella occidentale che originò il vulcanismo flegreo-ischiano, connessa probabilmente

con una subacquea che originò il Vesuvio, e quella orientale, a faglia, con forte sollevamento, che fece emergere la penisola sorrentina.

A queste linee tettoniche si connette quella (XI) di Salerno-Benevento.

Anche la linea di forti emersioni triasiche che punta a nord nel vulcanismo del Vulture e, dopo aver costituito l'Alto Appennino della Lucania, termina a sud nel Tirreno presso Cetraro (n. XII dello schema), potrebbe rappresentare un fenomeno un po' analogo a quelli sovraccennati, ma più complesso per la compattezza delle roccie e per la connessione colle numerose fratture longitudinali [1].

Pure notevole è la grande zona di depressione (XIII) tra il Mesozoico della Basilicata meridionale e il Cristallino della Calabria. Anche la grandiosa frattura e relativo stacco delle formazioni cristalline della Calabria, donde derivò la depressione di Catanzaro tra il Golfo di Squillace e quello di S. Eufemia (XIV), corrisponde ad una linea di dislocazione trasversale, come già segnai nell'articolo « La Terra è viva » (1909); ma in tal caso questi fenomeni si complicano assai e possono lasciar adito a elucubrazioni geotettoniche un po' fantastiche, connettendosi ad intreccio di fratture, vulcanismo ecc., come accennai in detto articolo; per cui è meglio arrestarsi sul margine di questo campo un po' troppo ipotetico.

Riassumendo possiamo concludere che, mentre nell'Appennino settentrionale le potenti formazioni argilloscistose permisero, anzi facilitarono, i corrugamenti più svariati ed intensi (anche con rovesciamenti e scorrimenti) sia longitudinali sia trasversali, invece nell'Appennino centrale e meridionale, trattandosi di terreni essenzialmente compatti, rigidi, piuttosto fratturabili che non piegabili, le direttrici tettoniche, sia longitudinali sia trasversali, risultarono piuttosto a tipo di faglie, anche numerose, più o meno forti, talora incrociate.

Quanto alla causa che originò le pieghe e le faglie trasversali, cioè più o meno ortogonalmente od obliquamente incrociate con quelle longitudinali, normali, dell'Appennino, essa rientra in quel complesso di fenomeni fisici collegati a sforzi di pressione, di trazione e di torsione, dimostrati anche da numerose e svariate esperienze di laboratorio, per cui non è il caso qui di insistervi.

(1) Vedi F. Sacco, *La Geotettonica dell'Appennino meridionale*, 1912.

Mineralogia. — *Sulla scheelite delle miniere del Gerrei in Sardegna.* Nota [1] del Corrisp. A. Pelloux.

La scheelite si trova in Sardegna insieme ai minerali d'antimonio e, sebbene non abbondi, non può dirsi vi costituisca una rarità poichè piccoli quantitativi ne furono e ne sono utilizzati dalla nostra industria siderurgica, quando, nel procedere dei lavori minerari per l'antimonio, si ha la ventura di trovarne.

I giacimenti della scheelite sarda vennero più o meno diffusamente descritti da G. B. Traverso [2], D. Lovisato [3], A. Martelli [4], F. Millosevich [5] e si trovano nelle miniere di Su Suergiu, Corti Rosas e Sa Mina, nel Gerrei, ed in quella di Genna Ureu, nella Trexenta.

Delle scheeliti di Su Suergiu si hanno analisi dovute a Reberleim [6], Mascazzini [7] e Aloisi [8], di quella di Genna Ureu, un'analisi del Rimatori [9]. Di queste scheeliti non furono ancora studiati i cristalli che, in Sardegna, sono rarissimi, il minerale trovandovisi abitualmente in masse compatte, insieme alla stibina, alle sue ganghe o nelle rocce che ne costituiscono il giacimento.

Debbo alla cortesia del sig. A. Bernardini, direttore tecnico delle miniere e fonderie d'antimonio del Gerrei, l'avere avuto diversi cristalli di scheelite provenienti dalla miniera di Corti Rosas, ed un campione di Sa Mina, mi fu gentilmente donato da F. Millosevich. Mentre ad entrambi porgo ancora i miei ringraziamenti, credo opportuno di dare la descrizione di questi esemplari, reputando non privo di interesse il fare conoscere come i cristalli dell'anglesite sarda si presentano.

I campioni provenienti dalla miniera di Corti Rosas sono nove, dei quali otto consistono in cristalli staccati, mentre in uno solo sono ancora

(1) Presentata nella seduta del 15 dicembre 1935.

(2) Vedi: G. B. Traverso, *Sulla scoperta della scheelite nella miniera di Su Suergiu (Villasalto)*. In «Rendiconti dell'Associazione Mineraria Sarda», 1901, fasc. 8.

(3) Vedi D. Lovisato, *Giacimento di minerali di tungsteno a Genna Gureu ai limiti fra Orroli e Nurri (Cagliari)*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XVI, ser. 5ª, fasc. 8, 1907.

(4) Vedi A. Martelli, *Ricerche di minerali di molibdeno e tungsteno in Sardegna*. Nei «Rendiconti dei lavori dell'Ufficio Invenzioni e ricerche», vol. I; *Giacimenti italiani di minerali accessori per la Siderurgia*. Roma, 1922, p. 123 sgg.

(5) Vedi F. Millosevich, Introduzione e riassunto della precedente pubblicazione.

(6) Vedi G. B. Traverso, op. cit.

(7) Vedi G. B. Traverso, op. cit.

(8) Vedi A. Martelli, op. cit.

(9) Vedi D. Lovisato, op. cit.

aderenti alla loro ganga. Questa è costituita da calcare compatto, di colore grigiastro mineralizzato da stibina in cristalli prismatici, con forme indistinte e facce di sfaldatura. Su di una delle superficie del campione, in parte impiantati sulla roccia, ed, in parte, avvolti dalla stibina, si vedono diversi cristalli di scheelite. Di essi non si scorgono perciò che alcune facce, mentre soltanto un cristallo presenta completa la sua metà superiore, con la forma { 111 } dominante e la { 101 } subordinata. Diversi di questi cristalli hanno sottili fenditure, ricolme di stibina; altri includono sottili aghetti di questo minerale.

Le forme osservate nei cristalli di scheelite di Corti Rosas, in ordine di sviluppo e di frequenza, sono le seguenti:

{ 111 } , { 101 } , { 313 } , { 131 } , { 122 } , { 001 }.

In tutti i cristalli la forma { 111 } è quella predominante; le sue facce presentano superficie piuttosto scabre ed ondulate e perciò al goniometro dànno immagini assai confuse.

La { 101 } è sempre presente ed ha vario sviluppo; spesso presenta facce abbastanza lucenti, talora solcate da una sottile striatura parallela allo spigolo con ($10\bar{1}$).

{ 313 } si trova in pochi dei cristalli esaminati, sempre con facce sottilissime ed in numero scarso (una o due per cristallo).

{ 131 } è anche piuttosto rara e fu trovata soltanto in tre cristalli, con piccole facce triangolari o trapezoidali, scabre e con scarso splendore.

{ 122 } fu osservata con una sola faccia sottilissima in un unico cristallo ed, al goniometro, dà immagine molto sbiadita.

{ 001 } fu osservata soltanto in due cristalli e con facce piccolissime.

Le combinazioni alle quali queste forme dànno luogo sono le seguenti:

a) { 111 } , { 101 } , { 313 } , { 131 } , { 122 }.
b) { 111 } , { 101 } , { 313 } , { 001 }.
c) { 111 } , { 101 } , { 313 } , { 131 }.
d) { 111 } , { 101 } , { 001 }.
e) { 111 } , { 101 } , { 313 }.
f) { 111 } , { 101 }.

L'abito dei cristalli è quello più frequente nella scheelite, cioè bipiramidale; nessuno di essi presenta indizi di geminazione. Uno dei cristalli, completo in tutte le sue parti, è allungato secondo uno degli assi binari orizzontali, dovuto al ripetersi in tale direzione, di più individui in accrescimento parallelo, costituiti dalle sole forme { 111 } e { 101 }, variamente sviluppate e terminanti a cresta in corrispondenza delle due estremità dell'asse *z*.

Le dimensioni dei cristalli variano fra i 5 ed i 15 millimetri, il loro colore è giallo miele; sono torbidi ed hanno lucentezza vitrea.

Stante l'imperfezione delle facce, le misure goniometriche hanno bensì consentito di attribuirle con certezza alle forme che ho indicate, determinando con il goniometro a due cerchi, gli angoli di posizione, ma le misure non potrebbero servire ad un esame comparativo con cristalli di scheelite di altre località. Reputo perciò inutile di qui riportare il valore degli angoli misurati.

L'esemplare di Sa Mina consta di scheelite compatta e granulare, mista a calcite spatica. Esso presenta due delle sue superficie profondamente corrose in seguito a dissoluzione e scomparsa della calcite, ed è in queste parti del campione che si vede qualche piccolo cristallo. Le forme presenti consistono soltanto nei due ottaedri {111} e {101} che hanno facce con vario sviluppo. Le dimensioni sono comprese fra i 2 ed i 4 millimetri. Il colore della parte massiccia è biancastro, leggermente ocraceo, quello dei cristalli giallo aranciato.

Dalla pubblicazione del Lovisato si rileva che dei cristalli si trovarono anche nella scheelite di Genna Ureu, ma non ne fu data la descrizione. Quanto alla scheelite di Su Suergiu, il sig. Bernardini mi ha assicurato di non averla mai trovata in cristalli sebbene da tanti anni diriga quella miniera.

Poichè nel trattato dell'Hintze [1] la scheelite di Su Suergiu è indicata come *cuproscheelite,* mentre ciò non corrisponde alle analisi che se ne hanno, ho esaminato gli esemplari che possiedo nella mia raccolta, constatando che nessuno di essi contiene rame. Confrontando allora i dati analitici riportati dall'Hintze, tolti da una recensione contenuta nel giornale del Groth [2] della Nota di Traverso [3], ho trovato che vi è ripetuto un errore per il quale venne attribuito a CuO il 9,717 % di Cao che, nell'analisi originale, spetta a calcite, contenuta nella ganga del minerale di tungsteno. È perciò da escludere che, sino ad oggi, la *cuproscheelite* sia stata trovata in Sardegna.

(1) Vedi *Handbuch der Mineralogie.* Erster Band, Seite 4087, 4088. Leipzig, 1929.

(2) Vedi G. B. Traverso, op. cit.

(3) Vedi recensione di C. Riva nel « Zeitschrift fur Krystallographie und Mineralogie von P. Groth. », Band 37, Seite 396, 1903.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto.* Nota di G. Lampariello, presentata (1) dal Socio T. Levi-Civita.

1. In molte applicazioni dell'Analisi alla Meccanica, Fisica matematica ecc. intervengono funzioni, scalari o vettoriali, dipendenti dal generico punto P di un continuo indefinito ad una, due o tre dimensioni, che si mantengono limitate, quando P tende comunque all'infinito.

Considerando ad es. le funzioni (scalari) di una sola variabile reale x, si dice che $f(x)$ è *regolare* all'infinito se ammette uno sviluppo in serie di Laurent convergente del tipo

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{a_n}{x^n} .$$

Con la trasformazione

$$x = \frac{1}{\xi}$$

la $f(x)$ risulta così regolare nel senso del Weierstrass nel punto $\xi = 0$.

Ma, pur considerando usuali funzioni, può accadere che esse tendano a limiti differenti secondo che x tende a $+\infty$ o $-\infty$.

Sia ad es. la funzione $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ con la determinazione positiva del radicale. Essa è uniforme e ovunque regolare nel senso del Weierstrass, non solo per tutti i valori reali (finiti) di x, ma anche in una striscia del piano complesso che ricopra il detto asse ed escluda i punti critici $\pm i$.

Si può scrivere

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

e si riconosce che il $\lim f(x)$ è 1 o -1, secondo che x tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Questa osservazione (che non ha carattere di sottigliezza critica), concernente funzioni che possono benissimo rappresentare fenomeni quantitativi meccanici o, più generalmente, fisici, induce ad analizzare il comportamento analogo per le funzioni di più variabili.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

Ed anzi converrà estendere le considerazioni a grandezze vettoriali.

In una prossima Nota avremo occasione di applicare i risultati conseguiti per la dimostrazione di un nuovo teorema di idrodinamica pura.

2. Consideriamo, per fissare le idee, una funzione (scalare) $f(x_1, x_2, x_3)$ definita in tutto lo spazio (o soltanto all'esterno di una o più superficie chiuse esterne l'una all'altra), ovunque continua insieme con le derivate parziali che occorrerà considerare.

Sia $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ la distanza del punto P di coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 dall'origine O.

Se P non è l'origine, siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i coseni della retta OP orientata positivamente da O verso P, talchè

$$x_i = \alpha_i r \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Le α si possono riguardare quali coordinate cartesiane del generico punto Q della superficie sferica σ di centro O e raggio 1.

Ciò posto, dicesi che la f è *infinitesima* o che si *annulla all'infinito* se

$$\lim_{r \to \infty} f = 0.$$

Allo scopo di analizzare il comportamento all'infinito, tenendo conto delle circostanze di fatto analoghe a quelle riconosciute sull'esempio del n. 1, porremo le seguenti definizioni:

1) La f è *infinitesima di ordine* $m > 0$ con $\frac{1}{r}$ o *è di ordine m all'infinito* se esiste finito e non identicamente nullo il

$$\lim_{r \to \infty} r^m f = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

La funzione φ dipenderà, in generale, dai coseni α della generica direzione dello spazio e si può riguardare come funzione del punto Q variabile su σ, quindi, in definitiva, funzione di due variabili indipendenti (coordinate curvilinee di Q).

Ma noi preferiamo usare le variabili α per ragioni di simmetria;

2) la f è *infinitesima di ordine maggiore (o minore) di m* secondo che il $\lim_{r \to \infty} r^m f$ è identicamente nullo o infinito;

3) la f è *semiregolare* all'infinito se è del tipo

$$f = \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{r^m},$$

con $m > 0$, essendo φ funzione analitica del punto Q.

Analoghe definizioni porremo per un vettore $\boldsymbol{w}$, funzione di P;

1') il vettore $\boldsymbol{w}$ è di ordine $m > 0$ all'infinito se

$$\lim_{r \to \infty} r^m \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u},$$

essendo $\boldsymbol{u}$, funzione del generico punto Q di σ, non identicamente nullo.

Ne segue che almeno una delle componenti di $\boldsymbol{w}$ secondo gli assi è di ordine m;

2') il vettore $\boldsymbol{w}$ è di ordine maggiore o minore di m secondo che il limite predetto è nullo o infinito;

3') il vettore $\boldsymbol{w}$ è *semiregolare* all'infinito se è del tipo

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}}{r^m},$$

con $m > 0$, essendo $\boldsymbol{u}$ funzione analitica del punto Q.

3. Ciò posto, come si comporta l'ordine di fronte alla derivazione?

Per le funzioni più comuni si verifica che, ad ogni derivazione, si aumenta di un'unità l'ordine d'infinitesimo.

Così ad es.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = -\frac{\alpha_i}{r^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Più generalmente, si comporta come $\frac{1}{r}$ ogni funzione f, semiregolare di 1° ordine, rappresentata analiticamente da una serie del tipo (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{a}{r} + \sum_1^\infty{}_n \frac{P_n(x_1, x_2, x_3)}{r^{n+1}},$$

dove a è costante e P_n è un polinomio omogeneo di grado n nelle x.

Infatti, ogni termine

$$f_n = \frac{P_n}{r^{n+1}}$$

è del 1° ordine, poichè

$$r f_n = \frac{1}{r^n} P_n(\alpha_1 r, \alpha_2 r, \alpha_3 r) = P_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

D'altra parte, derivando termine a termine, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{a\alpha_i}{r^2} + \sum_1^\infty{}_n \left(-\frac{n+1}{r^{n+2}} \alpha_i P_n + \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n}{\partial x_i} \right).$$

(1) È questo il tipo più generale fin qui considerato di funzioni di prim'ordine all'infinito. Cfr. ad es. P. PAINLEVÈ, *Leçons sur la resistance des fluides non visqueux*, p. 4. Paris, Gauthier Villars, 1930.

Il 1° addendo del termine generale di questa serie è del 2° ordine e lo stesso ordine compete al 2° addendo, perchè $\frac{\partial P_n}{\partial x_i}$ è omogenea di grado $n-1$.

Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è del 2° ordine.

Prendendo norma da questi esempi, proponiamoci di indagare, più generalmente, sotto quali condizioni si può affermare che, essendo f di ordine m (o maggiore di m), sono di ordini $m+1, m+2, \cdots$ (o maggiori di $m+1, m+2, \cdots$) rispettivamente le derivate parziali di f, rispetto alle x, del 1°, 2°, ··· ordine.

Saremo condotti così ad una regola generale che insegna a calcolare i limiti del tipo

$$\lim_{r\to\infty} r^{m+1}\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad \lim_{r\to\infty} r^{m+2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \cdots \qquad (i,k=1,2,3)$$

quando sia noto il $\lim_{r\to\infty} r^m f$.

Premettiamo il seguente

Lemma. – Sia $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ una qualunque funzione delle x, continua insieme con le derivate dei primi due ordini e sia $\psi(x_1, x_2, x_3)$ la funzione, omogenea di grado zero nelle x, definita dalla posizione

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}\right).$$

Su σ si ha

$$\psi = \varphi \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - x_i \sum x_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \qquad (i=1,2,3).$$

Per dimostrare queste formole, basta notare che, nel generico punto Q di σ, per un qualunque spostamento tangenziale, la ψ si identifica con φ e quindi sono eguali le derivate di φ e ψ secondo la direzione di quello spostamento; invece le derivate normali (di φ e ψ) sono, in generale, differenti, poichè, in virtù di un teorema di Euler, quella di ψ è identicamente nulla.

Siano dunque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i coseni direttori della normale a σ nel suo generico punto Q, orientata positivamente in uno dei due versi possibili e siano $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni di due direzioni tangenti a σ tra loro ortogonali.

La terna delle direzioni sia congruente a quella degli assi, talchè sia

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Il sistema di equazioni nelle $\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\sum \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 ,$$

$$\sum \beta_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum \beta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} ,$$

$$\sum \gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum \gamma_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

ammette una soluzione unica, indipendente dalle direzioni tangenziali scelte.

Essa risulta espressa proprio dalle relazioni che avevamo in vista, ove si noti che, su σ, le x si identificano con le α.

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema. - Sotto le ipotesi che

1) f tenda a zero insieme con $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ quando $r \to \infty$ in tal modo che esista un numero $m > 0$ per cui si abbia

$$\lim_{r \to \infty} r^{m+2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = m (m + 1) \varphi (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3),$$

essendo φ ovunque continua e derivabile fino al 2° ordine su σ e in un intorno spaziale di σ;

2) essendo λ una delle variabili α o qualunque altra (indipendente da r) da cui dipendano le α, sia

$$\lim_{r \to \infty} r^m \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{r \to \infty} r^m f,$$

valgono le formole

(I) $$\lim_{r \to \infty} r^m f = \varphi (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) ,$$

(II) $$\lim_{r \to \infty} r^{m+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} = - m \alpha_i \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} ,$$

(III) $$\lim_{r \to \infty} r^{m+2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = - (m + 1) \alpha_k \varphi_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_k} = - (m + 1) \alpha_i \varphi_k + \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_i}$$

$$(i , k = 1 , 2 , 3) .$$

In esse ψ è la funzione omogenea di grado zero nelle α che si ottiene da φ come al Lemma, considerando le α come variabili qualunque e resti-

tuendo ad esse, dopo la derivazione, il significato di coseni direttori; le ψ_i sono dedotte da

$$\varphi_i = - m\alpha_i \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

come ψ da φ.

Per dimostrare la (I) basta ricordare la nota regola di l'Hospital.

Passiamo alle (II) e riguardiamo la f come funzione composta delle x per il tramite delle α e di r, essendo

$$x_i = \alpha_i r \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial r}\alpha_i + \sum_k \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ora

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r}(1 - \alpha_i^2)$$

e per $k \neq i$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_k}{r} = \frac{\alpha_i \alpha_k}{r}.$$

Dunque

$$r^{m+1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i r^{m+1}\frac{\partial f}{\partial r} + r^m \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \alpha_i \sum_k \alpha_k r^m \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}.$$

Passando al limite per $r \to \infty$ e, applicando le ipotesi 1), 2), si ha

$$\lim_{r\to\infty} r^{m+1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = - m\alpha_i \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} - \alpha_i \sum_k \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}.$$

L'applicazione del Lemma, ove al posto delle x si sostituiscano le coordinate cartesiane α del generico punto Q di σ, conduce alle formole (II).

Analogamente si dimostrano le formole (III).

Corollario. – Dal teorema dimostrato segue che, se

$$\lim_{r\to\infty} r^{m+2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0,$$

nel qual caso è anche

$$\lim_{r\to\infty} r^m f = 0,$$

si ha

$$\lim_{r\to\infty} r^{m+1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \lim_{r\to\infty} r^{m+2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Cioè, se la f è infinitesima con $\frac{1}{r}$ di ordine maggiore di m, le sue derivate prime e seconde sono infinitesime rispettivamente di ordine maggiore di $m + 1$, $m + 2$.

Infatti, essendo φ identicamente nulla, sono tali anche la ψ, le φ_i, ψ_i $(i = 1, 2, 3)$.

Sono ovvie le varianti da apportare all'enunciato del teorema ove lo si voglia estendere alle derivate di ordine superiore al secondo; ma noi, per l'applicazione idrodinamica che abbiamo in vista, non abbiamo bisogno di tale estensione.

4. Piuttosto ci gioverà invertire la conclusione precedente nelle seguenti condizioni.

Sia $\boldsymbol{w}$ un vettore funzione del posto, irrotazionale (cioè tale che rot $\boldsymbol{w} = 0$) e supponiamo che

$$\lim_{r\to\infty} r^m \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u},$$

essendo $\boldsymbol{u}$ funzione di Q, non identicamente nulla, ed $m > 1$.

Vogliamo mostrare che tra le funzioni potenziali Φ, il cui gradiente è $\boldsymbol{w}$ (differenti tra di loro per una costante) ce n'è una (ed una sola) nulla all'infinito di ordine $m - 1$.

Infatti, sia la funzione integrale

$$\Phi = -\int_r^\infty w_r \, dr,$$

essendo w_r la componente radiale di $\boldsymbol{w}$. Siano poi w_θ, w_ω le altre due componenti covarianti di $\boldsymbol{w}$ relative alla terna di coordinate polari r, θ, ω del generico punto P.

Si ha già, per la formola che definisce Φ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = w_r$$

e dalle identità

$$\frac{\partial w_r}{\partial \theta} = \frac{\partial w_\theta}{\partial r}, \qquad \frac{\partial w_r}{\partial \omega} = \frac{\partial w_\omega}{\partial r},$$

segue che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\int_r^\infty \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \, dr = w_\theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = -\int_r^\infty \frac{\partial w_r}{\partial \omega} \, dr = w_\omega.$$

Dunque grad Φ è $\boldsymbol{w}$.

Ma le ipotesi specificate al teorema del numero precedente implicano che

$$\lim_{r\to\infty} r^m w_r = \lim_{r\to\infty} r^m \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_r .$$

Di qua segue che

$$\lim_{r\to\infty} r^{m-1} \Phi = -\frac{1}{m-1} u_r$$

e ciò mostra che Φ è di ordine $m-1$ all'infinito.

Matematica (Analisi). — *Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di Hankel.* Nota di F. Tricomi, presentata [1] dal Socio G. Fubini.

1. Il teorema di reciprocità di Fourier, quello di Hankel, la formula di Abel e le poche altre proposizioni del genere che si conoscono, sono state con ragione designate quali *gioielli dell'Analisi*. Invero esse forniscono, sotto forma strabiliantemente semplice, le soluzioni di certe equazioni integrali, che, a prima vista, sembrano tutt'altro che incoraggianti.

La presente Nota è principalmente dedicata ad una di queste proposizioni: il teorema di reciprocità di Hankel che, sotto la sua forma consueta, asserisce che la soluzione dell'equazione integrale

$$(1) \qquad g(y) = \int_0^\infty x J_\nu(xy)\, G(x)\, dx , \qquad (y > 0),$$

dove J_ν è il simbolo della classica funzione di Bessel di prima specie e di ordine ν [2], è data, sotto certe condizioni [3], da una formula perfettamente analoga alla (1), precisamente che si ha:

$$(2) \qquad G(x) = \int_0^\infty y J_\nu(xy)\, g(y)\, dy .$$

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

(2) In questa Nota ν si supporrà sempre reale e maggiore di -1; la condizione della realità potrebbe però venir facilmente eliminata.

(3) Nell'ottimo *Treatise of Bessel functions* di G. N. Watson (Cambridge, University Press, 1922) p. 456 e sg. (§ 14.4) il teorema di Hankel è dimostrato (sotto la condizione *di comodità* $\nu > -1/2$) per le funzioni a variazione limitata $G(x)$ tali che l'integrale di $G(x)\sqrt{x}\,dx$ preso fra 0 e ∞ sia assolutamente convergente. Negli eventuali punti di discontinuità di $G(x)$ il primo membro della (2) va, al solito, rimpiazzato con $\frac{1}{2}[G(x+0)+G(x-0)]$.

Più particolarmente in questo lavoro ci proponiamo di far vedere come, avvalendosi della trasformazione di Laplace, il teorema di Hankel, cioè il carattere involutorio della trasformazione funzionale (1), possa desumersi in modo inaspettatamente semplice e sotto condizioni più larghe dell'ordinario, dal fatto che la semplicissima trasformazione algebrica $s_1 = 1/s$ è una involuzione. Precederanno alcune considerazioni sulla « trasformazione di Hankel » (1), in sè considerata, che culminano in un teorema che mostra come questa trasformazione possa essere ricondotta a quella di Laplace [1].

2. Osserviamo in primo luogo che, cambiando x ed y rispettivamente in $\sqrt{2x}$ e $\sqrt{2y}$ (i radicali s'intendano sempre, qui e nel seguito, presi in senso aritmetico) e ponendo $G(\sqrt{2x}) = F(x)$; $g(\sqrt{2y}) = f(y)$, la formula (1) della trasformazione di Hankel assume la forma un po' più semplice:

$$(3) \qquad \boxed{f(y) = \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{yx})\, F(x)\, dx = \mathfrak{H}_y^{(\nu)}[F(x)]}$$

sotto cui noi, nel seguito, costantemente la considereremo.

Un'altra osservazione da farsi preliminarmente è che, supposto che la funzione reale $F(x)$, definita sul semiasse reale positivo, sia ivi integrabile in ogni intervallo finito, quello che decide circa l'esistenza o meno della trasformata di Hankel, è il comportamento di $F(x)$ per $x \to 0$ ed $x \to \infty$. In particolare, essendo notoriamente

$$(4) \quad J_\nu(z) = O(z^\nu) \quad (z \to 0) \quad , \quad J_\nu(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (z \to \infty),$$

si vede subito che l'integrale (3) esiste certamente (ed è assolutamente convergente) se, essendo

$$(5) \quad F(x) = O(x^\alpha) \quad (x \to 0) \quad , \quad F(x) = O(x^\beta) \quad (x \to \infty),$$

si ha

$$(6) \qquad \alpha + \frac{\nu}{2} + 1 > 0 \quad , \quad \beta + \frac{3}{4} < 0.$$

Vogliamo infine notare, prima di lasciare queste generalità, che una differenza profonda fra la trasformazione di Laplace:

(1) Fra le sette od otto trasformazioni funzionali lineari che sono state finora esplicitamente considerate, quella di Hankel era una delle pochissime, se non la sola, che non fosse stata ancora ricondotta a quella di Laplace. Cfr. G. Doetsch, *Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung*. [« Journ. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle) », *167* (1931), 274–293], p. 276.

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\Phi(t)\,dt \equiv \mathfrak{L}_s[\Phi(t)]$$

e la trasformazione di Hankel, risiede in ciò, che mentre le funzioni generate dalla prima sono sempre analitiche, quelle generate dalla seconda non sempre lo sono (sull'asse reale). All'uopo basta considerare l'esempio dei cosidetti integrali « discontinui » di Weber–Schafheitlin [1], di cui uno dei più semplici è quello che, con le nostre notazioni, conduce alla formula:

$$\mathfrak{H}_y^{(\nu)}\left[J_\nu\left(2\sqrt{kx}\right)/x\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}\left(\dfrac{y}{k}\right)^{\nu/2} & (y \leq k) \\ \dfrac{1}{\nu}\left(\dfrac{k}{y}\right)^{\nu/2} & (y \geq k) \end{cases} \qquad (k>0\ ,\ \nu>0).$$

Tuttavia, nonostante la generale non analiticità della funzione $f(y)$, è facile vedere che, se, in luogo della seconda delle (6), è soddisfatta la condizione più forte

$$\beta + \frac{5}{4} < 0, \tag{7}$$

allora la funzione $f(y)$ è certo *derivabile* e la sua derivata è data dalla formula

$$\boxed{\frac{d}{dy}\,\mathfrak{H}_y^{(\nu)}[F(x)] = \frac{\nu}{2y}\,\mathfrak{H}_y^{(\nu)}[F(x)] - \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathfrak{H}_y^{(\nu+1)}\left[\sqrt{x}\,F(x)\right]}. \tag{8}$$

Per la dimostrazione si parte dall'uguaglianza

$$y^{-\frac{\nu+1}{2}}\,\mathfrak{H}_y^{(\nu+1)}\left[\sqrt{x}\,F(x)\right] = \int_0^\infty J_{\nu+1}\left(2\sqrt{xy}\right) y^{-\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{x}\,F(x)\,dx$$

donde, integrando rispetto ad y fra due limiti positivi a e ξ, con una lecita (tenuto conto della (7)) inversione d'ordine d'integrazioni, in virtù della nota formula [2]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{-\frac{\nu}{2}}\,J_\nu\left(2\sqrt{xy}\right)\right] = -\sqrt{x}\,y^{-\frac{\nu+1}{2}}\,J_{\nu+1}\left(2\sqrt{xy}\right),$$

(1) G. N. Watson, *Treatise of Bessel functions*. (Cambridge, University Press, 1922), pp. 405–406.

(2) Ved., p. es., Jahnke–Emde, *Funktionentafeln*. (Leipzig, Teubner, 1933), p. 213.

si ricava che

$$\int_a^{\xi} y^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathfrak{H}_y^{(\nu+1)} \left[\sqrt{x}\, \mathrm{F}(x)\right] dy = -\left[y^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{H}_y^{(\nu)} [\mathrm{F}(x)]\right]_{y=a}^{y=\xi};$$

dopo di ciò non vi è che da derivare ambo i membri rispetto a ξ per ottenere una formula da cui, cambiando ξ in y, segue subito la (8).

3. Teorema fondamentale: *Se la funzione reale* $\mathrm{F}(x)$, *definita sul semiasse reale positivo ed ivi integrabile in ogni segmento finito, ammette una trasformata di Hankel* $f(y)$ *di ordine* $\nu > -1$ *e se inoltre la funzione* $\Phi(t) = t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{F}(t)$ *ammette, per* $\Re(s) > s_0$, *la trasformata di Laplace* $\mathfrak{L}[\Phi(t)] = \varphi(s)$; *anche la funzione* $\Psi(t) = t^{\frac{\nu}{2}} f(t)$ *ammette, almeno per* $\Re(s) > 0$, *trasformata di Laplace e fra questa trasformata, che diremo* $\psi(s)$, *e la funzione* $\varphi(s)$ *interviene la relazione*

$$\psi(s) = \frac{1}{s^{\nu+1}} \varphi\left(\frac{1}{s}\right), \tag{9}$$

si ha cioè che

$$\mathfrak{L}_s \left\{ t^{\frac{\nu}{2}} \mathfrak{H}_t^{(\nu)} [\mathrm{F}(x)] \right\} = \frac{1}{s^{\nu-1}} \mathfrak{L}_{\frac{1}{s}} \left[t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{F}(t) \right]. \tag{9'}$$

Per dimostrare il teorema prenderemo le mosse dalla formula importantissima [1]:

$$\mathfrak{L}_s \left[t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{J}_\nu \left(2\sqrt{xt}\right) \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{J}_\nu \left(2\sqrt{xt}\right) dt = \frac{x^{\frac{\nu}{2}}}{s^{\nu+1}} e^{-\frac{x}{s}}, \tag{10}$$

$$(x > 0 \ , \ \nu > -1 \ , \ \Re(s) > 0)$$

già utilizzata da Doetsch [2] e da me [3] per stabilire alcune riposte proprietà

(1) G. N. Watson, *Treatise of Bessel functions.* (Cambridge, University Press, 1922), p. 394; N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.* (Leipzig, Teubner, 1904), § 70, p. 185, form. (9).

(2) *Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen usw....* [« Compositio Mathematica », 1 (1934), 85–97], p. 93.

(3) *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* II. *Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.* [Questi « Rendiconti » (6), 21 (1935), pp. 332–335].

delle funzioni di Bessel, osservando anzitutto che l'integrale improprio *converge uniformemente* in ogni intervallo $u \leq x \leq v$, con u e v numeri positivi.

Infatti, in virtù delle (5), è certo possibile trovare una costante positiva A_ν tale che, qualunque siano i numeri positivi x e t (anche per x e t tendenti a zero o a $+\infty$) sia sempre

$$(11)\quad \left| J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right)\right| < A_\nu \left(\frac{xt}{1+xt}\right)^{\frac{\nu}{2}} (1+xt)^{-\frac{1}{4}} = A_\nu (xt)^{\frac{\nu}{2}} (1+xt)^{-\frac{2\nu+1}{4}}.$$

Pertanto, detta σ la parte reale $\Re(s)$ di s e t_1 e t_2 due valori qualsiasi (positivi) di t, potrà porsi

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) dt \right| < A_\nu\, x^{\frac{\nu}{2}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\sigma t}\, t^\nu\, (1+tx)^{-\frac{2\nu+1}{4}}\, dt$$

donde, distinguendo i due casi $2\nu+1 \geq 0$ e $2\nu+1 \leq 0$ (cioè $\nu \geq -1/2$ e $-1 < \nu \leq -1/2$), segue:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) dt \right| < \begin{cases} A_\nu\, x^{\frac{\nu}{2}} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} e^{-\sigma t}\, t^\nu\, dt & (\nu \geq -1/2) \\ A_\nu\, x^{\frac{\nu}{2}} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} e^{-\sigma t}\, t^\nu\, (1+vt)^{-\frac{2\nu+1}{4}}\, dt & (\nu \leq -1/2) \end{cases}$$

diseguaglianze che, essendo per ipotesi $\sigma > 0$, mostrano come l'integrale che figura nella (10) sia uniformemente convergente nell'intervallo considerato.

Dalla proposizione ora stabilita segue che, moltiplicando ambo i membri della (10) per $F(x)\,dx$ e integrando fra u e v, sarà lecito, nel primo membro, invertire l'ordine delle due integrazioni, ottenendo così l'uguaglianza

$$(12)\quad \int_0^\infty e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, dt \int_u^v J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_u^v e^{-\frac{x}{s}}\, x^{\frac{\nu}{2}}\, F(x)\, dx$$

che, per la presupposta esistenza della trasformata di Hankel di $F(x)$, potrà anche scriversi

$$(13)\quad \int_0^\infty e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}} \left[f(t) - \int_0^u J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx - \int_v^\infty J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx \right] dt =$$

$$= s_1^{\nu+1} \int_u^v e^{-s_1 t}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, F(t)\, dt,$$

avendo inoltre posto $1/s = s_1$ e cambiato x in t nell'integrale del secondo membro.

Dico che, nella fatta ipotesi dell'esistenza (per $\Re(s) > s_0$) della trasformata di Laplace della funzione $\Phi(t) = t^{\frac{\nu}{2}} F(t)$, si ha

$$(14)\quad \begin{cases} \lim\limits_{u \to 0} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, dt \int_0^{u} J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx = 0\,, \\ \lim\limits_{v \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, dt \int_v^{\infty} J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx = 0\,. \end{cases}$$

Infatti, fissato un qualsiasi s tale che la parte reale di $s_1 = 1/s$ risulti maggiore di s_0, dovendo esistere l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-s_1 t}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, F(t)\, dt\,;$$

qualunque sia il numero positivo ε potrà certo determinarsi un altro numero positivo η tale che, per qualsiasi coppia di numeri positivi u, u' tali da aversi $u' < u < \eta$, risulti in conseguenza:

$$\left| s_1^{\nu+1} \int_{u'}^{u} e^{-s_1 t}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, F(t)\, dt \right| < \varepsilon\,,$$

donde, in virtù della (12) (in cui sia scritto risp. u' ed u al posto di u e v), si trae che

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, dt \int_{u'}^{u} J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx \right| < \varepsilon\,.$$

Si osservi ora che la disuguaglianza ottenuta vale per *tutti* gli $u' < u$; essa dovrà dunque valere ancora, tutt'al più attenuata, per $u' = 0$, cioè dovrà aversi

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}}\, dt \int_0^{u} J_\nu\left(2\sqrt{xt}\right) F(x)\, dx \right| \leq \varepsilon \qquad (u < \eta)$$

donde segue senz'altro la prima delle (14). Tal quale si dimostra la seconda.

Non resta ora che da passare, nella (13), al limite per $u \to 0$, $v \to \infty$, e si avrà così, avuto riguardo alle (14),

$$\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{\frac{\nu}{2}} f(t)\, dt = s_1^{\nu+1} \int_0^\infty e^{-s_1 t}\, t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{F}(t)\, dt =$$

$$= s_1^{\nu+1}\, \mathfrak{L}_{s_1}\left[t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{F}(t)\right]$$

che non è altro se non la (9).

Dalla precedente dimostrazione segue che la relazione fondamentale (9) vale almeno nella regione del piano complesso s in cui si ha simultaneamente

$$\Re(s) > 0 \quad , \quad \Re\left(\frac{1}{s}\right) > s_0 ,$$

cioè, com'è ben facile controllare, nel cerchio avente per diametro il segmento $(0\ ,\ 1/s_0')$ dell'asse reale, con $s_0' = \mathrm{Max}\,(0\ ,\ s_0)$. Considerato però che la (9) è una relazione fra due funzioni analitiche, si può senz'altro asserire che essa continuerà a valere in tutto il campo d'esistenza comune delle due funzioni che, per ben note proprietà della trasformazione di Laplace, comprenderà in questo caso almeno la parte comune ai due semipiani $\Re(s) > 0$, $\Re(s) > s_0$, cioè il semipiano $\Re(s) > s_0'$.

4. Le conseguenze del teorema stabilito nel paragrafo precedente sono molteplici. La prima e la più evidente è la riconduzione della trasformazione di Hankel $\mathfrak{H}^{(\nu)}$ a quella di Laplace $\mathfrak{L}$ (ed alla sua inversa $\mathfrak{L}^{-1}$) mediante l'equazione

$$(15) \qquad \mathfrak{H}_t^{(\nu)}[\mathrm{F}] = t^{-\frac{\nu}{2}}\, \mathfrak{L}^{-1}\left\{ s^{-(\nu+1)}\, \mathfrak{L}_{\frac{1}{s}}\left[t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{F} \right] \right\}$$

che, ammesse soddisfatte le condizioni per l'invertibilità della trasformazione di Laplace, immediatamente si deduce dalla (9').

Un'altra, anche più interessante conseguenza del teorema fondamentale è che il teorema di reciprocità di Hankel diviene, come si è detto in principio, una quasi immediata conseguenza del carattere involutorio della trasformazione algebrica $s_1 = 1/s$, cioè del fatto che, cambiando s in $1/s$, dalla (9) si trae subito che

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^{\nu+1}}\, \psi\left(\frac{1}{s}\right).$$

Precisamente, ricordando che due funzioni aventi la stessa trasformata di Laplace non possono differire fra loro (sul semiasse reale positivo) che al più in un insieme di punti di misura nulla, si ha senz'altro il seguente enunciato:

Nel campo delle funzioni reali $F(x)$, *definite sul semiasse reale positivo ed ivi integrabili in ogni intervallo finito, le quali siano tali che esista la trasformata di Laplace della funzione* $t^{\frac{\nu}{2}} F(t)$, $(\nu > -1)$; *se l'integrale doppio*

$$\int_0^\infty J_\nu\left(2\sqrt{y\chi}\right) dy \int_0^\infty J_\nu\left(2\sqrt{xy}\right) F(x)\, dx\,, \qquad (\chi > 0) \tag{16}$$

è convergente, esso ha necessariamente per valore $F(\chi)$, *tranne al più nei punti di un insieme di misura nulla.*

Infatti, l'esistenza dell'integrale (16) e della trasformata di Laplace di $t^{\frac{\nu}{2}} F(t)$ assicurano la legittimità dell'applicazione del teorema fondamentale anzitutto alla funzione F e successivamente alla sua trasformata di Hankel *f*. Pertanto, detto per un momento $F^*(\chi)$ il valore dell'integrale (16), sussisteranno simultaneamente le due equazioni:

$$\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} f(t)\right] = \frac{1}{s^{\nu+1}}\, \mathfrak{L}_{\frac{1}{s}}\left[t^{\frac{\nu}{2}} F(t)\right] \quad , \quad \mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} F^*(t)\right] = \frac{1}{s^{\nu+1}}\, \mathfrak{L}_{\frac{1}{s}}\left[t^{\frac{\nu}{2}} f(t)\right],$$

donde immediatamente si deduce che

$$\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} F(t)\right] = \mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} F^*(t)\right].$$

È superfluo soffermarsi ad illustrare la portata del risultato ottenuto ed, in ispecie, dell'aver potuto lasciar cader la condizione che $F(x)$ debba essere una funzione a variazione limitata. Notiamo piuttosto che la dimostrazione precedente è suscettibile della seguente, ovvia generalizzazione:

Se le trasformate di Laplace $\varphi(s)$ *e* $\psi(s)$ *di due certe funzioni* $\Phi(t)$ *e* $\Psi(t)$ *sono legate da una relazione algebrica (o trascendente) del tipo*

$$\psi(s) = A\{s, \varphi[\alpha(s)]\}$$

la quale sia involutoria, nel senso che da essa possa reciprocamente ricavarsi che

$$\varphi(s) = A\{s, \psi[\alpha(s)]\},$$

allora anche la corrispondente relazione (funzionale) $\mathfrak{T}$ *fra le funzioni primitive* $\Phi(t)$ *e* $\Psi(t)$ *è involutoria, cioè si ha simultaneamente*

$$\Psi = \mathfrak{T}[\Phi] \quad , \quad \Phi = \mathfrak{T}[\Psi]$$

salvo, al più, in un insieme di misura nulla.

Naturalmente prescindiamo qui completamente dalle condizioni qualitative a cui, caso per caso, dovranno pensarsi assoggettate le funzioni Φ e Ψ.

Matematica (Analisi). — *Un teorema abeliano per la trasformazione di Hankel e alcune nuove applicazioni di una formula sulle funzioni di Bessel.* Nota di F. Tricomi, presentata [1] dal Socio G. Fubini.

1. L'equazione

$$(1) \qquad \mathfrak{H}_s^{(\nu)}[F] = t^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{L}^{-1}\left\{ s^{-(\nu+1)} \mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} F \right] \right\}$$

stabilita in una mia precedente Nota [2], riconducendo la trasformazione di Hankel:

$$(2) \qquad f(y) = \mathfrak{H}_y^{(\nu)}[F(x)] \equiv \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy})\, F(x)\, dx \qquad (\nu > -1\ ,\ y > 0),$$

alla trasformazione di Laplace $\mathfrak{L}$ ed alla sua inversa $\mathfrak{L}^{-1}$, consente, fra l'altro, di dedurre dai noti teoremi abeliani e tauberiani validi per la trasformazione di Laplace [3], nuovi teoremi abeliani–tauberiani [4] per la trasformazione di Hankel.

La deduzione non è però facile, date le condizioni piuttosto restrittive sotto cui valgono i finora noti teoremi tauberiani per la trasformazione di Laplace. Non mi sembra pertanto privo d'interesse segnalare il seguente semplice teorema abeliano per la Hankel, che può facilmente ricavarsi direttamente dalla (2):

Se la funzione reale $F(x)$, *definita sul semiasse reale positivo ed ivi integrabile in ogni segmento finito, è tale da aversi*

$$(3) \qquad F(x) = O(x^\alpha) \quad (x \to 0) \quad , \quad F(x) = O(x^\beta) \quad (x \to \infty)$$

con

$$(4) \qquad \alpha + \frac{\nu}{2} + 1 > 0 \quad , \quad \beta + \frac{3}{4} < 0 \quad ; \quad \nu > -1;$$

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

(2) Questi «Rendiconti» (6), *22* (1935^{II}), pp. 564-571.

(3) V. G. Doetsch, *Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung*. [«Journ. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle)», *167* (1931), 274-293].

(4) Dato il carattere involutorio (sotto certe condizioni) della trasformazione di Hankel, per essa la distinzione fra teoremi abeliani e tauberiani talvolta svanisce.

esiste la sua trasformata di Hankel $f(y)$ *d'ordine* ν *e questa, supposto che nè* $\alpha + 3/4$ *nè* $\beta + \nu/2$ *siano numeri interi (zero compreso), soddisfa alle uguaglianze asintotiche*

$$(5) \qquad f(y) = O(y^{\alpha'}) \quad (y \to 0) \quad , \quad f(y) = O(y^{\beta'}) \quad (y \to \infty)$$

con

$$(6) \qquad \alpha' \geqq \min\left(\frac{\nu}{2}, -\beta - 1\right) \quad , \quad \beta' \leqq \mathrm{Max}\left(-\frac{1}{4}, -\alpha - 1\right).$$

Che, nelle condizioni (4), la trasformata di Hankel esista, è stato già osservato nella Nota precedente, in cui si è pure stabilita la disuguaglianza

$$|J_\nu(2\sqrt{xy})| < A_\nu (xy)^{\frac{\nu}{2}} (1 + xy)^{-\frac{2\nu+1}{4}}$$

cui, stante le ipotesi fatte sulla funzione $F(x)$, può ora associarsi l'altra

$$|F(x)| < N\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha} (1 + x)^{\beta} = N x^{\alpha} (1 + x)^{\beta - \alpha},$$

dove N denota un'opportuna costante positiva; dalla (2) può dunque trarsi che

$$(7) \qquad |f(y)| < A_\nu N y^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\infty} x^{\alpha + \frac{\nu}{2}} (1 + x)^{\beta - \alpha} (1 + xy)^{-\frac{2\nu+1}{4}} dx.$$

L'integrale che figura nella (7) è visibilmente un integrale ipergeometrico riducibile a forma canonica mediante la sostituzione $u = x/(1 + x)$ che, come immediatamente si controlla, lo muta nell'altro:

$$\int_0^1 u^{\alpha + \frac{\nu}{2}} (1 - u)^{-\frac{7}{4} - \beta} [1 - (1 - y) u]^{-\frac{2\nu+1}{4}} du;$$

avremo dunque [1], tenuto conto che in virtù delle (4) è $\alpha + \nu/2 > -1$, $-7/4 - \beta > -1$, che

$$(8) \qquad |f(y)| < A_\nu N \frac{\Gamma(\alpha + \nu/2 + 1)\,\Gamma(-\beta - 3/4)}{\Gamma(\alpha - \beta + \nu/2 + 1/4)} y^{\frac{\nu}{2}} \times$$

$$\times F(\nu/2 + 1/4, \alpha + \nu/2 + 1, \alpha - \beta + \nu/2 + 1/4; 1 - y)$$

dove $F(a, b, c; z)$ è il simbolo della classica funzione ipergeometrica di Gauss.

(1) V., p. es., WHITTAKER-WATSON, *Modern Analysis*. (Cambridge, « University Press », 1915), p. 287.

Per indagare il comportamento di $f(y)$, o - più esattamente - della funzione maggiorante costituente il secondo membro della (8), per $y \to 0$ od $y \to \infty$, non vi è ora che da servirsi delle classiche formule [1] colleganti (linearmente) fra loro le funzioni ipergeometriche degli argomenti z, $1-z$, $1/(1-z)$ ecc.; propriamente fanno al nostro caso le formule (valide nell'ipotesi che nè $c-a-b$ nè $b-a$ siano numeri interi o nulli):

$$(9)\quad \begin{cases} F(a,b,c;1-z) = AF(a,b,a+b-c+1;z) + \\ \qquad + Bz^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1;z) \\ F(a,b,c;1-z) = Cz^{-a}F\left(a,c-b,a-b+1;\dfrac{1}{z}\right) + \\ \qquad + Dz^{-b}F\left(c-a,b,b-a+1;\dfrac{1}{z}\right), \end{cases}$$

dove A, B, C, D sono delle costanti (esprimibili mediante la funzione Γ) che qui non occorre esplicitare. Invero le precedenti formule mostrano che, supposto che nè $\alpha + 3/4$ nè $\beta + \nu/2$ siano numeri interi o nulli, si ha

$$(\text{per } y \to 0) \qquad f^*(y) = y^{\frac{\nu}{2}}[O(1) + O(y^{-\beta-\nu/2-1})] = \\ = O(y^{\min(\nu/2,\,-\beta-1)})$$

$$(\text{per } y \to \infty) \qquad f^*(y) = y^{\frac{\nu}{2}}[O(y^{-\nu/2-1/4}) + O(y^{-\alpha-\nu/2-1})] = \\ = O(y^{\mathrm{Max}(-1/4,\,-\alpha-1)})$$

avendo indicato per un momento con $f^*(y)$ il secondo membro della (8),

Le (5)-(6) non fanno che esprimere questi stessi risultati in forma leggermente diversa.

Tralasciamo, per brevità, di occuparci dei casi in cui $\alpha + 3/4$ o $\beta + \nu/2$ o entrambi sono numeri interi, in cui nei secondi membri delle (9) s'introducono dei termini logaritmici. Questi casi possono del resto evitarsi sostituendo, quando si presentano, α e β rispettivamente con $\alpha - \varepsilon$ e $\beta + \varepsilon$, dove ε denota un numero positivo piccolo a piacere.

2. L'importante formula

$$(10)\quad \mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{xt})\right] = \frac{x^{\frac{\nu}{2}}}{s^{\nu+1}}e^{-\frac{x}{s}}, \quad (x>0,\ \nu>-1,\ \Re(s)>0),$$

su cui è stata imperniata la dimostrazione del teorema fondamentale della Nota precedente, è suscettibile di svariate ulteriori applicazioni fra cui - data

(1) Whittaker-Watson, loc. cit., pp. 282-285.

l'eleganza della deduzione e la forma particolarmente semplice del risultato (sostanzialmente non nuovo) cui si perviene - vogliamo segnalare quella che si ottiene confrontando la (10) con la formula analoga in cui ν sia rimpiazzato da $\mu + \nu$. Precisamente, con tale confronto, si ha

$$\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\mu+\nu}{2}} J_{\mu+\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right] = \frac{x^{\frac{\mu}{2}}}{s^{\mu}}\,\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right],$$

ma, supposto $\mu > 0$, d'altra parte è

$$\frac{1}{s^{\mu}} = \mathfrak{L}_s\left[\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right];$$

dunque sussiste l'uguaglianza

$$\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\mu+\nu}{2}} J_{\mu+\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right] = \frac{x^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\mu)}\,\mathfrak{L}_s\left[t^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right] \cdot \mathfrak{L}_s\left[t^{\mu-1}\right]$$

che, in virtù del « Faltungssatz » [1], fornisce la formula

$$(11)\qquad \boxed{t^{\frac{\mu+\nu}{2}} J_{\mu+\nu}\left(2\sqrt{xt}\right) = \frac{x^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\mu)}\left[t^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right] * t^{\mu-1} \qquad \begin{pmatrix} x>0\ ,\ t>0, \\ \mu>0\ ,\ \nu>-1 \end{pmatrix}};$$

si ha cioè, in forma più esplicita:

$$(11')\qquad t^{\frac{\mu+\nu}{2}} J_{\mu+\nu}\left(2\sqrt{xt}\right) = \frac{x^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \tau^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}\left(2\sqrt{x\tau}\right)(t-\tau)^{\mu-1}\,d\tau\,.$$

La (11') traduce in forma particolarmente semplice ed espressiva un risultato che – come s'è già detto – non è sostanzialmente nuovo. Invero, se si pone

$$x = \frac{1}{4} \quad , \quad \sqrt{t} = \xi \quad , \quad \sqrt{\tau} = \xi\cos\varphi\,,$$

con facili trasformazioni si ottiene la formula

$$(12)\qquad J_{\mu+\nu}(\xi) = \frac{\xi^{\mu}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)} \int_0^{\pi/2} J_{\nu}(\xi\cos\varphi)\cos^{\nu+1}\varphi\,\sin^{2\mu-1}\varphi\,d\varphi\,,$$

ch'è una celebre formula di Sonine [2].

(1) V., p. es., G. Doetsch, *Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation.* [« Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », (2) *4*, (1935), 71–84].

(2) N. Sonine, *Recherches sur les fonctions cylindriques* etc. [« Math. Annalen », *96* (1880), 1–72] p. 36. Inoltre (aggiunto sulle bozze) una formula non sostanzialmente di-

Dalla (12), ponendo $\nu = \pm 1/2$ e ricordando che

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad , \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \, ,$$

possono subito ricavarsi alcune delle classiche rappresentazioni integrali della funzione J, ma su ciò non possiamo qui soffermarci. Osserviamo piuttosto che dalla (11′), con analoghe trasformazioni e ponendo $\mu \pm 1/2 = p$, si ottengono le formule:

$$(13) \quad J_p(2\sqrt{t}) = \frac{t^{-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right)} \int_0^t \sin\left(2\sqrt{t-\tau}\right) \tau^{p-\frac{3}{2}} d\tau \qquad \left(p > \frac{1}{2}\right)$$

$$(14) \quad J_p(2\sqrt{t}) = \frac{t^{-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \int_0^t \cos\left(2\sqrt{t-\tau}\right) \tau^{p-\frac{1}{2}} d\tau \qquad \left(p > -\frac{1}{2}\right)$$

che presentano l'interessante particolarità di fornire la funzione J_p quale trasformata di una *potenza* in una trasformazione funzionale lineare con *nucleo*, *indipendente da p*, *funzione della differenza dei due argomenti* (1).

Dalla (13) può, fra l'altro, dedursi come caso particolare la semplicissima formula:

$$(15) \qquad J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(x\sqrt{1-y^2}\right) dy \, .$$

Notiamo infine che la (14) potrebbe anche essere utilizzata per una nuova dimostrazione del teorema di reciprocità di Hankel, e cioè deducendolo da quello di Fourier.

versa dalla (11′) si trova a p. 23 dell'opuscolo di P. Humbert, *Le Calcul symbolique.* (Paris, Hermann, 1934).

(1) Cfr. Tricomi, *Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione.* [« Commentarii Math. Helvetici », *8* (1935–36), 70–87].

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Momento delle azioni dinamiche.* Nota VI [1] di L. Sona, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

17. – Momento risultante delle azioni dinamiche [2].

Per il calcolo del momento delle azioni dinamiche rispetto all'origine O, facciamo uso di una formula dello stesso tipo di quella adoperata per il calcolo della risultante al n. 11, e che può sostituire con vantaggio la seconda formula del Blasius quando il piano tagliato dalla lamina sia rappresentato in un piano forato da un cerchio. Per dedurre tale formula, già adoperata del resto nel caso della lamina equilatera [3], basta osservare che l'unica componente M, non nulla, del momento risultante, è quella diretta secondo la normale al piano del moto, $\zeta = x + iy$, e viene espressa, scegliendo come positivo il verso sinistrorso, dalla formula

$$M = -\frac{\rho}{2}\int_c |w|^2 (x\,dx + y\,dy),$$

essendo c il contorno della lamina.

Questa si può scrivere

$$M = -\frac{\rho}{2}\,\mathscr{R}\int_c w \cdot w \cdot \bar{\zeta}\,d\zeta$$

in cui $\bar{w}$ e $\bar{\zeta}$ indicano le coniugate di w e ζ e il simbolo $\mathscr{R}$ significa « parte reale di ».

Riferendoci al piano rappresentativo ζ avremo, ragionando come al n. 11:

$$M = -\frac{\rho}{2}\,\mathscr{R}\int_\gamma w(\zeta)\cdot\bar{w}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\bar{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\frac{d\zeta}{d\zeta}\,d\zeta, \tag{32}$$

dove γ rappresenta il contorno del cerchio di raggio uno.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1935.
(2) Ved. la Nota V in questi « Rendiconti », ser. 6ª, vol. XXII, pp. 498–506.
(3) Nota II, n. 5, in questi « Rendiconti », ser. 6ª, vol. XXII, pp. 244–250.

Sostituendo alle quantità sotto il segno di integrale i loro valori in base alle (1), (3), (10) si ottiene dopo qualche semplificazione

$$M = \frac{\rho}{2k^2}\,\mathscr{R}\int_\gamma \left[V^2\left(2 - \frac{e^{2i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2}{e^{2i(\beta+n\varepsilon)}}\right) + \frac{C^2k^2}{4\pi^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{iCkV}{\pi}\left(\frac{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}{\zeta} - \frac{\zeta}{e^{i(\beta+n\varepsilon)}}\right)\right]\cdot\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} - 2i\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\right)\frac{d\zeta}{(\zeta - e^{i\sigma_1})(\zeta - e^{-i\sigma_1})}.$$

Scomponendo ora in frazioni semplici i vari prodotti che figurano nella funzione integranda e tenendo conto nel calcolo dei residui che il polo nel punto $\zeta = 0$ è interno al cammino di integrazione, mentre gli altri due poli in $\zeta = e^{i\sigma_1}$ e $\zeta = e^{-i\sigma_1}$ sono sul contorno, si arriva infine alla formula

$$(33)\quad M = \frac{2\pi\rho V^2}{k^2}\left[(1 - 2n^2\cos^2\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,2(\beta + n\varepsilon) + n\,\mathrm{sen}\,2\varepsilon\cos 2(\beta + n\varepsilon)\right] +$$

$$+ \frac{2\rho CV}{k}\left[n\cos\varepsilon\cos(\beta + n\varepsilon) + \mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}(\beta + n\varepsilon)\right],$$

che esprime il momento richiesto in funzione degli elementi noti.

Per $C = 0$ si annullano i termini della seconda riga e ne deriva immediatamente che: *il momento delle azioni dinamiche dovute ad una corrente traslatoria è direttamente proporzionale al quadrato della velocità della corrente.*

Per $V = 0$ il momento è nullo, perciò *le azioni dinamiche dovute ad una corrente circolatoria hanno per centro il vertice O della lamina.*

Nel caso della lamina a lati uguali la (33) diventa

$$(33')\qquad M = \frac{2\pi\rho V^2}{k^2}(1 - 2n^2)\,\mathrm{sen}\,2\beta + \frac{2\rho CVn}{k}\cos\beta,$$

che coincide con quella trovata direttamente [1].

Nel caso della lamina aperta ad angolo piatto $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, abbiamo subito

$$M = \frac{\pi\rho l_o^2}{2}V^2\,\mathrm{sen}\,2\beta + \rho CV l_o\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\beta,$$

essendo $2l_o$ la lunghezza totale della lamina; quando si assuma come centro di riduzione il suo punto di mezzo si ha

$$M = \frac{\pi\rho l_o^2}{2}V^2\,\mathrm{sen}\,2\beta$$

come è ben noto.

(1) Il caso della lamina equilatera, per la sua particolare simmetria, è quello che presenta maggior interesse. Nella Nota II ai nn. 5 e 6 vengono esposti i risultati relativi e vengono studiate anche le posizioni di equilibrio della lamina girevole intorno al suo vertice.

18. – Momento risultante nei casi di regolarizzazione.

L'espressione del momento, quando il moto sia regolarizzato nella cuspide B, è la seguente

$$(34) \qquad M = \frac{2\pi\rho V^2}{k^2}\{n \operatorname{sen} 2\varepsilon + \operatorname{sen} 2(\beta + n\varepsilon) -$$

$$-4\cos(\beta + n\varepsilon)\cdot\sqrt{1 - n^2\cos^2\varepsilon}\,[n\cos\varepsilon\cos(\beta + n\varepsilon) + \operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(\beta + n\varepsilon)]\}.$$

Il momento è dunque direttamente proporzionale al quadrato della velocità come in tutti i casi consimili.

Se la lamina ha i lati uguali la precedente espressione diventa

$$(34') \qquad M = \frac{4\pi\rho V^2}{k^2}\cos\beta\,(\operatorname{sen}\beta - 2\sqrt{1 - n^2}\cos\beta),$$

che si annulla per $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, cioè quando la corrente è perpendicolare alla bisettrice, e per i due valori di β (differenti fra di loro di π) che soddisfano l'equazione

$$\tan\beta = 2\sqrt{1 - n^2}.$$

Per la lamina aperta di lunghezza $2l_0$, si ha

$$M = \frac{\pi}{2}\rho l_0^2 V^2 \operatorname{sen} 2\beta\,(1 - 2\operatorname{sen}\varepsilon);$$

il momento è nullo quando la corrente è parallela o perpendicolare alla lamina, ed è nullo anche, per qualsiasi valore dell'angolo β, quando si abbia $\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{1}{2}$, cioè (n. 5, *c*) $m = 3$, in conformità alla ben nota proprietà che in una lamina semplice, col moto regolarizzato a poppa, il centro di pressione si trova ad un quarto della lunghezza totale a partire dalla prora [1].

Nel caso generale di una lamina qualsiasi, col moto regolarizzato in entrambe le cuspidi, si ha per il momento l'espressione semplicissima

$$(35) \qquad M = \frac{2\pi\rho n V^2 \operatorname{sen} 2\varepsilon}{k^2} = \frac{\pi\rho m l^2 n \tan\varepsilon \cdot V^2}{(1 - n)^{1-n}\cdot(1 + n)^{1+n}},$$

che si annulla tanto per la lamina equilatera ($\varepsilon = 0$), che per la lamina aperta ($n = 0$).

(1) Cfr. N. Joukowsky, *Aérodynamique* (1931), p. 200.

19. – Momento risultante per l'ala con appendice.

Supponiamo, come al n. 15, che il lato $OB = \lambda = ml$, dell'ala sia infinitesimo: assumiamo anche qui come infinitesimo principale il valore $\delta = \sqrt{m}$. Tenendo conto solo dei termini del primo ordine in δ otteniamo facilmente

$$n \cos \varepsilon = 2\delta\Gamma \quad ; \quad \operatorname{sen} \varepsilon = -1 \quad ; \quad n\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\Gamma\delta ;$$

$$k = \frac{4}{l} .$$

Sostituendo nella (33) otteniamo con semplici considerazioni:

$$M = \frac{\pi\rho l^2 V}{4} \cos\tau \left[V \operatorname{sen}\tau + \frac{2C}{\pi l} \right],$$

avendo τ lo stesso significato attribuito al n. 15, $[\tau = -(\beta + \alpha)]$. Questo valore di M coincide col momento relativo ad un'ala semplice senza alettone, OA, avente lunghezza ed inclinazione uguale a quella data, quando si prenda come centro di riduzione l'estremità in O dell'ala.

La presenza di un'appendice molto piccola in un profilo alare rettilineo, con una assegnata corrente traslocircolatoria investitrice, non modifica quindi sensibilmente il momento risultante delle azioni dinamiche.

Nel caso dell'alettone regolarizzato vi è invece variazione nel momento delle azioni dinamiche per il fatto che varia la circolazione necessaria alla regolarizzazione del moto a poppa.

Abbiamo infatti in tal caso (v. n. 16), a meno di termini di ordine superiore al primo in δ

$$C = \pi l V \operatorname{sen}(\tau - 4\Gamma\delta) = \pi l V (\operatorname{sen}\tau - 4\Gamma\delta \cos\tau),$$

e quindi

$$M = \frac{\pi\rho l^2 V^2}{4} \cos\tau (3 \operatorname{sen}\tau - 8\Gamma\delta \cos\tau). \tag{36}$$

La parte di questa espressione indipendente da δ rappresenta il momento dell'ala semplice OA preso rispetto all'estremità O; l'altro termine, che indicheremo con ΔM, rappresenta il contributo dell'alettone. Si ha dunque

$$\Delta M = -2\pi\rho l^2 \delta\Gamma V^2 \cos^2\tau . \tag{37}$$

La variazione del momento dovuta alla presenza di un alettone regolarizzato di dimensioni molto piccole è proporzionale a V^2, *è indipendente dal segno*

dell'angolo d'attacco ed ha valore massimo per angolo d'attacco nullo; dipende dalle lunghezze dell'ala e dell'alettone mediante il fattore $l\sqrt{\lambda l}$, *e dall'inclinazione dell'alettone sull'ala mediante il fattore* Γ già più volte considerato.

A parità di altri elementi si ha quindi un massimo positivo del momento per $2\alpha = 330°$ circa, e un massimo negativo per $2\alpha = 30°$ circa.

Meccanica. — *Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio.* Nota II di G. Supino, presentata [1] dal Socio G. Fubini.

1. Nella Nota precedente ho stabilito che una condizione necessaria e sufficiente perchè le componenti di tensione $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ di una soluzione piana possano rappresentare la media delle stesse tensioni in un problema elastico nella lastra, scarica alle basi, soggetta sulle generatrici a forze simmetriche rispetto al piano medio è data dall'essere $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ sulle basi della lastra ($H = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$), Da questa condizione si deducono come semplice conseguenza

$$(1)\quad \left[\frac{\partial^{2n+1} H}{\partial z^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^{2n} \tau_{zx}}{\partial z^{2n}}\right|_{\pm a} = \left.\frac{\partial^{2n} \tau_{yz}}{\partial z^{2n}}\right|_{\pm a} = \left.\frac{\partial^{2n+1} \sigma_z}{\partial z^{2n+1}}\right|_{\pm a} = 0$$

$$(n = 0, 1, \cdots)$$

Resta ora da vedere, se da queste relazioni si trae qualche altra condizione per le rimanenti tre componenti di tensione.

Ricordando che $H = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ è proporzionale alla dilatazione cubica $\left(\text{è precisamente } \theta = \frac{m-2}{Em} H\right)$ consideriamo le equazioni elastiche espresse per mezzo degli spostamenti

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta_2 u + \dfrac{m}{m-z} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ \Delta_2 v + \dfrac{m}{m-z} \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ \Delta_2 w + \dfrac{m}{m-z} \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

e le relazioni tra deformazioni e componenti di tensione:

$$(3)\quad \sigma_x = E\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\theta}{m-2}\right\} \cdots \qquad \tau_{xy} = \frac{Em}{2(m+1)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

Se valgono le (1), dalla prima delle (3) segue

$$\left.\frac{\partial^3 \sigma_x}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = E \left.\frac{\partial^4 u}{\partial z^3 \partial x}\right|_{\pm a}$$

perchè

$$\left.\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = 0 .$$

Ma

$$\left[\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial x}\right]_{\pm a} = \frac{2(m+1)}{Em}\left[\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2}\right]_{\pm a} = 0$$

mentre d'altra parte

$$\left.\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right|_{\pm a} = E\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{\pm a} = 0$$

cioè

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]_{\pm a} = 0 .$$

Segue così

$$\left[\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right]_{\pm a} = 0$$

e quindi

$$\left.\frac{\partial^3 \sigma_x}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = 0 .$$

Analogamente:

$$\left.\frac{\partial^3 \sigma_y}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = 0 .$$

Inoltre

$$\left.\frac{\partial^3 \tau_{xy}}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = \frac{Em}{2(m+1)}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial z^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial z^3}\right)_{\pm a} = 0 .$$

Ripetendo, in base ai risultati acquisiti, il ragionamento per le derivate successive d'ordine dispari, si deduce

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial^{2n+1} \sigma_x}{\partial z^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0 \qquad \left[\frac{\partial^{2n+1} \sigma_y}{\partial z^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0 \qquad \left[\frac{\partial^{2n+1} \tau_{xy}}{\partial z^{2n+1}}\right]_{\pm a} = 0$$

$$(n = 1.2, \cdots) .$$

Noi consideriamo, come si è rilevato più volte, soltanto sistemi simmetrici rispetto al piano medio della lastra: per essi è

$$\left.\frac{\partial^{2n} H}{\partial z^{2n}}\right|_{+a} = \left.\frac{\partial^{2n} H}{\partial z^{2n}}\right|_{-a}$$

$$\left.\frac{\partial^{2n+1} \tau_{zx}}{\partial z^{2n+1}}\right|_{+a} = \left.\frac{\partial^{2n+1} \tau_{zx}}{\partial z^{2n+1}}\right|_{-a} \cdots \left.\frac{\partial^{2n} \sigma_x}{\partial z^{2n}}\right|_{+a} = \left.\frac{\partial^{2n} \sigma_x}{\partial z^{2n}}\right|_{-a} \left.\frac{\partial^{2n} \tau_{xy}}{\partial z^{2n}}\right|_{+a} = \left.\frac{\partial^{2n} \tau_{xy}}{\partial z^{2n}}\right|_{-a}$$

onde potremo concludere che dilatazione cubica, componenti di tensione e di spostamento, sono espresse da funzioni periodiche di z di periodo $2a$ se $\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{+a} = 0$. Fanno eccezione soltanto le (4) corrispondentemente ad $n = 0$ cioè

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}$$

$\left(\text{o ciò che fa lo stesso per le (3) } \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$.

Per queste non sappiamo per ora se vi è una periodicità.

2. Possiamo però procedere nel modo che segue. Dalla 3ª delle (2) si ha, con le ipotesi fatte, $[\Delta_2 w]_{\pm a} = 0$. Associando questa relazione a quella già rilevata $\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]_{+a} = 0$, possiamo affermare che, sulle basi, lo spostamento w è tale da soddisfare alla condizione

$$[\Delta_2' w]_{\pm a} = 0 \qquad \Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

In modo analogo si ricava

$$\left[\Delta_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{+a} = 0$$

e poichè

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right|_{\pm a} = 0$$

segue

$$\left.\Delta_2' \frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\pm a} = 0$$

ed infine

$$\left.\Delta_2' \frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\pm a} = 0 .$$

Possiamo porre

$$w|_{+a} = h_0(x, y) \qquad \Delta_2' h_0 = 0$$

onde

$$w|_{-a} = -h_0$$

e poichè

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]_{\pm a} = \frac{2(m+1)}{Em} |\tau_{zx}|_{\pm a} = 0 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{+a} = 0$$

così si può scrivere

$$w|_{+a} = h_0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{+a} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\pm a} = -\frac{\partial h_0}{\partial y}$$

$$w|_{-a} = -h_0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{-a} = \frac{\partial h_0}{\partial x} \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{-a} = \frac{\partial h_0}{\partial z}\,.$$

Consideriamo ora la soluzione tipo Clebsch che dà luogo allo spostamento $w = \frac{z}{a} h_0$ e sottraiamola dalla precedente. La soluzione che resta dà luogo ancora alle (1) e (4) poichè ad esse soddisfa una qualunque soluzione tipo Clebsch; ad esse si aggiungono ora, per questa soluzione residua, le condizioni

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\pm a} = 0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\pm a} = 0 \qquad w|_{\pm a} = 0\,.$$

Cioè questa sollecitazione residua dà luogo a componenti di tensione e di spostamento tutte periodiche di periodo $2a$. Possiamo allora accostare due lastre soggette a questa stessa sollecitazione e otterremo una soluzione valida nella lastra di *spessore doppio* in quanto le due faccie accostate *combaciano perfettamente.*

3. La soluzione ora ottenuta ha carattere periodico di periodo $2a$ anche nelle forze esterne (come si rileva subito dalle condizioni ai limiti) mentre la soluzione del Clebsch *non* ha carattere periodico. Perciò, anche dall'esame delle forze applicate possiamo dedurre quale sia la soluzione tipo Clebsch da aggiungere ad esse perchè la soluzione residua sia periodica.

Consideriamo il caso di forze costanti secondo la z. Esse hanno già carattere periodico e quindi non si potrà sommare ad esse nessuna soluzione tipo Clebsch. Se dunque una lastra è soggetta sulla sua superficie laterale a forze costanti lungo ciascuna generatrice, e se $\frac{\partial H}{\partial z}$ è nulla sulle basi, allora la sollecitazione deve essere periodica di periodo $2a$ in tutta la lastra. Ma in questo caso la lastra potrebbe essere pensata anche come risultato dell'accostamento di due lastre (ciascuna di spessore a) e addirittura di n lastre $\left(\text{di spessore } \frac{2a}{n}\right)$. Per valori di z corrispondenti a 0, $\frac{2a}{n}$, $\frac{4a}{n}\cdots$ dovrebbe essere allora $\sigma_z = \sigma_{zx} = \tau_{yz} = 0$. Cioè al limite dovrebbe essere in tutta la lastra $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yx} = 0$. Ma in tal caso si ricadrebbe in una soluzione tipo Clebsch, che sappiamo già non essere possibile, in generale [1], per forze costanti lungo le generatrici. Si conclude così, per assurdo, che se la lastra è soggetta a forze costanti lungo le generatrici, allora $\frac{\partial H}{\partial z}$

(1) Escluso il caso che sia H lineare in x ed y.

è diversa da zero sulle basi, e la soluzione piana non può quindi rappresentare in essa la media delle tensioni σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Con questo risultato la interpretazione « tecnica » della soluzione piana è dimostrata non corretta. Resta soltanto ancora una possibilità.

La soluzione piana, unita alla posizione: $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ rappresenta nella lastra soggetta a forze costanti sulle generatrici del contorno una distribuzione di tensioni non congruente perchè soddisfa in tutto il cilindro alle equazioni indefinite e a quelle ai limiti; sotto questo aspetto si può osservare (come ho già fatto nella Nota I) che il « cimento » complessivo del materiale, calcolato in base ad essa risulta maggiore di quello che si ha effettivamente. Ma perchè questa osservazione avesse una qualche importanza occorrerebbe che anche i massimi locali del « cimento » fossero nella soluzione piana maggiori di quelli effettivi: e questo forse non è sempre vero e, in ogni caso, sarebbe assai difficile da provare.

Chimica fisica. — *Lo stato liquido e le forze interatomiche.* Nota II di S. Franchetti, presentata [1] dal Corrisp. L. Rolla.

In una Nota recentemente apparsa su questi « Rendiconti » [2], i valori che le distanze (medie) interatomiche possono prendere negli stati solido e liquido e nel punto di passaggio, nel caso di un corpo monoatomico, sono stati messi in relazione con la curva $f(r) = -\varphi'(r)$ ($\varphi(r)$ energia potenziale di due particelle a distanza r) che rappresenta le forze interatomiche in funzione della distanza.

I resultati si riassumono nella fig. 1, dove r_f , r_l rappresentano rispettivamente le distanze interatomiche nel solido e nel liquido al punto di fusione, e dove ρ_f è il valore che assume in tale punto (per lo stato solido) il parametro ρ definito dall'equazione (4) Nota I [3].

Questa figura mostra che è $r_f < \rho_f$ e che ρ_f si trova in vicinanza del minimo, all'inizio del tratto « orizzontale » della curva $f(r)$ dove più o meno bruscamente si perde l'andamento quasi rettilineo del tratto discendente; mentre r_l pur essendo $>$ di ρ_f si trova ancora nel tratto « orizzontale ».

Queste considerazioni si prestano a una verifica sperimentale, quando si conosca la forma della curva nel tratto che ci interessa e il valore dell'area A. Infatti si può allora calcolare $r_l - r_0$, dove r_0 rappresenta l'ascissa del punto di annullamento, e fare il confronto col valore dato dall'esperienza.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

(2) « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. XXII, pp. 433-438.

(3) Per le equazioni (3) e (4) della precedente Nota, avendosi praticamente $\varphi''(r) = 0$ nel punto $r = \rho_l$ (e nei punti vicini), si ha anche $\rho_l = r_l$ e perciò non sarà fatta distinzione fra r e ρ nel caso dello stato liquido.

È da osservare che siccome per varie ragioni non si può pretendere di ottenere per $r_1 - r_0$ più che un ordine di grandezza, una conoscenza esatta delle forze interatomiche è superflua. Si vedrà che l'ordine di grandezza corretto si ottiene sostituendo alla curva in questione la spezzata indicata con $F(r)$, cioè sostituendo il tratto fra r_0 e ρ_f con la tangente alla curva in r_0 o in un punto vicino e il tratto che segue immediatamente ρ_f con una parallela all'asse delle ascisse. Basta pertanto conoscere la tangente a $f(r)$ nel punto r_0 o in un punto prossimo a questo.

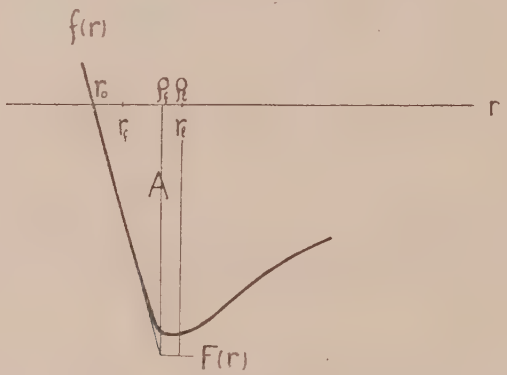


Fig. 1.

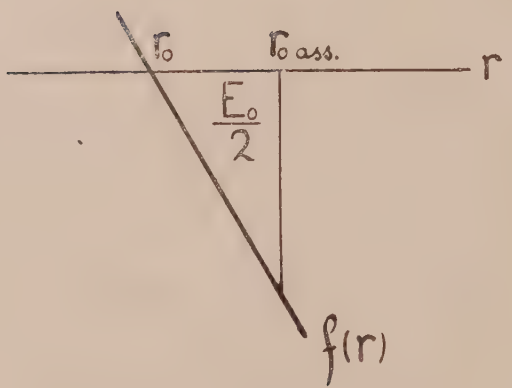


Fig. 2.

Serve allo scopo una formula che ho stabilito e verificato in precedenza, la quale lega la derivata $f'(r)$ nel tratto che ci interessa, alla frequenza propria ν delle oscillazioni degli atomi nel solido [1]. Questa formula

(1) Sul significato statistico di questa frequenza, che corrisponde praticamente alla $\nu_{max.}$ di Debye, vedi il lavoro citato.

è la (4) della Nota: « Forze interatomiche e frequenze di oscillazione degli atomi nei reticolati » [1], la quale dà:

$$(1) \qquad \nu = \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi} \sqrt{\frac{\Sigma\, \varphi''(r)}{m}}$$

dove r è compreso fra r_0 e r_f e m è la massa dell'atomo; relazione che, introducendo il numero λ_1 degli atomi che circondano un atomo qualunque alla minima distanza, si può ridurre con buona approssimazione a

$$(1') \qquad \nu = \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi} \sqrt{\frac{\lambda_1 |f'(r)|}{m}}\,.$$

Quanto alla ν essa si riconduce facilmente a grandezze ben note e cioè: T_f temperatura assoluta di fusione, M peso atomico, V volume atomico, se si adopera la formula di Lindemann:

$$(2) \qquad \nu = 2.8 \cdot 10^{12}\, T_f^{\frac{1}{2}}\, M^{-\frac{1}{2}}\, V^{-\frac{1}{3}}$$

la quale dà una approssimazione che in questo campo può considerarsi buona; oppure attraverso alle formule di Madelung-Einstein, di Debye, di Born, si può calcolare ν dalle costanti elastiche o dai calori specifici dei solidi. In ogni modo si può dire che la determinazione di $f'(r)$ non presenta difficoltà.

Resta da trovare il significato di $r_1 - r_0$ e di A.

Per l'ipotesi posta dell'assoluta preponderanza delle azioni fra atomi contigui, r_0 viene a essere la distanza di equilibrio in assenza di energia cinetica (e di forze esterne) cioè allo zero assoluto classico.

Da questo seguono due conseguenze. La prima è che $r_1 - r_0$ rappresenta l'aumento delle distanze interatomiche nel passare dal solido allo zero assoluto classico, al liquido al punto di fusione. La seconda conseguenza è che l'integrale della curva $f(r)$ fra $r = r_0$ e $r = \rho_f$ rappresenta per la (4) della precedente Nota, a meno del fattore $-\frac{2}{N\lambda_1}$, l'aumento dell'energia potenziale del solido fra lo zero assoluto classico e il punto di fusione. Si ha cioè

$$(3) \qquad \int_{r_0}^{\rho_f} f\,dr = -\frac{2}{N\lambda_1}\,(\Phi_{T_f} - \Phi_{0\,\text{ass.}})\,.$$

Si può attribuire a $\Phi_{T_f} - \Phi_{0\,\text{ass.}}$ un valore pari a quello dell'energia cinetica $\frac{3}{2} RT_f$; valutazione però soltanto approssimativa in quanto – nono-

(1) « Rend. Lincei », vol. 20, ser. 6ª, p. 187 (1934).

stante che la temperatura di fusione sia sempre abbastanza alta perchè la formula classica $\frac{3}{2}RT$ dia una buona approssimazione – si trascura così facendo l'aumento di energia mutua $\Delta\Phi_0$ (effettivamente piccolo rispetto a $\Phi_{T_f} - \Phi_{0\,ass.}$) e il fatto che non si ha neppure precisa eguaglianza fra l'energia cinetica e l'altra parte dell'energia potenziale cioè l'energia intrinseca Φ_1 [1]. Questa valutazione tuttavia dà certamente un buon ordine di grandezza, tanto più che ci sono delle ragioni sulle quali eventualmente tornerò in seguito per ritenere che i due errori sono di segno contrario.

Avendo attribuito al tratto fra r_0 e ρ_f un andamento quasi rettilineo – ipotesi che trova la sua conferma appunto nella presente verifica – si può sostituire nella (3) f con $f'(r_0)(r - r_0)$ e per questo e per le considerazioni precedenti scrivere

$$\int_{r_0}^{\rho_f} f(r)\,dr = \frac{1}{2} f'(r_0)(\rho_f - r_0)^2 = -\frac{2}{N\lambda_1} \cdot \frac{3}{2} RT_f$$

e posto

$$\rho_f - r_0 = \Delta \tag{4}$$

viene

$$\frac{1}{2} |f'(r_0)| \Delta^2 = \frac{3}{\lambda_1} RT_f. \tag{5}$$

Da questa e dalla (1′) si deduce

$$\Delta = \frac{1}{\pi\nu} \sqrt{\frac{RT_f}{2m}} \tag{6}$$

$$|f'(r_0)| = \frac{12}{\lambda_1} \pi^2 m \nu^2. \tag{6'}$$

La prima di queste relazioni ci servirà per stabilire un'interessante proprietà delle curve delle forze interatomiche; le due equazioni insieme dànno gli elementi sufficienti a determinare la spezzata $F(r)$.

Quanto all'integrale di $f(r)$ fra r_0 e r_1 esso è dato, per un'ipotesi posta nella precedente Nota (e cioè che il calore di fusione si trasformi tutto in energia potenziale), a meno del solito fattore $\frac{2}{N\lambda}$, dalla somma dell'integrale fra r_0 e ρ_f col calore di fusione C_f; si ha perciò:

(1) Questo fatto resulta dall'essere $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial V}\right)_S > 0$. Ved. la prima di queste Note e il lavoro *Sull'energie di oscillazione* ecc. « Rend. Lomb. », *66*, 731, 1933.

$$A = -\int_{r_0}^{r_1} f dr = \frac{2}{N\lambda_1'}\left(\frac{3}{2}RT_f + C_f\right)$$

dove λ_1', numero di atomi che circondano un atomo qualunque quando il corpo è allo stato liquido, può anche essere diverso dal corrispondente valore λ_1 nel solido.

Vale però una legge approssimata (di Richards) la quale dice che C_f è dato da RT_f. Perciò si ha

$$A = \frac{5}{N\lambda_1'}RT_f. \tag{7}$$

Sostituendo alla curva $f(r)$ la spezzata $F(r)$, l'area A viene ad essere l'area del trapezio compreso fra la spezzata stessa, l'asse delle ascisse e l'ordinata del punto r_1. Tenendo conto che l'altezza di questo trapezio è data da $(\rho_f - r_0)|f'(r_0)|$ cioè da $\Delta|f'(r_0)|$, si arriva per le equazioni (5) e (7) alla relazione

$$r_1 - r_0 = \Delta + \left(\frac{5}{\lambda_1'} - \frac{3}{\lambda_1}\right)\frac{kT_f}{|f'(r_0)|\Delta} \tag{8}$$

la quale insieme alle (6) e (6′) permette di ottenere $r_1 - r_0$.

Resta ora da vedere come si può dai dati sperimentali ricavare i valori di r_0 e r_1.

Estrapolando allo zero assoluto le curve dei coefficienti di dilatazione non si arriva a determinare il valore esatto di r_0, ma si trova un valore più grande a causa dell'energia allo zero assoluto E_0. È ovvio che qui importa conoscere invece il valore esatto e quindi bisogna applicare una correzione.

Il valore $r_{0\,ass.}$ che r prende allo zero assoluto si trova spostato a destra rispetto a r_0 e l'integrale della f fra i due punti rappresenta la parte potenziale dell'energia allo zero assoluto, in modo che si ha, per la (4) della Nota precedente:

$$E_0 = -N\lambda_1\int_{r_0}^{r_{0\,ass.}} f dr$$

e per la solita ipotesi verrà perciò

$$E_0 = -\frac{N\lambda_1}{2}f'(r_0)(r_{0\,ass.} - r_0)^2. \tag{9}$$

E_0 si può calcolare attribuendo $\frac{1}{2}$ quanto di energia a ciascuna delle oscillazioni che compaiono nello spettro termico del corpo. Si trova così

$$E_0 = \int_0^{\nu_{mass.}} \frac{h\nu}{2}\frac{9N}{\nu_{mass.}^3}\nu^2 d\nu = \frac{9}{8}Nh\nu. \tag{10}$$

E si può facilmente verificare che questo è anche il valore che bisogna aggiungere all'integrale dell'energia secondo Debye

$$U = \frac{9N}{\nu_{mass.}^3} \int_0^{\nu_{mass.}} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^2 \, d\nu$$

perchè per $T \to \infty$ si ritrovi la formula classica $\frac{6}{2} RT$ (1).

Dalle (9) e (10) e conoscendo λ_1' e $f'(r_0)$ nel modo detto si risale da $r_{0\,ass.}$ a r_0.

Per r_1 che rappresenta la distanza media fra atomi vicini nel liquido al punto di fusione si procederà nel modo più plausibile ammettendo che la struttura di un liquido monoatomico si avvicini molto – localmente – a un reticolato esagonale compatto. Si sa che in questo caso si ha $r = 1.12 \sqrt[3]{\frac{V}{N}}$, dove V è il volume complessivo e N il numero delle particelle; perciò la formula da adoperare sarà:

$$r_1 = 1.12 \sqrt[3]{\frac{V}{N}} . \tag{11}$$

In questa ipotesi è anche, nella (7),

$$\lambda_1' = 12 . \tag{7'}$$

Veniamo ora al confronto fra i dati calcolati e quelli sperimentali.

Si osserva in primo luogo una proprietà interessante del parametro Δ, e cioè la proporzionalità fra Δ e r_0. Questa proporzionalità resulta senz'altro se per il calcolo di ν si applica la formula di Lindemann. Si ha difatti dalla (2) per mezzo della (6) e sostituendo alle costanti i loro valori

$$\Delta = 7.32 \cdot 10^{-2} V^{\frac{1}{3}} \quad \text{u. Å}$$

dove V è il volume atomico; ma d'altra parte si può fare, con discreta approssimazione $r_0 = 1.3 V^{\frac{1}{3}}$ Å (con piccoli scarti a seconda dei vari tipi di strutture), sicchè viene

$$\frac{\Delta}{r_0} = 5.6 \cdot 10^{-2} . \tag{12}$$

(1) Un ragionamento analogo si trova in: Einstein u. Stern, « Ann. der Phys. », *40*, 551, 1913.

Siccome poi la formula di Lindemann è abbastanza bene verificata dall'esperienza, ci si deve aspettare che il rapporto $\frac{\Delta}{r_0}$ non si allontani molto da questo valore anche quando per il calcolo di ν non si adopera questa formula. La tabella seguente, dove i valori di ν sono calcolati dai calori specifici, conferma questo fatto.

Tabella I.

El.	ν (10^{12} sec^{-1})	M	Δ (Å)	r_0 (Å)	$\frac{\Delta}{r_0} 10^2$
C	38.5	12	0.09	1.54	5.8
Al	8.3	27	0.145	2.80	5.2
Cu	6.5	63	0.145	2.50	5.8
Ag	4.5	108	0.154	2.83	5.4
Pb	2.0	207	0.180	3.37	5.3

Dato il significato di Δ, il resultato ottenuto si può esprimere dicendo che il tratto compreso fra l'ascissa del minimo e quella di annullamento delle curve $f(r)$ è approssimativamente proporzionale a quest'ultima (o anche al diametro atomico) e rappresenta circa il 6 % di essa. Questo valore così basso mette anche in evidenza la grande rapidità delle azioni repulsive.

La tabella II contiene, per gli elementi per i quali è stato possibile raccogliere i dati necessari, i valori calcolati e quelli sperimentali per $r_l - r_0$ insieme ai dati che hanno servito per il loro calcolo.

Come si può vedere, la concordanza può ritenersi soddisfacente, date le approssimazioni fatte e l'incertezza di alcuni valori sperimentali, come il peso specifico del liquido al punto di fusione, nel caso degli elementi a temperatura di fusione relativamente alta.

Tabella II.

El.	λ_1	$-f'(r_0)$ (10^4 gr. sec^{-2})	ν (10^{12} sec^{-1})	M	$r_l - r_0$ calc. (Å)	E_0 cal./gr. at.	$r_{0\,ass.}$ (Å)	r_0 (Å)	r_l (Å)	$r_l - r_0$ sperim. (Å)
Na	8	0.85	3.9	23	*0.22*	420	3.65	3.56	3.86	*0.30*
Al	12	3.04	8.3	27	*0.19*	880	2.85	2.79	2.98	*0.19*
K	8	0.5	2.3	39	*0.27*	250	4.54	4.45	4.78	*0.33*
Ag	12	3.5	4.5	108	*0.20*	480	2.87	2.83	2.97	*0.14*
Pb	12	1.35	2.0	207	*0.23*	190	3.43	3.37	3.55	*0.18*

Date le ipotesi poste, restano stabilite da quanto precede due proprietà delle curve delle forze interatomiche:

1) il loro andamento quasi rettilineo fra r_o e ρ_f (nel senso che l'integrale della curva in questo tratto differisce poco da quello della tangente nel punto r_o);

2) la proporzionalità fra $\rho_f - r_o$ e r_o.

Tornerò in seguito su queste e su altre proprietà deducibili dalla formula di Lindemann. Dell'andamento rettilineo fra r_o e ρ_f si può avere intanto una conferma ulteriore nel modo seguente.

Ammettendo questo andamento, il prodotto $(\rho_f - r_o) f'(r_o)$ dà approssimativamente il valore della forza $f(r)$ nel punto di minimo. D'altra parte a un aumento di temperatura dT corrisponde nel caso dello stato liquido un aumento dalla distanza interatomica media $dr = \frac{\alpha}{3} r dT$ dove α è il coefficiente di dilatazione cubica. Da questo e dalla (4) della Nota precedente, che nel caso del liquido prende la forma:

$$\Phi = 6 N \varphi(r)$$

si deduce un aumento dell'energia potenziale totale Φ:

$$d\Phi = 6 N \varphi'(r) dr = 2 N (\rho_f - r_o) | f'(r_o) | \alpha r dT$$

ciò che porta un contributo $2 N \Delta | f'(r_o) | \alpha r$ al calore specifico C_p.

Il contributo dovuto all'energia cinetica si può supporre che sia dato approssimativamente da $\frac{3}{2} R$, mentre quello dovuto al lavoro esterno è nelle condizioni ordinarie trascurabile. Sicchè se le ipotesi poste sono giuste deve valere la relazione approssimativa seguente:

$$C_p = 2 N \Delta | f'(r_o) | \alpha r + \frac{3}{2} R$$

cioè

$$\alpha = \frac{C_p - \frac{3}{2} R}{2 N \Delta | f'(r_o) | r} .$$

La tabella III contiene – accanto ai valori di C_p per lo stato liquido, al punto di fusione – i valori di α calcolati con questa formula e quelli sperimentali, per gli elementi per i quali si conoscono i dati sufficienti e prendendo per Δ la formula (12). Si vede che l'accordo è buono.

Tabella III.

El.	C_p (cal /gr. at.)	$\alpha_{calc.}$	$\alpha_{sperim.}$
Na	7.40	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$
K	7.50	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
Pb	7.04	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$

Geologia (Geomorfologia). — *Di un caso di erosione accelerata verificatosi in Valle d'Urba* [1][2]. Nota di M. Airoldi, presentata[3] dal Corrisp. G. Rovereto.

In seguito alla caduta di una delle dighe, la secondaria, del bacino artificiale di Ortiglieto in Valle d'Urba, ed al conseguente repentino svuotamento del bacino stesso, si sono verificati in corrispondenza della diga crollata, alcuni fenomeni di erosione accelerata che reputo meritevoli di segnalazione.

È necessario ricordare, che nella località in questione, il torrente Urba descrive alcuni stretti meandri incassati [fig. 1], già noti in geomorfologia perchè descritti fino dal 1904 dal Rovereto[4] che si basava su di essi per dare la prima spiegazione dei « meandri da epigenesi o ereditati ».

La diga travolta durante il nubifragio del 13 agosto 1935 era impostata su di una insellatura situata alla base della sporgenza di uno dei meandri più protesi, e precisamente su quella compresa tra le due anse estreme del meandro circuente il Bric Zerbino [fig. 1]. La quota di tale sella, nel suo punto più basso, era di 310 metri; il livello dell'Urba, nell'ansa a monte della sella, era, prima dell'invaso del bacino, di m. 286, e nell'ansa a valle di m. 268. La distanza tra le due anse non raggiungeva i 250 metri.

Còmpito della diga secondaria era di innalzare la quota della sella di m. 14.50, per permettere che il lago, determinato da uno sbarramento principale, collocato ad una stretta dell'Urba tra Bric Zerbino e Bric Saccone, immediatamente a valle del Rio delle Brigne [fig. 1], raggiungesse nelle condizioni di massimo invaso, il livello di 320 metri.

(1) Mi conformo a questa denominazione con quella ufficiale ora adottata.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Genova.

(3) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

(4) G. Rovereto, *Geomorfologia delle valli Liguri*. Genova, 1904, pp. 98–100, fig. 21 *a*; la stessa figura leggermente modificata è pure riprodotta a p. 405 del *Trattato di Geomorfologia* dello stesso autore.

Il nubifragio abbattutosi sull'alta valle dell'Urba il 13 agosto u. s., durante il quale in sole due ore precipitarono 400 mm. di pioggia, determinò un aumento del livello del lago di 5 metri al di sopra di quello

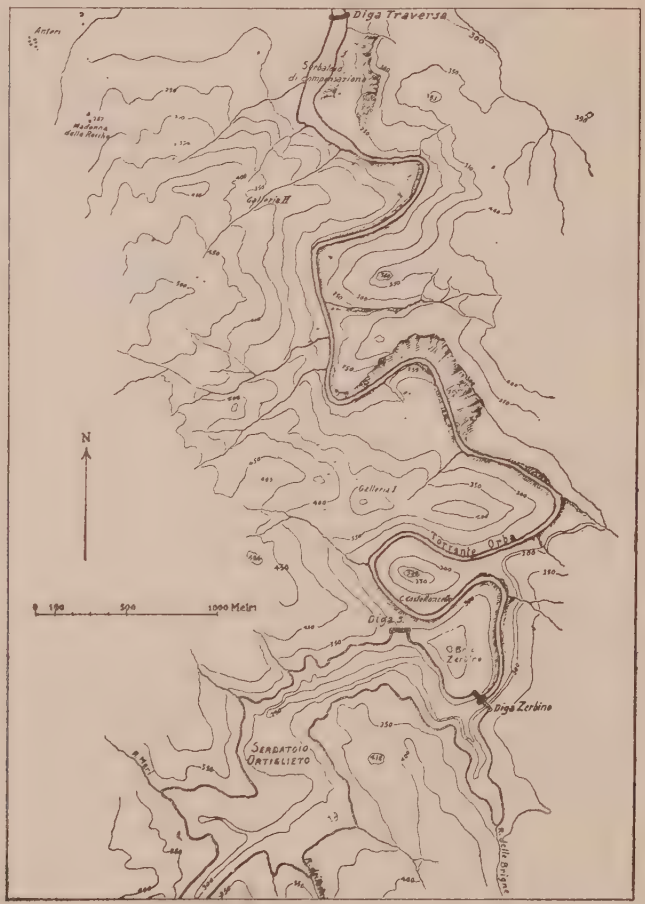


Fig. 1. – Planimetria della valle dell'Urba nella zona dei meandri e dei laghi artificiali.

massimo previsto, e di conseguenza una tracimazione per un'altezza di m. 1.50 dal ciglio della diga. Questa fu poco dopo travolta, non solo, ma la sella su cui era impostata, *fu squarciata e asportata per una profondità di una ventina di metri* [fig. 2], raggiungendo così una quota corrispondente al livello dell'antico letto del torrente a monte di essa, e permettendo quindi lo svuotamento rapidissimo del lago.

L'Urba defluendo attraverso il varco formatosi, si trovò ad essere alle spalle di Bric Zerbino, il quale si trasformò così in un' « isola di avul-

sione», e il nuovo corso del torrente venne a formare *un salto di 15 m. circa di altezza* sul letto antico a valle del meandro [fig. 3].

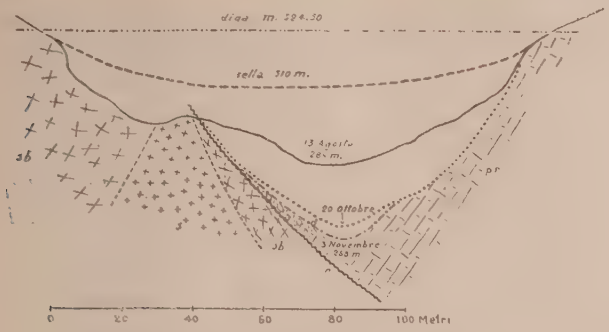


Fig. 2. – Sezione della selletta sostenente la diga rovinata con i successivi profili trasversali, al 13 agosto, al 20 ottobre e al 3 novembre.

sb = serpentina fratturata; *s* = serpentina salda; *d* = fascia detritica; *pr* = scisti prasinitici; *c* = linea di contatto fra la serpentina e gli scisti prasinitici.

È in corrispondenza del solco apertosi attraverso la sella, che si osservano i più cospicui fenomeni di erosione accelerata, i quali, se sono anche relazionati colle ripetute pioggie temporalesche che continuarono a cadere nell'alta valle dell'Urba nei mesi autunnali, trovano tuttavia la loro spiegazione, nelle condizioni litologiche della sella squarciata. Quivi vengono a contatto le serpentine che si estendono verso levante a costituire il Bric Zerbino, e gli scisti verdi che si estendono alquanto sul versante sinistro dell'Urba.

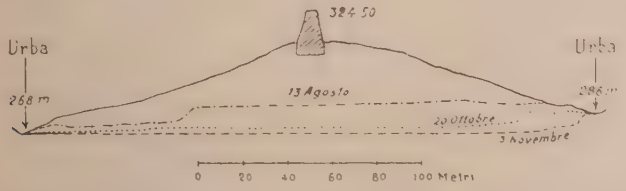


Fig. 3. – Sezione lungo il corso del nuovo scaricatore, e le varie fasi di approfondimento dello stesso, al 13 agosto, al 20 ottobre e al 3 novembre.

Lo studio della zona di contatto è ora facilitato dallo squarcio ivi determinatosi. Sul fianco sinistro od occidentale di esso, si osservano gli scisti verdi prasinitici [fig. 2 *pr*], fortemente laminati ed alterati, presentanti nelle parti conservate una struttura microghiandolare; tali scisti, probabilmente di origine gabbrica, sono in banchi assai raddrizzati, prevalentemente diretti NS, con inclinazione di 60°-70° verso levante, determinando così un versante di faccia. Sono frequenti fra questi banchi, zone argillose derivate da caolinizzazione, raggiungenti anche 30 cm. di spessore.

Sul fianco destro od orientale si ha la serpentina, interessata da un fitto sistema di fratture con patine talcose, che la dividono in piccoli blocchi, causandone il facile sfacelo [fig. 2 *sb*]; ciò ha dato origine alla formazione di una fascia detritica che riveste la parte inferiore di questo versante [fig. 2 *d*]; ma ad una qualche distanza dal contatto di essa, emerge un banco di serpentina inalterata e compatta, il solo che quivi presenti condizioni di saldezza, e che si innalza di una ventina di metri al disopra del letto attuale del torrente [fig. 2 *s*].

Quest'ultimo dal giorno del disastro, *si è approfondito ulteriormente di circa venti metri*, ed il salto a cui è più sopra accennato, ha retroceduto per erosione regressiva verso monte, di almeno 150 metri, riducendo gradualmente la sua altezza a circa un paio di metri. In soli 14 giorni, e precisamente dal 20 ottobre al 3 novembre, alla quale seconda data si devono attribuire le mie ultime osservazioni, *tale regressione ho potuto valutare approssimativamente in 25 metri* [fig. 3]. Ora pare che all'ulteriore retrocedere del salto ostacoli l'esistenza di un banco di eufodite, anch'essa assai alterata ma tuttavia più resistente delle rocce contermini, e che si trova presso al contatto tra gli scisti prasinitici e la serpentina, e rimane separata da questa, da alcuni straterelli di uno scisto verde completamente talcizzato e friabilissimo: sembra che questa eufotide sarà la soglia di una cascata permanente.

Dopo la cascatella, che ha raggiauto ormai l'inizio, dalla parte a monte, del nuovo solco, l'Urba scorre attraverso di questo, con una pendenza un po' accentuata ma uniforme, ad un livello che risulta dai 35 ai 40 metri inferiore alla quota minima della preesistente sella, *e dai 15 ai 20 metri più basso di quello rapidissimamente raggiunto al momento del disastro* [figg. 2–3]. Per di più, durante questo rapido approfondimento, il torrente ha subìto un lieve spostamento verso sinistra, seguendo la linea di contatto tra la serpentina e gli scisti prasinitici.

A più di 50 metri sopra il letto del torrente, permangono sui due fianchi, le spalle della diga; sulla sinistra essi appoggiano, a quanto è dato di vedere, su di un terriccio rossastro di notevole spessore che, non essendomi stato permesso di esaminare da vicino, non so se doversi attribuire puramente all'alterazione della roccia prasinitica sottostante, o se doversi considerare come un residuo del « diluvium » dell'alto terrazzo che ricopriva la sella.

Sulla destra invece il moncone della spalla della diga, si approfonda notevolmente nella serpentina fratturata.

Estendendo le osservazioni nel tratto di valle che era occupata dal lago, si constata che l'Urba è rientrata nel vecchio letto, affondandosi rapidamente negli spessi sedimenti fangosi depositatisi nei dieci anni di artificiale regime lacustre. Tali sedimenti raggiungono il loro massimo spessore nel tratto compreso fra la diga crollata e quella tuttora esistente, spessore misurante

4 e anche 5 metri; ciò è in relazione con la maggiore profondità del lago e con il considerevole apporto di torbide del ritano delle Brigne.

In questa zona si è poi determinata una inversione di corrente; il vecchio corso dell'Urba, da questa abbandonato, è ora percorso in senso inverso dalle acque del ritano delle Brigne, che ha quindi notevolmente spostato verso occidente il suo punto di confluenza.

Risalendo la valle, si vedono i sedimenti di limo diminuire man mano di spessore; all'altezza di Rio Meri esso si riduce, presso l'alveo del torrente, a circa 70 cm. In questo tratto l'Urba pare in una fase di notevole attività erosiva; infatti essa ha inciso non soltanto i depositi fangosi, ma si è approfondita per quasi mezzo metro nelle alluvioni grossolane preesistenti. Nel tratto più a monte, alla data delle mie osservazioni, il torrente non aveva rioccupato il vecchio alveo, ma era diviso in vari rivi divaganti, il che probabilmente è dovuto al fatto che, poco a monte di Rio Meri, una soglia di dura serpentina attraversa l'alveo, ostacolando il rapido risalire dell'azione erosiva.

L'erosione regressiva ha invece raggiunto i principali affluenti, quali Rio Meri e Rio dei Pastori, i quali hanno rioccupato il tratto del loro alveo che era stato sommerso, incidendo anche le conoidi di deiezione costruite al loro sbocco nel lago.

Sulla riva destra, poco a valle di Rio dei Pastori, alcuni piccoli rivi scendenti dal versante sotto quota 416, sono rimasti sospesi sul letto dell'Urba, ad un'altezza corrispondente all'incirca a quella normale dello scomparso lago.

Per quanto riguarda la valle nel tratto inferiore alla diga distrutta, il fenomeno più notevole che vi si osserva è la presenza di un grande accumulo di ciottoli e massi, dallo spessore di 5 o 6 metri, formatosi al momento del crollo, di contro al basso terrazzo di C. Castelloncello, e sbarrante in questo punto l'abbandonato meandro dell'Urba, per modo che vi ha originato un laghetto.

Tale cumulo detritico può considerarsi un esempio similare a quelli dei « coni di deiezione da un solo nubifragio ». Un cono di deiezione dello stesso tipo e formatosi in circostanze simili, ha sepolto nell'ottobre 1925 il villaggio di Porth Llwyd, nel paese di Galles (1).

Scendendo più a valle si osserva che i versanti sono denudati per una certa altezza del bosco e della coltre detritica che li ricopriva, e che tale altezza è maggiore sulla sponda concava dei meandri; questo è l'effetto dell'enorme ondata che percorse la valle il giorno del disastro, ondata che travolse pure la diga di un serbatoio di compensanzione, posto di poco a monte

(1) W.'G. Fearnsides and W. H. Wilcockson, *A topographical study of the flood-swept course of the Porth-Llwyd above Dolgarrog*. « The Geographical Journal », vol. LXXII, n. 5, novembre 1928.

di Molare, e che si abbattè sulla parte bassa di Ovada con le luttuose conseguenze a tutti note.

Ora, passato il flutto devastatore e ritornata normale la corrente, si è iniziata in questa parte del corso dell'Urba una fase di sedimentazione; si deposita il limo che il torrente asporta dal fondo prosciugato del lago; ciò ho potuto osservare a monte dell'abitato di Molare, dove la valle, uscita dalla stretta determinata dalla zona delle pietre verdi, si amplia fra i conglomerati e le marne oligoceniche.

Biologia. — *Notizie preliminari sulle caratteristiche chimiche e biologiche del Lago di Massaciuccoli* [1]. Nota di G. Brunelli e G. Cannicci, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

I laghi d'Italia più noti sono quelli di grandi profondità, cioè i laghi marginali delle Alpi e quelli craterici dell'Italia Centrale; tra i laghi che presentano invece piccola profondità ed hanno carattere di lago stagno, recentemente è stato studiato solo il Trasimeno - perfettamente di acqua dolce - e anche in esso dal punto di vista algologico il problema non è stato affrontato; cosicchè accingendoci allo studio del lago-stagno di Massaciuccoli, dal punto di vista zoologico e botanico, ci è sembrato di colmare una lacuna della limnobiotica italiana.

Non poteva soccorrere in tal senso lo studio, per quanto utile ai fini di una comparazione, di stagni della regione svedese o tedesca, nei quali la limnologia regionale ha fatto grandi progressi.

Il lago di Massaciuccoli, mentre non è lontano dal mare, e vi comunica, non è così vicino da risentirne notevoli sbalzi di salinità, anche per le scarse maree del Tirreno. Le sue vicende nel campo della bonificazione dalla classica memoria delle cateratte a bilico di Zendrini ad oggi sono note.

Lo studio di tale bacino presentava poi altri due aspetti interessanti, quello di giacere nel cuore di una zona di paludismo senza malaria, e l'altro, non meno importante, di essere uno stagno con imponenti fenomeni secolari di torbazione.

Geologicamente la vicinanza di terreni sabbiosi è indizio sicuro che il lago di Massaciuccoli giaceva anticamente assai più vicino al mare e dovette, con probabilità, essere di tipo mesoalino.

Il Marinelli lo considerava uno dei rari laghi costieri situati a distanza di chilometri dal mare, a causa del protendersi rapidissimo della spiaggia.

Il lago si trova in Toscana, a 43° 50′ di latitudine, 2° 7′ di longitudine; secondo l'ultima carta, gentilmente messa a disposizione dal Genio

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idrobiologia.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1935.

Civile e fornita dal Consorzio di Bonifiche di Massaciuccoli, la profondità massima del lago sarebbe, in rarissimi punti di massima depressione, fino a metri 4-4,50 contrariamente ai dati del Maestri e del Marinelli per i quali non sorpassava i metri 2,90, pur rimanendo le profondità più riscontrate tra m. 1,50 e m. 2,50, ciò che si accorda con le nostre osservazioni. Il fondo, sabbioso soltanto nel lato sud–ovest, si presenta generalmente molto calcareo e più ricco di sostanza organica quando si abbattono le piante sommerse, tra le quali predomina in modo assoluto la *Chara hyspida* var. *macrocanthae*; i fenomeni di decomposizione, per la presenza della considerevole quantità di carbonato di calcio, non dànno però origine nemmeno sul fondo a produzione di acidità.

Presentemente, come abbiamo detto sopra, le acque del lago risentono ben poco dell'influsso marino, e la salinità si mantiene straordinariamente bassa: nel 1921 furono condotte – per scopi industriali, dietro richiesta della Direzione di Torre del Lago della « Soc. An. Torbiere d'Italia » - alcune determinazioni sulle acque di quel lago, e in tre certificati di analisi del Laboratorio di Chimica Agraria della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano, corrispondenti a tre campioni, abbiamo rilevato, per il cloro, i seguenti valori per mille: gr. 0.456 (residuo a 100° gr. 1.350), gr. 0.387 (residuo a 100° gr. 1.050), gr. 0.246 (residuo a 100° gr. 1.060); nel giugno 1927 fu effettuata da noi stessi l'analisi di alcuni campioni nei riguardi dell'inquinamento dovuto alla torbiera e trovammo per il cloro gr. 0.351 – gr. 0.345 – gr. 0.586 – ‰.

Abbiamo eseguito un altro prelevamento nel luglio 1931, quindi periodicamente dal novembre 1931 al dicembre 1933, poi nel luglio 1934 e nel maggio, settembre e ottobre 1935, e possiamo dai - numerosi dati raccolti – prendere come valore minimo del contenuto in cloro della zona centrale del lago quello di gr. 0.270 ‰ verificatosi nel febbraio del 1933, e come valore massimo quello di gr. 0.778 ‰ riscontrato nel dicembre 1933.

Perciò il lago rientra senz'altro nel tipo *oligoalino*, non soltanto secondo la classificazione di Brunelli [1] per gli stagni costieri mediterranei, ma anche secondo i limiti stabiliti da Redeke [2].

Per il passaggio dunque che si dovrebbe essere verificato dal tipo *mesoalino* all'*oligoalino* lo studio del lago interessa anche per il problema dalla così detta fauna di reliquato, ma contrariamente alla teoria del Pavesi non troviamo in Massaciuccoli forme segregate, il che indica che assai più importante è il succedersi della vita oligoalina alla mesoalina, senza sopravvivenze che di quelle poche forme che tuttora possono immigrare dal mare.

(1) G. Brunelli, *Ricerche sugli stagni litoranei.* « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. XVII, ser. 6ª, fasc. III, 1933.

(2) H. C. Redeke, *Abriss der regionalem Limnologie der Niederlande.* « Hydrobiologische Club ». Amsterdam. Publicate n. 1, 1932.

E per questa immigrazione esiste negli stagni, come fattore limitativo, non solo la salinità, ma anche la temperatura che, nel lago di Massaciuccoli, subisce una notevole variazione annua, potendo scendere in inverno fino a zero (negli inverni più freddi il lago può presentare fenomeni di gelo) e salire in estate fin sopra i 30°, come noi stessi abbiamo riscontrato.

A prescindere dal contenuto in cloro, al quale già abbiamo fatto cenno rientrando il lavoro in una serie di ricerche che tendono a stabilire, per la regione mediterranea, l'adattamento della fauna e della flora lacustre ai vari gradi di salinità, abbiamo preso in esame anche qualche caratteristica fisico-chimica che ci desse un punto d'appoggio sia per la spiegazione di alcuni aspetti biologici, come per la classificazione del lago secondo le vedute delle scuole tedesche e svedesi.

Qui si affaccia la discussione già altre volte sollevata dalle scuole italiane, cioè se – e in quanto – la classificazione di limnologia regionale delle scuole tedesche e svedesi sia applicabile ai nostri laghi, e in particolare a quelli costieri, per l'influenza che le speciali condizioni di questi, termiche e di salinità, possono avere nei riguardi della distribuzione qualitativa e quantitativa delle specie, problema che in questi ultimi anni viene trattato da noi, per stagni e lagune mediterranee, e da studiosi dei mari nordici. E per questo tipo di laghi viene sempre più in evidenza l'impossibilità di divisioni schematiche e la necessità di considerare nel maggior numero dei casi, sia nei riguardi delle produttività come in quelli della distribuzione qualitativa delle specie, il tipo di acqua, e non solo la ricchezza di sostanze nutritive azotate e fosforate, che, per gli ambienti costieri è – secondo il nostro parere – per il considerevole sviluppo delle rive e per gli afflussi di acqua dolce provenienti da terreni paludosi circostanti, sempre considerevole, ma non sempre utilizzabile intensamente.

Il lago di Massaciuccoli, per la ricchezza in calcio delle sue acque, l'elevata alcalinità, la buona ossigenazione anche del fondo (pur essendo un lago non molto grande e a profondità poco rilevante) la relativa povertà di forme puramente planctoniche, rientra nei laghi oligotrofici, ma più propriamente nella sottocategoria degli « alcalitrofici » [1].

Infatti, il contenuto in ossido di calcio è risultato su diverse analisi compiute, sempre superiore a 100 mg. per litro, con un minimo valore riscontrato di mg. 122 (luglio 1931) e un massimo di mg. 172 in un campione di profondità dell'agosto 1933. Nè questo alto valore può essere riportato al residuo salino elevato in confronto alle vere e proprie acque dolci e quindi alla intrusione di acqua di mare, in quanto l'acqua di mare è, com'è noto, relativamente molto più povera in CaO delle acque dolci.

In relazione a questo alto contenuto in CaO, sopratutto sotto forma

(1) E. Naumann, *Grundzüge der regionalen Limnologie.* « Die Binnengewässer », Bd. XI. Stuttgart, 1932.

di bicarbonato, il valore del pH misurato periodicamente in diversi anni, nelle zone centrali e di riva, in superficie e in profondità, non ha dato mai valori inferiori a 7.2 mentre ha raggiunto il valore di 8.6 8.7 in superficie, nell'agosto 1933, negli stessi campioni nei quali abbiamo riscontrato i valori massimi in CaO.

L'ossigeno disciolto ha raggiunto fino ad un massimo invernale di cm^3 9.232 °/₀₀, e nei periodi estivi ed autunnali è sceso molto raramente al di sotto di cm^3 4 °/₀₀, anche in profondità, con un minimo di cm^3 3,423.

Per quanto riguarda la parte biologica è molto interessante osservare la bella coincidenza dell'associazione vegetale del lago da noi studiato con quella riscontrata da Lundqvist (*Cladium – Phragmites – Nimphaea – Chara*) in laghi alcalitrofici (Träsk Typus) della Svezia.

Mentre coincide con la oligotrofia la presenza delle praterie di Caracee che ricopre ormai (si è estesa gradatamente durante il periodo delle nostre osservazioni) quasi completamente il fondo, vi sarebbe da muovere una obiezione nei riguardi del netto predominio delle Cianoficee sulle Cloroficee, in quanto ci si riferisce alla microflora, poichè in stagni oligotrofici di altre zone, le Cloroficee si trovano in quantità superiore; ma d'altra parte non si può trascurare di prendere in considerazione la presenza di una certa quantità di cloro, il fatto che i laghi alcalitrofici fanno passaggio agli eutrofici, e l'osservazione già compiuta da Forti, che negli stagni di piccola profondità dell'Europa Meridionale predominano le Mixoficee, cosicchè questo nostro studio corrobora le vedute dell'eminente algologo italiano.

Colpisce nel lago di Massaciuccoli che, pur essendo il numero delle Cianoficee assai notevole, così che *Microcystis*, *Gomphosphaeria*, *Coelosphaerium*, *Chroococcus*, *Merismopedia* ed altri generi vi si riscontrano con notevole frequenza, più scarso è il numero delle Oscillatoriacee, e ciò forse deve essere legato alla buona ossigenazione delle acque.

Altra osservazione importante rispetto al Trasimeno è quella che durante il lungo periodo dei nostri prelevamenti non si è mai riscontrato il genere *Ceratium*, largamente distribuito anche nei laghi craterici; comune invece il *Peridinium* che, specialmente col. *Peridinium Borgei* dà luogo ad una abbondante distribuzione in tutto il lago e nei canali, corrispondentemente a quanto è stato osservato sulla biologia di questa specie, che anche qui si presenta ricca di cromatofori e di gocce oleose.

Abbondante la flora diatomologica, sopratutto nelle associazioni che si formano attorno alle Caracee e alle altre piante sommerse, ma colpisce rispetto ad altri ambienti (per esempio stagni mesoalini da noi studiati in parallelo), la piccolezza delle specie dei generi *Navicula*, *Cymbella*, *Gomphonema* e e di altri meno comuni, se si eccettua la *Navicula viridis* e la *Navicula halophila*, assai frequenti, la *Amphora ovalis*, la *Rhopalodia gibba*, qualche *Campylodiscus*, *Amphyprora*, *Synedra*, e poche altre specie raramente osservate.

Tra le Conjugate, le Desmidiacee son rappresentate da pochi generi (*Closterium*, *Cosmarium*, *Euastrum*) con numero molto limitato di specie e di individui; anche il Forti considera la maggior parte delle Desmidiacee come alghe planctoniche di alto lago.

Le Zygnemacee non sono rare, coi generi *Spirogyra*, *Zygnema* e *Mougeotia*, tra i quali i primi due predominano.

Per i Protisti, osservati semplicemente sul materiale raccolto senza preliminari culture, abbiamo riscontrate comuni alcune specie già noverate da Zacharias per l'eleoplancton.

Il numero delle specie di Rotiferi viventi nel lago di Massaciuccoli è relativamente grande, e ciò devesi in parte alla prateria di Caracee per cui alle specie pelagiche si aggiungono quelle dei fondi erbosi, ossia del fitale; tra le specie planctoniche predominano in modo assoluto *Keratella quadrata* e *Triarthra longiseta*, come è stato osservato da Apolloni nel lago pontino di Fondi nel quale Cannicci ha riscontrato valori di salinità molto vicini a quelli di Massaciuccoli, e che presenta con questo lago molte convergenze biologiche come verrà meglio messo in evidenza nella Nota definitiva: queste due specie nei mesi invernali, con *Synchaeta*, *Brachionus*, *Notholca*, *Pompholys*, ecc. costituiscono la facies dello zooplancton; una facies primaverile a rotiferi fu rappresentata da *Pedalium mirum*, che però dopo si è riscontrato sempre con numero più limitato di individui; il *Polychaetus collinsii*, di solito assai raro, fu molto comune in alcune pescate del luglio 1934. Tra i Rotiferi del fitale predomina il genere *Monostyla*, accompagnato da *Lepadella*, *Colurella*, *Lecane* ecc.

I Cladoceri non hanno in questo lago una larga rappresentanza e forse ciò è in rapporto all'ambiente oligoalino, essendo ben nota la sensibilità di molti di questi entomostraci alle variazioni di salinità: sono comuni nel plancton estivo *Diaphanosoma brachiurum* e *Cereodaphnia quadrangula*, e si riscontrano talvolta, più attorno alle piante che nel plancton, *Chidorus sphaericus*, *Alona affinis* e *Alona rectangula*.

A Massaciuccoli, nel lungo periodo delle nostre osservazioni, non si è mai trovato intrusione di Cladoceri marini, come *Evadne* e *Podon*, mentre quest'ultimo è comune nell'ambiente mesoalino di Paola secondo nostre ricerche in corso, ed è presente nel Lago di Butrinto in Albania, in prelevamenti del maggio scorso, quando i campioni di acqua della superficie, da noi esaminati insieme col plancton, non davano valori in cloro superiori a gr. 0,446 ‰.

Rimane confermato dalle ricerche condotte in questo lago che *Cereodaphnia* è genere eleoplanctonico; *Daphnia longispina*, mai riscontrata durante osservazioni di anni, mal si adatta anche a basse salinità.

Tra i Copepodi i più diffusi il *Cyclops leuckarti* e la *Popella guernei* (*Calanipeda aquae dulcis*) trovata anche a Fondi e a Paola e molto comune nei nostri stagni litoranei come hanno mostrato successive ricerche estese da

Cannicci; frequente tra gli Harpacticoidi la *Nitocra inuber*; più rari il *Cyclops bicolor*, il *Cyclops bicuspidatus*, la *Mesochra lilljeborgii*; riscontrato una sola volta, sebbene vivo, il *Tachidius littoralis*.

Nelle praterie sommerse è molto comune il *Palaemonetes varians* e non manca qualche rappresentante del *Gammarus Olivii*. La *Limnaea lagotis*, la *Bythinia tentaculata*, la *B. Boissieri* e la *Neritina fluviatilis* in una var. lineato-fasciata vivono sulle Caracee, sulla *Nayas*, sul *Myriophyllum* e *Ceratophyllum* che abbondano nelle vicinanze del fragmiteto, sulla parte costiera del lago, e nel giugno 1935 osservammo sulla *Chara* i nidamenti gelatinosi della *Limnaea* tutti impastati di piccole diatomee.

Manca nel lago una differenza sostanziale tra vita di pelago e neritica, ciò che avviene nei laghi-stagni a scarso fondale, e in questo il nostro modo di vedere si accorda più con Zacharias che con Forel.

E' probabile che l'impossibilità – che si verifica in laghi di questo tipo – di sensibili migrazioni verticali, limiti l'adattamento di molte alghe; allo stesso fattore può attribuirsi, per lo zooplancton, l'assenza della *Leptodora hyalina* che teoricamente dovebbe trovarsi a Massaciuccoli più che al Trasimeno, e questo è uno dei reperti contrari alla teoria di Pavesi sulle forme di reliquato.

Abbiamo accennato ai pochi Molluschi, e tra i Crostacei al *Palaemonetes* e al *Gammarus* che vivono – non molto numerosi - sulle praterie sommerse insieme alla microflora e microfauna che sono invece assai abbondanti; nei fanghi, che occupano ormai superficie minime, la vita è assai scarsa e vi si riscontrano soltanto larve di chironomidi, *Tricotanypus rivulorum* e *Tanytarsus* sp.; la presenza del *Tanytarsus* conferma l'oligotrofia dell'ambiente.

La scarsità di vita è legata anche alla leggera salinità che determina lo scomparire di molte forme di acqua dolce.

Nel periodo dell'inquinamento dovuto alla torbiera era scomparsa dal fondo del lago la prateria di Caracee, alla quale si uniscono in minor numero il *Potamogeton pectinatus*, la *Nayas marina*, il *Myriophyllum spicatum*, il *Ceratophyllum demersum*, il *Ceratophyllum submersum*, e scarsissina era diventata la popolazione ittica; col ritorno alle condizioni normali di vegetazione, anche i pesci hanno ritrovato un più conveniente *habitat*, per cui lucci, tinche, cefali e latterini vi si pescano in discreta misura; le carpe immesse, non sono state pescate in gran quantità, probabilmente per causa della voracità dei lucci presenti, ma un esemplare ha potuto raggiungere i 7 chilogrammi. L'ambiente sarà particolarmente adatto per l'immissione del pesce persico.

Vogliamo ora fare qualche considerazione sui fenomeni di torbazione: essi mostrano che anticamente il lago-stagno era di assai maggiore estensione, e che a mano a mano esso si ritirò mentre la torbazione di gronda con la vegetazione palustre invadeva il suo specchio.

Lo stesso fenomeno si può notare, sempre in Toscana, presso lo stagno di Capalbio.

Nell'osservare tale fenomeno, Brunelli, riallacciandosi alle ricerche da lui compiute sui giacimenti di lignite bianca, ritiene poter affermare alcuni punti di vista sulla differenza tra torbazione e formazione delle ligniti, e non è d'accordo con le teorie relative alla genesi dei banchi di lignite; le ricerche di Brunelli, che ha osservato il modo di conservarsi intatto dei tronchi, mostrano piuttosto che, contrariamente alle dominanti teorie della fluitazione, nella formazione delle ligniti dovrebbero intervenire imponenti fenomeni di frana, e ciò spiegherebbe i banchi successivi, alternantisi con detriti di foglie. Lo studio dei pollini fossili potrà essere decisivo.

Secondo questa teoria si spiegherebbe perchè i giacimenti di lignite non siano costieri, ma di regione collinare, e in terreni soggetti a frane, e non accompagnati da imponenti fenomeni di torbazione, come dovrebbe avvenire se si trattasse di immensi laghi–stagni scomparsi, dove i tronchi sarebbero stati fluitati.

Per le torbe del lago di Massaciuccoli abbiamo creduto interessanti le analisi dei pollini che dopo gli studi di Gams hanno avuto giusta diffusione, analisi eseguite da egregi Collaboratori e che riporteremo nella Nota definitiva.

In essa verranno anche messe in evidenza tutte le specie vegetali ed animali riscontrate nel lago, qualche particolarità osservata sul periodo riproduttivo, quello della maggior pullulazione ecc., ma facciamo fin d'ora osservare che – come era teoricamente prevedibile – pure esistendo una *facies* stagionale predominante, ogni anno questa subisce qualche spostamento, e talvolta si può osservare un non ancora riscontrato massimo di una data specie mentre c'è diminuzione di un'altra in precedenza più abbondante, per cui la sperimentazione conferma che osservazioni sporadiche o molto limitate non possono essere sufficienti per trarne sicure conclusioni sull'assenza di specie animali o vegetali dalle Società linmetiche di particolari ambienti, o sulla possibile colonizzazione di essi.

Biologia. — *Ricerche sull'assunzione di sostanze minerali per parte dell'embrione di "Sepia officinalis"* [1]. Nota di S. Ranzi, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

In precedenti ricerche ho dimostrato come l'embrione di animali marini (*Sepia officinalis* [3], *Scyllium canicula* [4]) assorbe, nel corso dello sviluppo, sostanze minerali disciolte nell'acqua di mare e come la massima parte dello scheletro e del guscio (i tre quarti, in peso, delle ceneri nella *Sepia officinalis*) è formata a spese di sostanze minerali assunte dall'ambiente. Queste mie osservazioni sono state confermate ed estese ad altri animali da Stolfi [5], J. Needham e D. M. Needham [6], J. Needham, D. M. Needham, Yudkin e Baldwin [7], onde l'assorbimento di sostanze minerali dall'ambiente sembra oggi generalizzabile per le uova acquatiche [8].

L'aumento delle ceneri dell'embrione in stadi successivi di sviluppo, osservato da me e Stolfi, è da imputare ai quattro cationi che predominano nell'acqua di mare: Na, K, Ca, Mg. Needham e collaboratori hanno però dimostrato che anche P è assunto. Tali essendo le nostre conoscenze, mi sembrò fosse il caso di investigare se, oltre a questi cinque elementi, altri ne venissero assunti. Questo problema presenta, dal punto di vista della biochimica embrionale, un grande interesse perchè taluni elementi hanno notevole importanza entrando nella composizione di molecole di sostanze, che esplicano funzioni fondamentali per l'organismo. Essendomi posto questo programma, studiai l'embrione di *Sepia officinalis* L. poichè il pigmento respiratorio del sangue dei Cefalopodi, l'emocianina, contiene come metallo il Cu.

La quantità di Cu presente nel sangue è però scarsa e gli embrioni raggiungono appena i 130 mg. Occorreva quindi un metodo che permettesse

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta del 15 dicembre 1935.

(3) S. Ranzi, «Rend. R. Acc. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), ser. 6ª, vol. IX, p. 1171, 1929; «Arch. Entw. Mechan.», Bd. 121, p. 345, 1930.

(4) S. Ranzi, «Pubb. Staz. Zool. Napoli», vol. 12, p. 209, 1932.

(5) G. Stolfi, «Rend. R. Acc. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), ser. 6ª, vol. XVIII, p. 516, 1933.

(6) J. Needham e D. M. Needham, «Journ. exp. Biol.», vol. 7, p. 317, 1930.

(7) J. Needham, D. M. Needham, J. Yudkin e E. Baldwin, «Journ. exp. Biol.», vol. 9, p. 212, 1932.

(8) S. Ranzi, «Bollettino Zoologia», vol. 1, p. 35, 1930; Relazione XII Congresso Intern. Zoologia Lisbona (1935), in stampa.

determinare traccie minime del metallo, che secondo Dhéré [1], ascendono a 0.5 ≐ 0.8 mg. per 100 uova (manca l'indicazione se si tratta di uova sgusciate o con gli involucri, di uova appena deposte o contenenti l'embrione).

Giudicai quindi dover adottare il metodo spettrografico e debbo alla grande benevolenza a mio riguardo del prof. R. Dohrn se potetti fare acquistare dalla Stazione Zoologica il grande spettrografo di Hilger E_3 in quarzo per ultravioletto e visibile e il microfotometro di Moll a pila termoelettrica per registrare l'intensità dell'emissione, che ha impressionato lo spettrogramma. I due apparecchi permettono di fare misure quantitative abbastanza precise.

Vennero eseguite due serie di determinazioni, una su uova e embrioni sgusciati, l'altra su uova e embrioni insieme ai loro involucri. La prima serie serve a vedere se l'embrione nel corso dello sviluppo assume un dato elemento; la seconda se l'assunzione avviene veramente dal mare e se l'elemento non preesiste negli involucri dell'uovo.

Uova ed embrioni, sgusciati e non sgusciati vennero posti in crogiuoli di quarzo. Questi vennero chiusi in scatole di vetro aperte con un tubo ripiegato, onde permettere l'uscita di vapor d'acqua ed evitare la caduta nei crogiuoli particelle estranee, e messi a essiccare in stufa a secco. L'incenerimento fu eseguito rapidamente in muffola elettrica Heraeus a 700°–800°. In tutte queste manipolazioni tutto il materiale fu trattato insieme.

Le ceneri vennero sciolte, sempre nei crogiuoli di quarzo, in una soluzione in parti eguali di HCl Merk per analisi e H_2O bidistillata. Con una micro–buretta si mettevano in ogni crogiuolo 2 cc. di questa soluzione, per ogni gr. di sostanza secca presente prima dell'incenerimento dell'uovo o embrione sgusciato, e 4 cc., per ogni gr. di sostanza secca per l'uovo o embrione con gli involucri. Come è noto il peso della sostanza secca è la quantità che subisce minori cambiamenti nel corso dello sviluppo.

Usai una lampada ad arco con elettrodi di grafite Hilger F. 624 N. 9968 con verbale di collaudo.

Sull'elettrodo inferiore (negativo) ponevo una goccia della soluzione di ceneri di cui desideravo eseguire lo spettrogramma, poi accendevo l'arco e fotografavo.

Le ricerche non sono ancora terminate. Ho terminato la fotografia degli spettri, ma sarà necessario un lungo e accurato lavoro di fotometratura per poter dare dei risultati numericamente degni di fede. È per questo che, sebbene i miei protocolli siano già pieni di cifre, non riporto in questa Nota alcun valore numerico. Al punto in cui sono giunte le mie ricerche posso però trarre parecchie conclusioni che voglio qui riassumere.

In generale l'embrione di *Sepia officinalis* sembra dotato, al più alto

(1) C. Dhéré, «C. R. Soc. Biol. Paris», vol. 57, p. 209, 1904.

grado, del potere di concentrare nel suo corpo elementi esistenti, anche in traccie minime, nell'acqua di mare.

In altre parole: come l'aumento ponderale delle ceneri dimostra un aumento di Na, K, Ca, Mg, così l'analisi spettrografica dimostra che anche parecchi altri elementi aumentano nell'embrione.

Cu presenta per $\lambda = 3247.548$ (le lunghezze d'onda sono prese da Kayser e Meggers [1]) un notevolissimo aumento nel corso dello sviluppo dell'embrione e non solo nell'embrione, ma anche nell'uovo completo, onde è sicuramente assunto dal mare. Poichè la massima parte del Cu, presente nel corpo della *Sepia officinalis*, è contenuto nelle molecole della emocianina, si può concludere che una parte del Cu necessario alla sintesi della emocianina è assunto dall'ambiente.

Fe anche aumenta nel corso dello sviluppo dell'embrione, sia nell'embrione, sia nell'uovo con gli involucri. Questo fatto si vede bene per $\lambda = 2395.63$. I tessuti embrionali hanno infatti bisogno di una notevole quantità di Fe che serve, tra l'altro, a costruire la molecola del fermento respiratorio di Warburg, che è logico ritenere venga sintetizzato nel corso dello sviluppo.

Mn anche aumenta nel corso dello sviluppo. Si osserva infatti un leggerissimo aumento dell'annerimento della linea $\lambda = 4030.760$. Questo aumento si osserva sia nel passaggio da uovo a embrione pronto per la schiusa, sia negli stadi corrispondenti analizzati insieme ai loro involucri. L'aumento del Mn sembra essere in rapporto alla funzione di questo elemento, che pare eserciti un'azione in processi enzimatici e ossidativi.

V si comporta come Mn, aumenta cioè nel corso dello sviluppo e viene assunto dal mare, come si può vedere per $\lambda = 3093.13$. Questo reperto è completamente inaspettato. È ben noto che il V si trova nel sangue delle Ascidie dove ha importanza per i processi respiratorî, ma, nei Cefalopodi, per quanto sappia, questo elemento non era segnalato.

B aumenta nel corso dello sviluppo dell'embrione e viene preso dall'ambiente, come si può vedere per $\lambda = 2497.733$. Come è noto, B si ritrova frequentemente quale costituente degli animali marini.

Li aumenta durante lo sviluppo e viene assunto dal mare secondo quanto risulta evidentissimo per $\lambda = 6707.86$. Sarebbe interessante poter precisare se entra nell'organismo quale componente indispensabile o se, essendo un metallo alcalino, la sua funzione si limiti a vicariare Na o K in qualche composto.

Sr aumenta durante lo sviluppo e viene assunto dal mare come si può vedere per $\lambda = 4607.342$. Sr è un metallo alcalino-terroso e, come tale, è verisimile contribuisca, in piccola parte, unitamente al Mg, a formare insieme al Ca la conchiglia.

(1) H. Kayser e W. F. Meggers, *International Critical Tables*. Vol. 5, pp. 276, 322. «National Research Council U. S. A.», 1929.

Riassumendo: le presente ricerche dimostrano che l'embrione di *Sepia officinalis* non solo è capace di concentrare Na, K, Ca, Mg, P, prendendoli dal mare, ma che assume anche dal mare parecchi altri elementi tra cui Cu, Fe, Mn, V, B, Li, Sr. Questo reperto merita un commento per quanto concerne il Cu, poichè il Cu è il metallo del pigmento respiratorio del sangue e quindi si può concludere che una porzione del Cu, necessario per l'emocianina che viene sintetizzata nel corso dello sviluppo, viene preso dall'ambiente.

N. P.

INDICE DEL VOLUME XXII, SERIE VI. — RENDICONTI

1935. Secondo Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Airoldi M. — « Di un caso di erosione accelerata verificatosi in Valle d'Urba ». 593.

Akimoff N. W. — « Sul paradosso di Dubuat ». 60.

Allegretti L. — « Misure di dispersione anomala sulle prime doppie dello Sr+ e del Ba+ ». 256.

Aloisi P. — « Sopra alcuni ciottoli dell'anagenite-verrucana del Monte Pisano ». 11.

Amantea G. — « Sul modo di dosare la vitamina antineuritica (B^1) applicando la nozione del " quoziente beri-berico " (Q_{β}) ». 173.

Id. — « Azione di alcune sostanze chimiche sul clono da stricninizzazione dei centri corticali sensitivo-motori ». 177.

Ascoli G. — « Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine ». 234.

Id. — « Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine ». 314.

Austoni G. — « La determinazione ciliare e la polarità del movimento vibratile studiate mediante l'irradiazione ultravioletta di neurule di " Rana esculenta " ». 544.

B

Bemporad A. — « Aumento di precisione nelle recenti riduzioni del " Catalogo Astrografico " ». 93.

Betti M. e Lucchi E. — « Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». Nota III. 367.

Betti M. e Manzoni M. — « Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». Nota II. 284.

Bisconcini G. — « Sui cosiddetti fenomeni giroscopici ». 417.

Boggio T. — « Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali ». 216.

Bompiani E. — « Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei ». 484.

Bonino G. B. e Manzoni-Ansidei R. — « Sullo spettro Raman di alcuni derivati del pirrolo ». 349.

Id. — « Spettro Raman e costituzione del pirazolo e di alcuni suoi derivati ». 438.

Bonino G. B., Manzoni-Ansidei R. e Dinelli D. — « Spettro Raman di alcune aldeidi pirroliche sostituite ». 448.

Breuil H. e Blanc A. C. — « Rinvenimento *in situ* di un nuovo cranio di " Homo neanderthalensis " nel giacimento di Saccopastore (Roma) ». 166.

Broggi U. — « Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre ». 108.

Id. — « Su di un sistema di infinite equazioni lineari ». 120.

Id. — « Sulle costanti di Fourier-Laguerre ». 310.

Brunelli G. e Cannicci G. — « Notizie preliminari sulle caratteristiche chimiche e biologiche del lago Massaciuccoli ». 548, 598.

C

Caccioppoli R. — « Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni ». Nota I. 305.

Id. — « Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni ». Nota II. 376.

Id. — « Rappresentazione conforme e superficie quadrabili ». 379.

Caglioti V. — « Sulla struttura del fosfato ferrico ». 146.

Cahill W. — Vedi Neuberg. C.

Cannicci G. — Vedi Brunelli G.

Checchia-Rispoli G. — « Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata ». 288.

Cherubino S. — « Sulle serie di potenze di una variabile, in un'algebra ». 211.

Cisotti U. — « Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria ». 275.

Id. — « Calcolo degli "effetti di zavorra" relativi ad una lamina rettilinea ». 279.

Crocco G. A. — « La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente ». 3.

D

De Sanctis Monaldi T. — « Ricerche sull'infezione malarica sperimentale umana da sporozoiti ». 88.

Dinelli D. — « Sulle sostanze coloranti del guscio delle uova di casuario ». 464.

Doetsch G. — « Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre ». 300.

E

Einaudi R. — « Sul problema di Cauchy per equazioni differenziali a coefficienti singolari ». 492.

Ermolaef L. — « Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points homologues, ont une paire de droites conjuguées communes ». 23.

F

Famiani V. — « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B^1) del grano germinante ». 84.

Id. — « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B^1) di alcune varietà di grano italiano ». 86.

Finzi B. — Vedi Maggi G. A.

Fiore M. — « Presenza della "Wielandiella angustifolia Nath." nel lias veronese (Roverè di Velo) ». 467.

Franchetti S. — « Lo stato liquido e le forze interatomiche ». Nota I. 433.

Id. — « Lo stato liquido e le forze interatomiche ». Nota II. 585.

Freri M. — « Azioni anomale dell'acido nitroso su idrazidi di acidi organici ». 264.

G

Ghiron D. — « Borovanadati ». 259.

Gialanella L. — « Osservazioni meridiane di *Urano* nel 1934 e di *Marte* nel 1935 ». 325.

Id. — « Sulle perturbazioni della eccentricità nel problema dei due corpi di masse lentamente crescenti ». 529.

Giraud G. — « Passage de l'électricité dans un champ magnétique lorsque les électrodes sont des points ». 334.

Goidànich G. — « Osservazioni sopra una malattia del trifoglio rara in Italia: l'antracnosi da "Kabatiella caulivora (Kirchn.) Karak." ». 354.

Graffi D. — « Ancora sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria ». 55.

Gugino E. — « Sulla derivata di direzione dei tensori ». 290.

Id. — « Sul trasporto ciclico di un tensore di ordine qualunque ». 295.

Id. — « Sul problema relativistico del moto in un campo gravitazionale stazionario ». 405.

H

Hostinský B. — « Sur l'intégration des substitutions linéaires ». 221.

L

Laboccetta L. — « Determinazione delle dimensioni della terra con il metodo meccanico di Galileo per la misura delle distanze dei punti inaccessibili ». 517.
Lampariello G. « Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto », 557.
Lucchi E. — Vedi Betti M.

M

Maggi G. A. e Finzi B. — « Una questione relativa alle onde elettromagnetiche armoniche ». 200.
Maldura C. M. — « Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia ». Nota I. 64.
Id. — « Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia ». Nota II. 140.
Mangini A. — « Osservazioni sui prodotti di condensazione delle ossime con i diazoici aromatici ». 452.
Manzoni-Ansidei R. — « Sullo spettro Raman del dimetilfurazano e del dimetiloxobiazolo ». 444.
Id. — Vedi Bonino G. B.
Manzoni M. — Vedi Betti M.
Marletta G. — « Osservazioni di Geometria proiettiva differenziale ». 231.
Masotti A. — « Sul centro del moto asintotico ». 426.
Id. — « Moti piani in presenza di particolari sistemi di vortici-sorgenti ». 429.
Mattioli G. — « Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza ». 49.
Medi E. — « Nuovo metodo per l'analisi della luce parzialmente polarizzata, diffusa dal cielo ». 331.
Mitolo M. — « Presenza e distribuzione di alcune sostanze riducenti nel neurasse ». 359.

N

Natta G. e Rigamonti R. — « Esame coi raggi di elettroni di alcuni eteri grassi ». 342.
Neuberg C. e Cahill W. — « L'idrolisi enzimatica totale degli acidi condroitin-solforico e mucoitin-solforico nei loro componenti ». 149.

O

Odone F. — « Equazioni generali della turbolenza ». 506.
Id. — « Sui sistemi assoluti di unità di misura ». 513.
Orrù A. — « Sul comportamento della conduttività elettrica del tuorlo di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti ». 458.
Id. — « Ulteriori osservazioni sulle costanti chimico-fisiche dell'acqua nella quale è stato immerso il tuorlo dell'uovo di gallina ». 533.

P

Palozzi G. — « Sull'applicabilità proiettiva dei reticolati piani ». 103.
Id. — « L'elemento lineare proiettivo e l'applicabilità proiettiva di nuovi reticolati dello spazio ordinario ». 202.
Pastori M. — « Sul problema di Clebsch. I. Impostazione generale ». 135.
Id. — « Sul problema di Clebsch. II. Applicazione dei tensori vincolati ». 251.
Pelloux A. — Sulla scheelite delle miniere del Gerrei in Sardegna ». 554.
Peretti L. — « Affioramento di gneiss petriasici presso Acqui ». 268.
Pratesi P. e Zanetta A. — « Sulla reazione fra pirrolo e isatina. (Sui Bleu di Pirrolo) ». Nota III. 159.
Puccianti L. — « Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova Metrologia elettrica ». 187.
Id. — « Considerazioni generali sul Momento e i Poli magnetici, la Intensità di magnetizzazione e la Suscettività, e sulle rispettive misure in un sistema a quattro unità fondamentali ». 194.

Puntoni V. — « Proteomyces infestans Moses e Vianna, 1913 e suoi rapporti col genere Trichosporon Behrend,1890». 271.

R

Ramaccioni G. — « Scheletro di "Elephas planifrons" rinvenuto nel Pliocene della Val d'Era ». 534.

Ranzi S. — « Ricerche sull' assunzione di sostanze minerali per parte dell' embrione di "Sepia officinalis" ». 605.

Rigamonti R. — Vedi Natta G.

Rodolico F. — « Sulla composizione chimica della roccia erutiva di Cupaello (Rieti) ». 469.

Romano M. e Schreiber G. — « Le trasformazioni dell'occhio degli Anuri durante la metamorfosi normale ed accelerata ». 81.

S

Sacco F. — « Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino ». Nota I. 371.

Id. — « Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino ». Nota II, 551.

Sanero E. — « Sulla presenza della prehnite a Monte Loreto in Liguria ». 170.

Scagliarini G. — « Reazione cromatica fra nitroprussiato e solfiti. (Reazione di Bödeker) ». 155.

Schreiber G. — « Rigenerazione atipica degli arti del "Proteus anguineus Laur." ». 75.

Scorza G. — « Sulle varietà di Veronese ». 181.

Scorza Dragoni G. — « A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine ». 44.

Id. — « A proposito di alcuni teoremi di media che si incontrano nella dinamica ». 113.

Id. — « A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari ». 385.

Segre B. — « Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori ». 392.

Id. — « Le linee proiettive ed un invariante d'immersione di una curva su di una superficie ». 400.

Silvestroni E. — « Effetti della surrenalectomia mono– o bilaterale sulle grandezze nucleari di alcuni organi endocrini ». 540.

Sona L. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Introduzione e impostazione ». Nota I. 130.

Id. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Trasformazione conforme ». Nota II. 244.

Id. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera ». Integrale del moto. Nota III. 320

Id. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Azioni dinamiche ». Nota IV. 411.

Id. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Applicazioni aerodinamiche ». Nota V. 498.

Id. — « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Momento delle azioni dinamiche ». Nota VI. 577.

Spampinato N. — « Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse ». Nota I. 38.

Id. — « Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi–Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse ». Nota II. 96.

Spirito A. — « Prime ricerche sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali ». 69.

Supino G. — « Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio ». Nota I. 522.

Id. — « Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio ». Nota II. 528, 581.

T

Terracini A. — « Sulle linee proiettive di una superficie ». 125.

Id. — « Sulla deformabilità proiettiva delle congruenze rettilinee ». 225.

TONOLO A. — «Sull'integrazione del sistema differenziale di Dirac». 30.

TOSCANO L. — «Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare». Nota II. 19.

TRICOMI F. — «Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità Hankel». 564.

ID. — «Un teorema abeliano per la trasformazione di Hankel e alcune nuove applicazioni di una formula sulle funzioni di Bessel». 572.

U

USLENGHI L. — «Sul moto di una sorgente puntiforme in un angolo concavo». 420.

W

WOINAROSKÝ R. — «La cinématique du corps solide dans une espace euclidien à *n* dimensions». 34.

INDICE PER MATERIE

A

Astronomia. — « Aumento di precisione nelle recenti riduzioni del "Catalogo Astrografico" ». Bemporad A. 93.

— « Osservazioni meridiane di *Urano* nel 1934 e di *Marte* nel 1935 ». Giàlanella L. 325.

— « Sulle perturbazioni della eccentricità nel problema dei due corpi di masse lentamente crescenti ». Id. 529.

B

Biologia. — « Notizie preliminari sulle caratteristiche chimiche e biologiche del lago di Massaciuccoli ». Brunelli G. e Cannicci G. 548, 598.

— « Osservazioni sopra una malattia del trifoglio rara in Italia: l'antracnosi da "Kabatiella caulivora (Kirchn.) Karak.". Goidànich G. 354.

— « Ricerche sull'assunzione di sostanze minerali per parte dell'embrione di "Sepia officinalis" ». Ranzi S. 605.

— « Prime ricerche sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali ». Spirito A. 69.

C

Chimica. — « Anomalie nella costante dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». Nota III. Betti M. e Lucchi E. 367.

— Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». Nota II. Id. e Manzoni M. 284.

— « Sullo spettro Raman di alcuni derivati del pirrolo ». Bonino G. B. e Manzoni-Ansidei R. 349.

Chimica. — « Spettro Raman e costituzione del pirazolo e di alcuni suoi derivati ». Id. e Id. 438.

— « Spettro Raman di alcune aldeidi pirroliche sostituite ». Id., Id. e Dinelli D. 448.

— « Sulla struttura del fosfato ferrico ». Caglioti V. 146.

— « Azioni anomale dell'acido nitroso su idrazidi di acidi organici ». Freri M. 264.

— « Borovanadati ». Ghiron D. 259.

— « Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia ». Nota I. Maldura C. M. 64.

— « Ricerche chimiche sulla laguna di Orbetello in rapporto alla biologia ». Nota II. Id. 140.

— Osservazioni sui prodotti di condensazione delle ossime con i diazoici aromatici ». Mangini A. 452.

— Sullo spettro Raman del dimetilfurazano e del dimetiloxobiazolo ». Manzoni-Ansidei R. 444.

— « Esame coi raggi di elettroni di alcuni eteri grassi ». Natta G. e Rigamonti R. 342.

— « L'idrolisi enzimatica totale degli acidi condroitin-solforico e mucoitin-solforico nei loro componenti ». Neuberg C. e Cahill W. 149.

— « Sulla reazione fra pirrolo e isatina. (Sui Bleu di pirrolo) ». Nota III. Pratesi P. e Zanetta A. 159.

— « Reazione cromatica fra nitroprussiato e solfiti. (Reazione di Bödeker) ». Scagliarini G. 155.

Chimica biologica. — « Sulle sostanze coloranti del guscio delle uova di casuario ». Dinelli D. 464.

— « Sul comportamento della conduttività

elettrica del tuorlo di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti ». Orrù A. 458.

Chimica fisica. — « Lo stato liquido e le forze interatomiche ». Nota I. Franchetti S. 433.

— « Lo stato liquido e le forze interatomiche ». Nota II. Id. 585.

— « Ulteriori osservazioni sulle costanti chimico-fisiche dell'acqua nella quale è stato immerso il tuorlo dell'uovo di gallina ». Orrù A. 533.

F

Fisica. — « Misure di dispersione anomala sulle prime doppie dello Sr+ e del Ba+ ». Allegretti L. 256.

— « Passage de l'électricité dans un champ magnétique lorsque les électrodes sont des points ». Giraud G. 334.

— « Nuovo metodo per l'analisi della luce parzialmente polarizzata, diffusa dal cielo ». Medi E. 331.

— « Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova Metrologia elettrica ». Puccianti L. 187.

— « Considerazioni generali sul Momento e i Poli magnetici, la Intensità di magnetizzazione e la Suscettività, e sulle rispettive misure in un sistema a quattro unità fondamentali ». Id. 194.

Fisiologia. — « Sul modo di dosare la vitamina antineuritica (B^1) applicando la nozione del " quoziente beri-berico " (Q_b) ». Amantea G. 173.

— « Azione di alcune sostanze chimiche sul clono da stricninizzazione dei centri corticali sensitivo-motori ». Id. 177.

— « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B^1) del grano germinante ». Famiani V. 84.

— « Sul contenuto in vitamina antineuritica (B^1) di alcune varietà di grano italiano ». Id. 86.

— « Presenza e distribuzione di alcune sostanze riducenti nel neurasse ». Mitolo M. 359.

G

Geologia. — « Sopra alcuni ciottoli dell'anagenite-verrucana del Monte Pisano ». Aloisi P. 11.

— « Rinvenimento *in situ* di un nuovo cranio di " Homo neanderthalensis " nel giacimento di Saccopastore (Roma) ». Breuil H. e Blanc A. C. 166.

— « Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata ». Checchia-Rispoli G. 288.

— « Affioramento di gneiss petriasici presso Acqui ». Peretti L. 268.

— « Scheletro di " Elephas planifrons " rinvenuto nel Pliocene della Val d'Era ». Ramaccioni G. 534.

— « Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino ». Nota I. Sacco F. 371.

— « Le Direttrici tettoniche trasversali dell'Appennino ». Nota II. Id. 552.

Geometria. — « Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points homologues, ont una paire de droites conjuguées communes ». Ermolaef L. 23.

— « Sulle varietà di Veronese ». Scorza G. 181.

— « Sulle linee proiettive di una superficie ». Terracini A. 125.

Geomorfologia. — « Di un caso di erosione accelerata in valle d'Urba ». Airoldi M. 593.

L

Litologia. — « Sulla composizione chimica della roccia eruttiva di Cupaello (Rieti) ». Rodolico F. 469.

M

Matematica. — « Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine ». Ascoli G. 234.

— « Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine ». Id. 314.

— « Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali ». Boggio T. 216.

Matematica. — « Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei ». Bompiani E. 484.
— Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre ». Broggi U. 108.
— « Su di un sistema di infinite equazioni lineari ». Id. 120.
— « Sulle costanti di Fourier-Laguerre ». Id. 310.
— « Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni ». Nota I. Caccioppoli R. 305.
— « Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni ». Nota II. Id. 376.
— « Rappresentazione conforme e superficie quadrabili ». Id. 379.
— « Sulle serie di potenze di una variabile, in un'algebra ». Cherubino S. 211.
— « Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre ». Doetsch G. 300.
— « Sul problema di Cauchy per equazioni differenziali a coefficienti singolari ». Einaudi R. 492.
— « Sulla derivata di direzione dei tensori ». Gugino E. 290.
— « Sul trasporto ciclico di un tensore di ordine qualunque ». Id. 295.
— « Sur l'intégration des substitutions linéaires ». Hostinský B. 221.
— « Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto». Lampariello G. 557.
— « Osservazioni di Geometria proiettiva differenziale ». Marletta G. 231.
— « Sull'applicabilità proiettiva dei reticolati piani ». Palozzi G. 103.
— « L'elemento lineare proiettivo e l'applicabilità proiettiva di nuovi reticolati nello spazio ordinario ». Id. 202.
— « A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine ». Scorza Dragoni G. 44.
— « A proposito di alcuni teoremi di media che si incontrano nella dinamica ». Id. 113.
— « A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari ». Id. 385.

Matematica. — « Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori ». Segre B. 392.
— « Le linee proiettive ed un invariante d'immersione di una curva su di una superficie ». Id. 400.
— « Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse ». Nota I. Spampinato N. 38.
— « Estensione nel campo bicomplesso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse ». Nota II. Id. 96.
— « Sulla deformabilità proiettiva delle congruenze rettilinee ». Terracini A. 225.
— « Sull'integrazione del sistema differenziale di Dirac ». Tonolo A. 30.
— « Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare ». Nota II. Toscano L. 19.
— « Sulla trasformazione e il problema di reciprocità di Hankel ». Tricomi F. 564.
— « Un teorema abeliano per la trasformazione di Hankel e alcune nuove applicazioni di una formula sulle funzioni di Bessel ». Id. 572.
— « La cinématique du corps solide dans une espace euclidien à n dimensions ». Woinarosky R. 34.

Meccanica. — « Sul paradosso di Dubuat ». Akimoff N. W. 60.
— « Sui cosiddetti fenomeni giroscopici ». Bisconcini G. 417.
— « Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria ». Cisotti U. 275.
— « Calcolo degli "effetti di zavorra" relativi ad una lamina rettilinea ». Id. 279.
— « La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente ». Crocco G. A. 3.
— « Ancora sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria ». Graffi D. 55.
— « Sul problema relativistico del moto in un campo gravitazionale stazionario ». Gugino E. 405.

Meccanica. — « Determinazione delle dimensioni della terra con il metodo meccanico di Galileo per la misura delle distanze dei punti inaccessibili ». Labocchetta L. 517.
— « Una questione relativa alle onde elettromagnetiche armoniche ». Maggi G. A. e Finzi B. 200.
— « Sul centro del moto asintotico ». Masotti A. 426.
— « Molti piani in presenza di particolari sistemi di vortici-sorgenti ». Id. 429.
— « Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza ». Mattioli G. 49.
— « Equazioni generali della turbolenza ». Odone F. 506.
— « Sui sistemi assoluti di unità di misura ». Id. 513.
— « Sul problema di Clebsch. I. Impostazione generale ». Pastori M. 135.
— « Sul problema di Clebsch. II. Applicazione dei tensori vincolati ». Id. 251.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Introduzione e impostazione ». Nota I. Sona L. 130.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Trasformazione conforme ». Nota II. Id. 244.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Integrale del moto ». Nota III. Id. 320.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Azioni dinamiche ». Nota IV. Id. 411.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Applicazioni aerodinamiche ». Nota V. Id. 498.
— « Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera. Momento delle azioni dinamiche ». Nota VI. Id. 577.
— « Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio ». Nota I. Supino G. 522.
— « Il problema elastico piano e la sua interpretazione nello spazio ». Nota II. Id. 528, 581.
— « Sul moto di una sorgente puntiforme in un angolo concavo ». Urslenghi L. 420.

Microbiologia. — « " Proteomyces infestans Moses e Vianna, 1913 " e suoi rapporti col genere " Trichosporon Behrend, 1890 " ». Puntoni V. 271.

Mineralogia. — « Sulla scheelite delle miniere del Gerrei in Sardegna ». Pelloux A. 554.
— « Sulla presenza della prehnite a Monte Loreto in Liguria ». Sanero E. 170.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 474, 550.

P

Paleobotanica. — « Presenza della " Wielandiella angustifolia Nath. " nel lias veronese (Roverè di Velo) ». Fiore M. 467.

Patologia. — « Ricerche sull'infezione malarica sperimentale umana da sporozoiti ». De Sanctis Monaldi T. 88.

Personale Accademico. — 473.

Presentazione di libri. — 473, 549.

Presentazione di Note e Memorie. 473, 549.

R

Relazioni di Commissioni. — 473.

S

Sospensione dei Concorsi a Premio. — 481.

Z

Zoologia. — « La determinaziane ciliare e la polarità del movimento vibratile studiate mediante l'irradiazione ultravioletta di neurule di " Rana esculenta " ». Austoni G. 544.
— « Le trasformazioni dell' occhio degli Anuri durante la metamorfosi normale ed accelerata ». Romano M, e Schreiber G. 81.
— « Rigenerazione atipica degli arti del " Proteus anguineus Laur. " ». Schreiber G. ». 75.
— « Effetti della surrenalectomia mono– o bilaterale sulle grandezze nucleari di alcuni organi endocrini ». Silvestroni E. 540.

ERRATA-CORRIGE AL VOLUME XX

A p. 174 nel titolo invece di García *leggere* Gargia.

ERRATA-CORRIGE AL VOLUME XXII

Nella Nota P. Aloisi:

A p. 11, nel titolo invece di anagenite-verrucana *leggere* anagenite verrucana.

A p. 13, rigo 21, invece di forma *leggere* fauna.

A p. 15, spiegazione della fig. 1, invece di vela *leggere* selce; *invece di* romboidrico *leggere* romboedrico; *invece di* ingr. 5 *leggere* ingr. 50.

A p. 17, spiegazione della fig. 2, invece di romboidrico *leggere* romboedrico; *a rigo 7 cominciando dal fondo invece di* trias *leggere* Lias.

Nella Nota di A. Tonolo:

A. p. 31, nelle formule (4) si deve porre $-K$ *al posto di* $+K$.

A p. 32, nelle prime due formole (5) gli integrali di spazio devono essere moltiplicati per K^2 *e in tutte le quattro formule le integrazioni rispetto a* τ *devono avere come estremi* 0 *e* $t - r$.

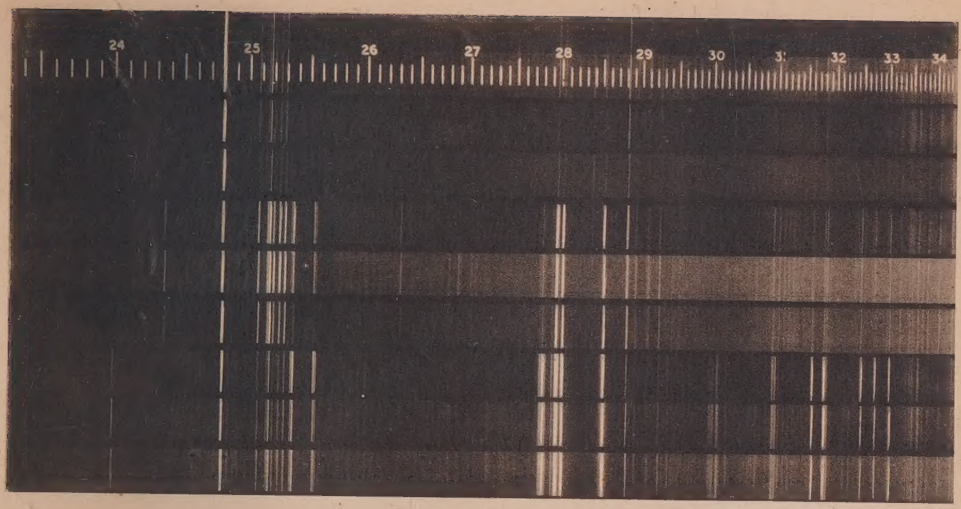
Nella Nota di L. Peretti:

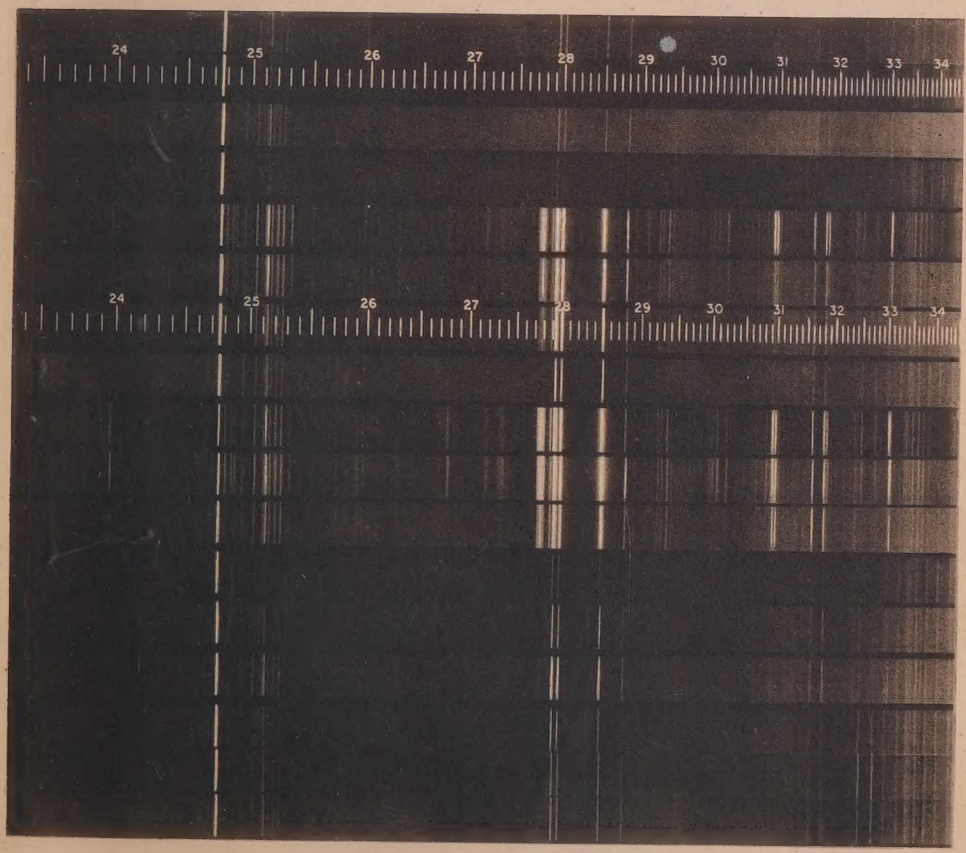
A p. 269, riga 9, invece di calcescisci *leggere* calcescisti.

A p. 270, riga 17, invece di feldesplatici *leggere* feldspatici.

Regione dell'ultravioletto compresa tra $\lambda = 2330$ e $\lambda = 3450$ di due lastre. 1–3, 11–13, 18, spettri della sorgente luminosa (arco con elettrodi di grafite) (su 2, 12 la scala); 4, 14, spettri del solvente $HCl + H_2O$ (1 : 1); 5–7, spettri dell'uovo appena deposto privato degli involucri; 8–10, spettri dell'embrione in stadio molto avanzato dello sviluppo (stadio XIX-XX di Naef); 15–17, spettri dell'uovo totale (= con gli involucri) appena deposto (su 17 la scala); 19–21, spettri dell'uovo totale contenente embrioni in stadio molto avanzato dello sviluppo (stadio XIX di Naef); 22–27 spettri campioni di soluzioni di $CuSO_4 + 5\,H_2O$ in $H_2O + HCl$ (1 : 1) a concentrazioni crescenti; 22, $CuSO_4 + 5\,H_2O$ $5 \cdot 10^{-4}$ %; 23, 24, $CuSO_4 + 5\,H_2O$ $5 \cdot 10^{-3}$ % 25, $CuSO_4 + 5\,H_2O$ $5 \cdot 10^{-2}$ %; 26, 27, $CuSO_4 + 5\,H_2O$ $5 \cdot 10^{-1}$ %.

Si vedono bene, nel passaggio da uovo a embrione (sia con involucri che senza) aumentare il Cu per $\lambda = 3247.548$; il Fe per $\lambda = 2395.63$; il Mg per $\lambda = 2795.540$; il Ca per $\lambda = 3158.87$; il Na per $\lambda = 3302.34$.


24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34


24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34

DANESI-ROMA